CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

* Để tìm họ nguyên hàm của một hàm số y=f(x) , cũng có nghĩa là ta đi tính một tích phân bất định : $I=\int f(x)dx$. Ta có ba phương pháp :

- Phương pháp phân tích .
- Phương pháp đổi biến số .
- Phương pháp tích phân từng phần

Do đó điều quan trọng là f(x) có dạng như thế nào để ta ngiên cứu có thể phân tích chúng sao cho có thể sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản để tìm được nguyên hàm của chúng . Hoặc sử dụng hai phương pháp còn lại

- Sau đây là một số gợi ý giúp các em có thể nhận biết dạng của f(x) mà có phương pháp phân tích cụ thể , từ đó tìm được nguyên hàm của chúng .

Bảng nguyên hàm

Nguyên hàm của những hàm số sơ cấp thường gặp	Nguyên hàm của những hàm số thường gặp	Nguyên hàm của những hàm số hợp
$\int dx=x+C$	$\int (ax+b)dx=\frac{1}{a}(ax+b)+C$	$\int du=u+C$
$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ \ (\alpha\neq 1)$	$\int (ax+b)^\alpha dx=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ \ (\alpha\neq 1)$	$\int u^\alpha du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq 1)$
$\int \frac{dx}{x}=\ln\|x\|+C\ \ (x\neq 0)$	$\int \frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln\|ax+b\|+C\ \ (x\neq 0)$	$\int \frac{du}{u}=\ln\|u\|+C\ \ (u\neq 0)$
$\int e^x dx=e^x+C$	$\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$	$\int e^u du=e^u+C$
$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\ \ (0<a\neq 1)$	$\int \cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$	$\int a^u dx=\frac{a^u}{\ln a}+C\ \ (0<a\neq 1)$
$\int \cos xdx=\sin x+C$	$\int \sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$	$\int \cos udu=\sin u+C$
$\int \sin xdx=-\cos x+C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx=\frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$	$\int \sin udu=-\cos u+C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx=-\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u}du=\tan u+C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$		$\int \frac{1}{\sin^2 u}du=-\cot u+C$

PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG CÁCH PHÂN TÍCH

I.TRƯỜNG HỢP : f(x) LÀ MỘT HÀM ĐA THỨC

$$\Leftrightarrow f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_0$$

A.CÁCH TÌM

1. Sử dụng công thức tìm nguyên hàm của hàm số : f(x)=$x^\alpha \Rightarrow F(x)=\frac{1}{\alpha+1}.x^{\alpha+1}+C$

2. Do đó nguyên hàm của f(x) là : $\Leftrightarrow F(x)=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+.....+a_0x+C$

B. MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA .

Ví dụ 1. Tìm nguyên hàm các hàm số sau

1. $\int\left(\frac{1}{4}x^4+4x^3+\sqrt[3]{x^2}+x-2\right)dx$

2. $\int\left(mx^3-3x^2+\sqrt{x-1}+\frac{4m}{x^3}+\frac{5}{2x}-7m\right)dx$

3. $\int\left(me^x+2a^x+\log_3 x-2\sin 2x+3\cos 4x\right)dx$

4. $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+3^x-\tan x+3x-2\right)dx$

GIẢI

1. $\int\left(\frac{1}{4}x^4+4x^3+\sqrt[3]{x^2}+x-2\right)dx=\frac{1}{20}x^5+\frac{4}{3}x^4+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{2}.x^2-2x+C$

2. $\int\left(mx^3-3x^2+\sqrt{x-1}+\frac{4m}{x^3}+\frac{5}{2x}-7m\right)dx=\frac{m}{4}x^4-x^3+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{4m}{2.x^2}-\frac{5}{2.x^2}-7mx+C$

3. $\int\left(me^x+2a^x+\log_3 x-2\sin 2x+3\cos 4x\right)dx=me^x\frac{2a^x}{\ln a}+\frac{1}{\ln 3}(x\ln x-x)+\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 4x+C$

4. $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+3^x-\tan x+3x-2\right)dx=4\sqrt{x}+\frac{3^x}{\ln 3}+\ln|\cos x|+\frac{3}{2}x^2-2x+C$

II. TRƯỜNG HỢP f(x)LÀ PHÂN THỨC HỮU TỶ : fx)=$\frac{P(x)}{Q(x)}$

* Trường hợp : Bậc của P(x) cao hơn hoặc bằng bậc của Q(x) , thì bằng phép chia đa thức ta lấy P(x) chia cho Q(x) được một đa thức A(x) và một số dư R(x) mà bậc của R(x) thấp hơn bậc của Q(x). Như vậy tích phân của A(x) ta tính được ngay (như đã trình bày ở trên). Do vậy ta chỉ ngiên cứu cách tìm nguyên hàm của f(x) trong trường hợp bậc tử thấp hơn bậc của mẫu , nghĩa là f(x) có dạng : $f(x)=\frac{R(x)}{Q(x)}$.

Trước hết ta ngiên cứu cách tìm nguyên hàm của f(x) có một số dạng đặc biệt .

1. Hàm số f(x) có dạng : $I=\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx \quad (a\neq 0)$

* Ta phân tích : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$, mà ta đã biết ở lớp 10 .

* Xét ba trường hợp của Δ. Ta sẽ có ba dạng của f(x) và ta cũng có ba cách tìm nguyên hàm gợi ý sau :

- Nếu : $\Delta<0 \to -\Delta>0 ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=\begin{cases} u=x+\frac{b}{2a};k=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ a\left(u^2+k^2\right) \end{cases}$

- Nếu : $\Delta=0 \Rightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=au^2 \quad \left(u=x+\frac{b}{2a}\right)$

- Nếu : $\Delta>0 \Rightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right) \quad \left(x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

Do vậy tích phân trên có thể giải như sau :

- Trường hợp : $\Delta<0$, thì $I=\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx=\frac{1}{a}\int\frac{1}{u^2+k^2}du.$

* Nếu đặt :

$$\begin{cases} u=\tan t \to du=\frac{1}{\cos^2 t}dt=\left(1+\tan^2 t\right)dt \\ u^2+k^2=k^2\tan^2 t+k^2=k^2\left(1+\tan^2 t\right) \end{cases} \Rightarrow I=\frac{1}{a}\int\frac{1}{u^2+k^2}du.=\frac{1}{a.k^2}\int\frac{1}{\left(1+\tan^2 t\right)}.\left(1+\tan^2 t\right)dt$$

$=\frac{1}{a.k^2}\int dt=\frac{t}{ak^2}+C$. (với : $u=\tan t \to t=\arctan u$).

- Trường hợp : Δ=0 thì : $I=\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{1}{u^2}du=-\frac{1}{u}=-\frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)}+C$.

Hay : $I=\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx=\frac{1}{a}\int\frac{1}{\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2}dx=-\frac{1}{a\left(x-\frac{b}{2a}\right)}+C$

- Trường hợp : $\Delta>0.$ thì :

$$I=\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx=\frac{1}{a}\int\frac{1}{\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}dx=\frac{1}{a\left(x_2-x_1\right)}\int\left(\frac{1}{x-x_2}-\frac{1}{x-x_1}\right)dx$$

$$\frac{1}{a\left(x_2-x_1\right)}\left(\ln\left|x-x_1\right|-\ln\left|x-x_2\right|\right)=\frac{1}{a\left(x_2-x_1\right)}\ln\left|\frac{x-x_2}{x-x_1}\right|+C.$$

Ví dụ 1. Hãy tính các tích phân sau :

a. $\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$ b. $\int\frac{1}{x^2+2x+3}dx$

GIẢI

a. $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx$. Đặt : $\left(x-\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t \to dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)dt$.

$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(1+\tan^2 t\right)+\frac{3}{4}}.\left(1+\tan^2 t\right)dt = \frac{3}{4}\int dt = \frac{3}{4}t + C$.

Với : $\left(x-\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t \Rightarrow t=\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{4x-1}\right)$

b. $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}dx.$ Đặt : $x+1=\sqrt{2}\tan t \Rightarrow dx=\sqrt{2}\left(1+\tan^2 t\right)dt$.

$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{1}{2\left(\tan^2 t+1\right)}.\left(1+\tan^2 t\right)dt = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}t + C$

Với : $x+1=\sqrt{2}\tan t \Rightarrow \tan t = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$

Ví dụ 2 . Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

a. $\int \frac{1}{x^2-4x+4}dx$ b. $\int \frac{1}{9x^2-12x+4}dx$

GIẢI

a. $\int \frac{1}{x^2-4x+4}dx = \int \frac{1}{(x-2)^2}dx = -\frac{1}{x-2}+C$

b. $\int \frac{1}{9x^2-12x+4}dx = \int \frac{1}{9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}dx = \frac{1}{9}\frac{1}{\left(x-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{9x-6}+C$

Ví dụ 3. Tìm nguyên hàm các hàm số sau

a. $\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx$ b. $\int \frac{1}{4x^2-3x-1}dx$

GIẢI

a. $\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx = \frac{1}{2-1}\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx = \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-2| - \ln|x-1| = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}+C\right|$

b. $\int \frac{1}{4x^2-3x-1}dx = \frac{1}{4}.\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{4}\right)(x-1)}dx = \frac{1}{3}\left[\int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x+\frac{1}{4}}dx\right] =$

$$\frac{1}{3}\left[\ln|x-1|-\ln\left|x+\frac{1}{4}\right|\right]=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+\frac{1}{4}}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{4(x-1)}{4x+1}\right|+C$$

2. Hàm số f(x) có dạng : $f(x)=\dfrac{\text{Ax+B}}{\text{ax}^2+bx+c}$

* Ta có hai cách tìm .

-***Cách một*** : Biến đổi tử số thành dạng : $\text{Ax+B=d(ax}^2+bx+c)+D=(2ax+b)dx+D$

+) Nếu D=0 thì : $\displaystyle\int\frac{\text{Ax+B}}{\text{ax}^2+bx+c}dx=\int\frac{\text{d}\left(\text{ax}^2+bx+c\right)}{\text{ax}^2+bx+c}=\int\frac{(2ax+b)dx}{\text{ax}^2+bx+c}=\ln\left|\text{ax}^2+bx+c\right|+C$

+)Nếu $D\neq 0$ thì : $\displaystyle\int\frac{\text{Ax+B}}{\text{ax}^2+bx+c}dx=\int\frac{\text{d}\left(\text{ax}^2+bx+c\right)}{\text{ax}^2+bx+c}=\int\frac{(2ax+b)dx}{\text{ax}^2+bx+c}+D\int\frac{1}{\text{ax}^2+bx+c}dx$

$$=\ln\left|\text{ax}^2+bx+c\right|+D\int\frac{1}{\text{ax}^2+bx+c}dx+C$$

Trong đó : $\displaystyle\int\frac{1}{\text{ax}^2+bx+c}dx$, đã biết cách tìm ở ý 1.

-***Cách hai*** :(Chỉ áp dụng cho trường hợp mẫu số có hai nghiệm thực $x_1<x_2$)

+) Ta biến đổi : $\dfrac{\text{Ax+B}}{\text{ax}^2+bx+c}=\dfrac{\text{Ax+B}}{\text{a}(\text{x-x}_1)(x-x_2)}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{M}{x-x_1}+\dfrac{N}{x-x_2}\right)$ (*)

+) Sau đó quy đồng mẫu số vế phải thành :

$$\frac{1}{a}\left(\frac{M(x-x_2)+N(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}\right)=\frac{1}{a}\frac{(M+N)x-(Mx_2+Nx_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

+) Đồng nhất hệ số hai tử số , ta có hệ : $\begin{cases}M+N=A\\-(Mx_2+Nx_1)=C\end{cases}$. Từ đó suy ra M,N

+) Thay M,N vào (*) ta tính được tích phân :

$$\int\frac{\text{Ax+B}}{\text{ax}^2+bx+c}dx=\frac{1}{a}\left[\int\frac{M}{x-x_1}dx+\int\frac{N}{x-x_2}dx\right]=\frac{M}{a}\ln|x-x_1|+\frac{N}{a}\ln|x-x_2|+C$$

* Chú ý : Ta có thể tìm M,N bằng cách khác là thay lần lượt hai nghiệm của mẫu số vào hai tử số , ta được hai phương trình .Từ hai phương trình ta suy ra M,N . Các bước tiếp theo lại làm như trên .

CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 4. Tìm nguyên hàm các hàm số sau

a. $\displaystyle\int\frac{2(x+1)}{x^2+2x-3}dx$ b. $\displaystyle\int\frac{2(x-2)dx}{x^2-4x+4}$

GIẢI

a. $\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x-3}dx = \int \frac{d\left(x^2+2x-3\right)}{x^2+2x-3} = \ln\left|x^2+2x-3\right|+C$

b. $\int \frac{2\left(x-2\right)dx}{x^2-4x+3} = \int \frac{2x-4dx}{x^2-4x+3} = \int \frac{d\left(x^2-4x+3\right)}{x^2-4x+3} = \ln\left|x^2-4x+3\right|+C$

Ví dụ 5. Tìm nguyên hàm các hàm số sau

a. $\int \frac{3x+2}{x^2+2x-3}dx$ b. $\int \frac{2x-3}{x^2+4x+4}dx$

GIẢI

a.Cách 1.

Ta có : $\frac{3x+2}{x^2+2x-3} = \frac{E\left(2x+2\right)+D}{x^2-2x-3} = \frac{2E+D+2E}{x^2-2x+3}$. Đồng nhất hệ số hai tử số ta có hệ phương trình : $\begin{cases} 2E=3 \\ D+2E=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E=\frac{3}{2} \\ D=-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3x+2}{x^2-2x-3} = \frac{\frac{3}{2}\left(2x+2\right)}{x^2-2x-3} - \frac{1}{x^2-2x+3}$.

Vậy : $\int \frac{3x+2}{x^2+2x-3}dx = \frac{3}{2}\int \frac{d\left(x^2+2x-3\right)}{x^2+2x-3} + \int \frac{1}{x^2+2x-3}dx = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x-3\right| + J\left(1\right)$

Tính :J=$\int \frac{1}{x^2+2x-3}dx = \frac{1}{4}\left(\int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x+3}dx\right) = \frac{1}{4}\ln\left|x-1\right| - \ln\left|x+3\right| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C$

Do đó : $\int \frac{3x+2}{x^2+2x-3}dx = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x-3\right| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C$

-Cách 2.

Ta có :

+) $\frac{3x+2}{x^2+2x-3} = \frac{3x+2}{\left(x-1\right)\left(x+3\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A\left(x+3\right)+B\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)\left(x+3\right)}\left(*\right) = \frac{\left(A+B\right)x+3A-B}{\left(x-1\right)\left(x+3\right)}$

Đồng nhất hệ số hai tử số ta có hệ : $\begin{cases} A+B=3 \\ 3A-B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{5}{4} \\ B=\frac{7}{4} \end{cases}$

Suy ra : $\frac{3x+2}{x^2+2x-3} = \frac{5}{4}.\frac{1}{\left(x+1\right)} + \frac{7}{4}.\frac{1}{\left(x+3\right)}$

Vậy : $\int \frac{3x+2}{x^2+2x-3}dx = \frac{5}{4}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{7}{4}\int \frac{1}{x+3}dx = \frac{5}{4}\ln\left|x+1\right| + \frac{7}{4}\ln\left|x+3\right| + C$.

+) Phân tích f(x) đễn (*) .Sau đó thay hai nghiệm x=1 và x=3 vào hai tử số để tìm A,B , cụ thể ta có hệ hai phương trình sau : $\begin{cases} 3.1+2=A(1+3) \\ 3(-3)+2=B(-3-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{5}{4} \\ B=\dfrac{7}{4} \end{cases}$

Các bước tiếp theo giống như trên .

b..Ta có : $\dfrac{2x-3}{x^2+4x+4}=\dfrac{E(2x+4)+D}{x^2+4x+4}=\dfrac{2Ex+D+4E}{x^2+4x+4}$. Đồng nhất hệ số hai tử số :

Ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2E=2 \\ D+4E=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E=1 \\ D=-7 \end{cases}$

Suy ra : $\dfrac{2x-3}{x^2+4x+4}=\dfrac{2x+4}{x^2+4x+4}-\dfrac{7}{x^2+4x+4}$.

Vậy : $\int\dfrac{2x-3}{x^2+4x+4}dx=\int\dfrac{2x+4}{x^2+4x+4}dx-7\int\dfrac{1}{(x+2)^2}dx=\ln\left|x^2+4x+4\right|+\dfrac{7}{x+2}+C$

3. TỔNG QUÁT :

a. Trường hợp mẫu số không có nghiệm thực có nghiệm thực (Tức là mẫu số vô nghiệm).

* Ta phân tích như ở ví dụ 5- cách 1

b. Trường hợp mẫu số có nhiều nghiệm thực đơn

* Ta phân tích giống như ví dụ 5a- cách 2.

c. Trường hợp mẫu số có cả trường hợp không có nghiệm thực và trường hợp có nhiều nghiệm thực đơn .

* Ta sử dụng cả hai phương pháp trên .

CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 6. Tìm nguyên hàm các hàm số sau

a. $\int\dfrac{3x^2+3x+12}{(x-1)(x+2)x}dx$ b. $\int\dfrac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$

GIẢI

a.Ta phân tích f(x)= $\dfrac{3x^2+3x+12}{(x-1)(x+2)x}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x}=\dfrac{Ax(x+2)+Bx(x-1)+C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)x}$.

Bằng cách thay các nghiệm thực của mẫu số vào hai tử số ta có hệ :

$$\begin{cases} x=1\rightarrow 18=3A\Leftrightarrow A=6 \\ x=-2\rightarrow 18=6B\Leftrightarrow B=3 \\ x=0\rightarrow 12=-2C\Leftrightarrow C=-6 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{6}{x-1}+\frac{3}{x+2}-\frac{6}{x}$$

Vậy : $\int \frac{3x^2+3x+12}{(x-1)(x+2)x}dx = \int\left(\frac{6}{x-1}+\frac{3}{x+2}-\frac{6}{x}\right)dx = 6\ln|x-1|+3\ln|x+2|-6\ln|x|+C$

b. Ta phân tích

f(x)=$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4} = \frac{A(x-2)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-4)}$

Bằng cách thay các nghiệm của mẫu số vào hai tử số ta có hệ :

$$\begin{cases} x=1 \to 9A=3 \Leftrightarrow x=3 \\ x=2 \to 14=-2B \Leftrightarrow x=-7 \Rightarrow f(x)=\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4} \\ x=4 \to 30=6C \Leftrightarrow C=5 \end{cases}$$

Vậy $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx = \int\left(\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4}\right)dx = 3\ln|x-1|-7\ln|x-2|+5\ln|x-4|+C$

Ví dụ 7. Tìm nguyên hàm các hàm số sau

a. $\int \frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)}dx$ b. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$

GIẢI

a. Trong trường hợp này ,mẫu số chứa các biểu thức có nghiệm thực và không có nghiệm thực . Các em hãy chú ý đến cách phân tích sau .

Ta có f(x)=$\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+1)}(1)$.

Thay x=1 vào hai tử ta được : 2= 2A, cho nên A=1.

Do đó (1) trở thành : $\frac{1(x^2+1)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{(B+1)x^2+(C-B)x+1-C}{(x-1)(x^2+1)}$.

Đồng nhất hệ số hai tử số , ta có hệ : $\begin{cases} B+1=1 \\ C-B=2 \\ 1-C=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=0 \\ C=2 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x^2+1}$

Vậy : $\int \frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)}dx = \int\frac{1}{x-1}dx + 2\int\frac{1}{x^2+1}dx = \ln|x+1|+2J+C(2)$

* Tính J =$\int\frac{1}{x^2+1}dx$. Đặt : $\begin{cases} x=\tan t \to dx=(1+\tan^2 t)dt \\ 1+x^2=1+\tan^2 t \end{cases}$.

Cho nên : $\int\frac{1}{x^2+1}dx = \int\frac{1}{1+\tan^2 t}.(1+\tan^2 t)dt = \int dt = t; do: x=\tan t \Rightarrow t=\arctan x$

Do đó , thay tích phân J vào (2) ta có : $\int \frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)}dx = \ln|x-1| + \text{arctanx+C}$

b.Ta phân tích f(x)=$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+3}$

$$= \frac{A(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)^2(x+3)+D(x-1)^3}{(x-1)^3(x+3)}$$

Thay x=1 và x=-3 vào hai tử số ta được : $\begin{cases} x=1 \to 2=4A \to A=\frac{1}{2} \\ x=-3 \to 10=-64D \to D=-\frac{5}{32} \end{cases}$

Thay hai giá trị của A và D vào (*) và đồng nhất hệ số hai tử số ta có hệ hai phương trình

$$\begin{cases} 0=C+D \Rightarrow C=-D=\frac{5}{32} \\ 1=3A-3B+3C-D \Rightarrow B=\frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{3}{8(x-1)^2} + \frac{5}{32(x-1)} - + \frac{5}{32(x+3)}$$

Vậy : $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx = \int\left(\frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{3}{8(x-1)^2} + \frac{5}{32(x-1)} - + \frac{5}{32(x+3)}\right)dx$

$$= -\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32}\ln|x-1| - \frac{5}{32}\ln|x+3| + C = -\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C$$

III. . NGUYÊN HÀM CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC .

Để xác định nguyên hàm các hàm số lượng giác ta cần linh hoạt lựa chọn một trong các phương pháp cơ bản sau :
1. Sử dụng dạng nguyên hàm cơ bản .
2. Sử dụng phương pháp biến đổi lượng giác đưa về các nguyên hàm cơ bản
3. Phương pháp đổi biến
4. Phương pháp tích phân từng phần

A. SỬ DỤNG CÁC DẠNG NGUYÊN HÀM CƠ BẢN .

BÀI TOÁN 1.

Xác định nguyên hàm các hàm số lượng giác

bằng việc sử dụng các nguyên hàm cơ bản

Dạng 1.: Tính tích phân bất định : $I=\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$

Ta thực hiện theo các bước sau :

- Bước 1: Sử dụng đồng nhất thức :
$1=\frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)}=\frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{(a-b)}$
- Bước 2: Ta được :

$$I=\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}=\frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin[(x-a)-(x-b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin(x+a)\cos(\text{x-b})-\sin(x-b)\cos(\text{x-a})}{\sin(\text{x+a})\sin(x+b)}dx$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\left[\int \frac{\cos(\text{x+b})}{\sin(x+b)}dx-\frac{\cos(\text{x+a})}{\sin(\text{x+a})}dx\right]=\frac{1}{\sin(a-b)}\left[\ln|\sin(x+b)|-\ln|\sin(x+a)|\right]$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C$$

* Chú ý Phương pháp trên cũng được áp dụng cho các dạng tích phân sau :

1. $I=\int \frac{dx}{\cos(\text{x+a})\cos(\text{x+b})}$, sử dụng đồng nhất thức : $1=\frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)}$
2. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(\text{x+b})}$, sử dụng đồng nhất thức : $1=\frac{\cos(\text{a-b})}{\cos(\text{a-b})}$.

Ví dụ 1 . Tìm họ nguyên hàm của hàm số : $f(x)=\frac{1}{\text{cosx.cos}\left(\text{x+}\frac{\pi}{4}\right)}$.

Giải

- *Cách 1*. Sử dụng đồng nhất thức : $1=\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\cos\left[\left(\text{x+}\frac{\pi}{4}\right)-x\right]}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\cos\left[\left(\text{x+}\frac{\pi}{4}\right)-x\right]$

Ta có : $F(x)=\sqrt{2}\int\frac{\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-x\right]}{\sin x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx=\sqrt{2}\int\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos x+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin x}{\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx$

$$=\sqrt{2}\left[\int\frac{\cos x}{\sin x}dx+\int\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx\right]=\sqrt{2}\left[\ln|\sin x|-\ln\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]=\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sin x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\right|+C$$

- *Cách 2* : Dựa trên đặc thù của hàm số f(x)

Ta có :

$$F(x)=\int\frac{1}{\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx=\sqrt{2}\int\frac{1}{\sin x(\sin x-\cos x)}dx=\sqrt{2}\int\frac{1}{\sin^2x\left(1-\frac{\cos x}{\sin x}\right)}dx=\sqrt{2}\int\frac{1}{\sin^2x(\cot x-1)}dx$$

$$=-\sqrt{2}\int\frac{d(\cot x)}{\cot x-1}=-\sqrt{2}\int\frac{d(\cot x-1)}{\cot x-1}=-\sqrt{2}\ln|\cot x-1|+C$$

Dạng 2: Tính tích phân bất định : $I=\int\frac{dx}{\sin x+\sin\alpha}$

Ta thực hiện theo các bước sau :

- Bước 1. Biến đổi I về dạng :
- Bước 2: Áp dụng bài toán 1 để giải (1)

* Chú ý : Phương pháp trên cũng áp dụng cho các dạng tích phân sau :

1. $I=\int\frac{dx}{\sin x+m};\quad |m|\le 1$.
2. $I=\int\frac{dx}{\cos x+m}\vee I=\int\frac{dx}{\cos x+\cos\alpha};\quad |m|\le 1$

Ví dụ 2: Tìm họ nguyên hàm của hàm số : $f(x)=\frac{1}{2\sin x+1}$

Giải

Biến đổi f(x) về dạng :

$$f(x)=\frac{1}{2\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sin x+\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{4}.\frac{1}{\sin\frac{6x+\pi}{12}.\cos\frac{6x-\pi}{12}}(1)$$

Sử dụng đồng nhất thức :

$$1=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\cos\left[\frac{6x+\pi}{12}-\frac{6x-\pi}{12}\right]}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\cos\left(\frac{6x+\pi}{12}\right).\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}.$$

Ta được :

$$F(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\int\frac{\cos\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)}dx-\int\frac{\sin\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}dx\right]=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\ln\left|\sin\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)\right|-\ln\left|\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)\right|\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{6x+\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{6x-\pi}{12}\right)}\right|+C.$$

Dạng 3: Tính tích phân bất định : $I=\int \tan x.\tan(x+\alpha)dx$

Ta thực hiện theo các bước sau :

- Bước 1: Biến đổi I về dạng :

$$I=\int\left(\frac{\sin x\sin(x+\alpha)+\cos x\cos(x+\alpha)}{\cos x\cos(x+\alpha)}-1\right)dx=\left(\int\frac{\cos\alpha}{\cos x\cos(x+\alpha)}dx-\int dx\right)$$

$$=\cos\alpha\int\frac{1}{\cos x.\cos(x+\alpha)}dx-x \quad (1)$$

- Bước 2 : Áp dụng bài toán 1 để giải (1)

* Chú ý : Phương pháp trên cũng được áp dụng đẻ giải các tích phân dạng :

1. $I=\int\tan(x+\alpha)\cot(x+\beta)dx$
2. $I=\int\cot(x+\alpha)\cot(x+\beta)dx$

Ví dụ 3. Tìm họ nguyên hàm của hàm số sau : $I=\int \tan x.\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$

Giải :

Ta biến đổi f(x) về dạng :

$$f(x)=\frac{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}-1=\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}-1$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx-\int dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx-x \quad (1)$$

Để tính : $J=\int\frac{dx}{\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx$. Ta lựa chọn hai cách sau :

- Cách 1: Sử dụng dạng toán cơ bản .

Sử dụng đồng nhất thức :

$$1=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-x\right]}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos x\text{-}\sin x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Ta được : $J=\sqrt{2}\int\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos x\text{-}\sin x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx=\sqrt{2}\left[\int\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx\right]$

$$=\sqrt{2}\left(-\ln\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\ln|\cos x|\right)=\sqrt{2}\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+)}\right|+C$$

- Cách 2. Dựa trên đặc thù của hàm số dưới dấu tích phân .

Ta có : $J=\int\frac{1}{\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx=\sqrt{2}\int\frac{1}{\cos x(\cos x\text{-}\sin x)}dx=\sqrt{2}\int\frac{1}{(1-\tan x)}.\frac{1}{\cos^2 x}dx$

$$=-\sqrt{2}\int\frac{d(1-\tan x)}{1\text{-}\tan x}=-\sqrt{2}\ln|1-\tan x|+C.$$

Dạng 4. Tính tích phân bất định : $I=\int\frac{1}{a.\sin x+b.\cos x}dx$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

- Ta có thể lựa chọn hai cách biến đổi

Cách 1: Ta có .

$$I=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\sin\left(x+\alpha\right)}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{2\sin\frac{x+\alpha}{2}.\cos\frac{x+\alpha}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{2\tan\frac{x+\alpha}{2}}.\frac{1}{\cos^2\frac{x+\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{d\left(\tan\frac{x+\alpha}{2}\right)}{\tan\frac{x+\alpha}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\alpha}{2}\right|+C$$

Chú ý : Chúng ta cũng có thể thực hiện bằng phương pháp đại số hóa với việc đổi biến số bằng cách đặt $t=\tan\frac{x}{2}$.

Ví dụ 4: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2}{\sqrt{3}\,\mathrm{sinx+cosx}}$

Giải

Ta có : $F(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{3}\,\mathrm{sinx+cosx}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sinx}+\frac{1}{2}\mathrm{cosx}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

$$=\int\frac{dx}{2\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)}=\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)}=\int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)}=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\right|+C$$

<u>Dạng 5</u>: Tính tích phân bất định sau : $I=\int\frac{a_1\,\mathrm{sinx}+b_1\mathrm{cosx}}{a_2\,\mathrm{sinx}+b_2\mathrm{cosx}}dx$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau :

- Bước 1: Biến đổi : $a_1\,\mathrm{sinx}+b_1\mathrm{cosx}=A\left(a_2\,\mathrm{sinx}+b_2\mathrm{cosx}\right)+B\left(a_2\mathrm{cosx}-b_2\,\mathrm{sinx}\right)$
- Bước 2: Khi đó

$$I=\int\frac{A\left(a_2\,\mathrm{sinx}+b_2\mathrm{cosx}\right)+B\left(a_2\mathrm{cosx}-b_2\,\mathrm{sinx}\right)}{a_2\,\mathrm{sinx}+b_2\mathrm{cosx}}dx=A\int dx+B\int\frac{d\left(a_2\,\mathrm{sinx}+b_2\mathrm{cosx}\right)}{a_2\,\mathrm{sinx}+b_2\mathrm{cosx}}$$

$$=\mathrm{Ax}+\mathrm{B}\ln\left|a_2\,\mathrm{sinx}+b_2\mathrm{cosx}\right|+C$$

Ví dụ 5: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\int\frac{4\sin x+3\cos x}{\mathrm{sinx}+2\mathrm{cosx}}dx$

Giải

Biến đổi : $4\sin x+3\cos x=A(\mathrm{sinx}+2\mathrm{cosx})+B(\mathrm{cosx}-2\mathrm{sinx})=(A-2B)\mathrm{sinx}+(2A+B)\mathrm{cosx}$.

Đồng nhất hệ số hai tử số ,ta được : $\begin{cases} A-2B=4 \\ 2A+B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases}$

Khi đó : $f(x)=\dfrac{2(\text{sinx+2cosx})-(\text{cosx-2sinx})}{\text{sinx+2cosx}}=2-\dfrac{\text{cosx-2sinx}}{\text{sinx+2cosx}}$

Do đó :

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\left(2-\frac{\text{cosx-2sinx}}{\text{sinx+2cosx}}\right)dx=2\int dx-\int\frac{(\text{cosx-2sinx})dx}{\text{sinx+2cosx}}=2x-\ln|\text{sinx+2cosx}|+C$$

Dạng 6. Tính tích phân bất định : $I=\int\dfrac{a_1\text{sinx}+b_1\text{cosx}}{(a_2\text{sinx}+b_2\text{cosx})^2}dx$

Ta thực hiện theo các bước sau :

- Bước 1. Biến đổi : $a_1\text{sinx}+b_1\text{cosx}=A(a_2\text{sinx}+b_2\text{cosx})+B(a_2\text{cosx}-b_2\text{sinx})$.
- Bước 2. Khi đó :

$$I=\int\frac{A(a_2\text{sinx}+b_2\text{cosx})+B(a_2\text{cosx}-b_2\text{sinx})}{(a_2\text{sinx}+b_2\text{cosx})^2}dx=A\int\frac{dx}{a_2\text{cosx}+b_2\text{sinx}}+B\int\frac{(a_2\text{cosx}-b_2\text{sinx})dx}{(a_2\text{cosx}+b_2\text{sinx})^2}$$

$$=\frac{A}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\int\frac{dx}{\sin(x+\alpha)}-B\int\frac{1}{a_2\text{sinx}+b_2\text{cosx}}dx=\frac{A}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)\right|-\frac{B}{a_2\text{cosx}+b_2\text{sinx}}+C$$

Trong đó : $\sin\alpha=\dfrac{b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}};\quad \cos\alpha=\dfrac{a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

Ví dụ 6 : Tìm nguyên hàm của hàm số sau : $f(x)=\dfrac{8\cos x}{2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x}$.

Giải

Biến đổi : $f(x)=\dfrac{8\cos x}{3\sin^2 x+2\sqrt{3}\text{sinxcosx}+\cos^2 x}=\dfrac{8\cos x}{(\sqrt{3}\text{sinx+cosx})^2}$

Giả sử : $8\cos x=a(\sqrt{3}\text{sinx+cosx})+b(\sqrt{3}\text{cosx-sinx})=(a\sqrt{3}-b)\text{sinx}+(a+b\sqrt{3})\text{cosx}$.

Đồng nhất hệ số hai tử số ta có hệ : $\begin{cases} a\sqrt{3}-b=0 \\ a+b\sqrt{3}=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2\sqrt{3} \end{cases}$

Khi đó : $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3}\text{sinx+cosx}}-\dfrac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}\text{cosx-sinx})}{\sqrt{3}\text{sinx+cosx}}$

Do đó : $F(x)=\int\frac{2dx}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}-2\sqrt{3}\int\frac{\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)dx}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\right|-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}+C$

Chú ý : Trong ví dụ trên ta lấy kết quả ví dụ 4 cho : $\int\frac{2dx}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}$.

Dạng 7. Tính tích phân bất định : $I=\int\frac{1}{a\sin x+b\cos x+c}dx$.

Ta xét ba khả năng :

1. Nếu $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

Ta thực hiện phép biến đổi : $\frac{1}{a\sin x+b\cos x+c}=\frac{1}{c\left[1+\cos(x-\alpha)\right]}=\frac{1}{2c}.\frac{1}{\cos^2\frac{x-\alpha}{2}}$

Trong đó : $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad \cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Khi đó : $I=\frac{1}{2c}\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x-\alpha}{2}}=\frac{1}{c}\tan\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)+C$

2. Nếu : $c=-\sqrt{a^2+b^2}$

Ta thực hiện phép biến đổi : $\frac{1}{a\sin x+b\cos x+c}=\frac{1}{c\left[1-\cos(x-\alpha)\right]}=\frac{1}{2c}.\frac{1}{\sin^2\frac{x-\alpha}{2}}$

Trong đó : $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad \cos\alpha=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Khi đó : $I=\frac{1}{2c}\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x-\alpha}{2}}=\frac{1}{c}\cot\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)+C$

3. Nếu : $c\neq\sqrt{a^2+b^2}$

Ta thực hiện phép biến đổi bằng cách đổi biến số : $t=\tan\frac{x}{2}$.

Khi đó : $\begin{cases} dx=\frac{2dt}{1+t^2}. \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\tan x=\frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$,

thay vào tích phân đã cho $\Rightarrow I=\int f(t)dt$.

Ví dụ 7. Tính tích phân sau : $I=\int\frac{2dx}{2\sin x-\cos x+1}$.

Giải

Đặt : $t=\tan\frac{x}{2}\to dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

Khi đó : $I=\int\frac{4\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}=\int\frac{2dt}{t^2+2t}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\ln\left|\frac{t}{t+2}\right|+C=\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+2}\right|+C$

Dạng 8. Tính tích phân bất định : $I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}dx$.

Ta thực hiện theo các bước sau :

- Bước 1. Biến đổi :

$a_1\sin x+b_1\cos x+c_1=A\left(a_2\sin x+b_2\cos x+c_2\right)+B\left(a_2\cos x-b_2\sin x\right)+C$

- Bước 2 : Khi đó :

$I=\int\frac{A\left(a_2\sin x+b_2\cos x+c_2\right)+B\left(a_2\cos x-b_2\sin x\right)+C}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}$

$=A\int dx+B\int\frac{\left(a_2\cos x-b_2\sin x\right)dx}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}+C\int\frac{dx}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}$

$=Ax+B\ln\left|a_2\sin x+b_2\cos x+c_2\right|+C\int\frac{dx}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}$.

Trong đó : $\int\frac{dx}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}$, được xác định ở dạng 4.

Ví dụ 8 : Tìm họ nguyên hàm của hàm số : $f(x)=\frac{5\sin x}{2\sin x-\cos x+1}$.

Giải

Biến đổi : $5\sin x=a\left(2\sin x-\cos x+1\right)+b\left(2\cos x+\sin x\right)+c=\left(2a+b\right)\sin x+\left(2b-a\right)\cos x+a+c$

Đồng nhất hệ số hai tử số : $\begin{cases}2a+b=5\\2b-a=0\\a+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\\c=-2\end{cases}$

Khi đó : $f(x)=\frac{2\left(2\sin x-\cos x+1\right)+\left(2\cos x+\sin x\right)-2}{2\sin x-\cos x+1}=2+\frac{2\cos x+\sin x}{2\sin x-\cos x+1}-\frac{2}{2\sin x-\cos x+1}$

Do vậy : $I=2\int dx+\int\frac{\left(2\cos x+\sin x\right)dx}{2\sin x-\cos x+1}-2\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+1}=2x+\ln\left|2\sin x-\cos x+1\right|-2J+C$

Với : $J=\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+1}$. (Tích phân này đã giải ở ví dụ 7)

Dạng 9: Tính tích phân bất định : $I=\int\frac{a_1\sin^2x+b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x}{a_2\sin x+b_2\cos x}dx$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau :

- Bước 1 : Biến đổi :

$$a_1\sin^2x+b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x=(A\sin x+B\cos x)(a_2\sin x+b_2\cos x)+C(\sin^2x+\cos^2x)$$

- Bước 2 : Khi đó :

$$I=\int\frac{(A\sin x+B\cos x)(a_2\sin x+b_2\cos x)+C(\sin^2x+\cos^2x)}{a_2\sin x+b_2\cos x}=\int(A\sin x+B\cos x)+C\int\frac{dx}{a_2\sin x+b_2\cos x}$$

$$=-A\cos x+B\sin x+\frac{C}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\int\frac{dx}{\sin(x+\alpha)}=-A\cos x+B\sin x+\frac{C}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\alpha}{2}\right|+C$$

Trong đó : $\sin\alpha=\frac{b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$; $\cos\alpha=\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

Ví dụ 9 : Tìm họ nguyên hàm của hàm số : $f(x)=\frac{4\sin^2x+1}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}$.

Giải

Biến đổi : $4\sin^2x+1=5\sin^2x+\cos^2x=(a\sin x+b\cos x)(\sqrt{3}\sin x+\cos x)+c(\sin^2x+\cos^2x)$

$$=(a\sqrt{3}+c)\sin^2x+(a+b\sqrt{3})\sin x.\cos x+(b+c)\cos^2x.$$

Đồng nhất hệ số hai tử số : $\begin{cases}a\sqrt{3}+c=5\\a+b\sqrt{3}=0\\b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\sqrt{3}\\b=-1\\c=2\end{cases}$.

Do đó : $I=\int(\sqrt{3}\sin x-\cos x)dx-\int\frac{2dx}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}=-\sqrt{3}\cos x-\sin x-\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\right|+C$.

Chú ý : Ở ví dụ 4 , ta có : $\int\frac{2dx}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\right|$

Dạng 10. Tính tích phân bất định : $I=\int\frac{dx}{a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x}$

Ta thực hiện theo các bước sau :

- Bước 1 : Biến đổi I về dạng : $I=\int\frac{dx}{(a\tan^2x+b\tan x+c)\cot^2x}$
- Bước 2: Thực hiện phép đổi biến số :

$$t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{1}{\cos^2x}dx=(1+\tan^2x)dx=(1+t^2)dx\leftrightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

Khi đó : $I=\int\frac{dt}{at^2+bt+c}$. (Ta đã có cách giải ở phần " Hàm phân thức ")

Ví dụ 10: Tính tích phân bất định : $I=\int \frac{dx}{3\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x}$

Giải

Ta có : $I=\int \frac{dx}{\left(3\tan^2 x-2\tan x-1\right)\cos^2 x}=\int \frac{d\left(\tan x\right)}{3\tan^2 x-2\tan x-1}$.

Đặt : $t=\tan x \Rightarrow I=\int \frac{dt}{3t^2-2t-1}=\frac{1}{3}.\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+\frac{1}{3}}\right)dt=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+\frac{1}{3}}\right|=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3t-3}{3t+1}\right|+C$

Thay trả lại : $t=\tan x \Rightarrow I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3\tan x-3}{3\tan x+1}\right|+C$.

B. SỬ DỤNG PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC ĐƯA VỀ CÁC NGUYÊN HÀM CƠ BẢN.

Bài toán 2:
Xác định nguyên hàm các hàm số lượng giác bằng các phép biến đổi lượng giác

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng phép biến đổi lượng giác , đưa biểu thức dưới dấu tích phân về dạng quen thuộc . Các phép biến đổi lượng giác bao gồm :

- Phép biến đổi : Tích thành tổng (Chúng ta đã thấy ở bài toán 1)
- Hạ bậc : $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$.
- Các kỹ thuật biến đổi khác .

<u>1. Sử dụng phương pháp biến đổi : Tích sang tổng .</u>

Ở đây chúng ta sử dụng các công thức :

a. $\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left(\cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)\right)$

b. $\sin x\sin y=\frac{\cos\left(x-y\right)-\cos\left(x+y\right)}{2}$

c. $\sin x\cos y=\frac{\sin\left(x+y\right)+\sin\left(x-y\right)}{2}$

d. $\cos x\sin y=\frac{\sin\left(x+y\right)-\sin\left(x-y\right)}{2}$

Sau đó sử dụng công thức nguyên hàm : $\int\cos\left(ax+b\right)dx=\frac{1}{a}\sin\left(ax+b\right)+C$.

Ví dụ 11. Tìm nguyên hàm của hàm số : $f(x)=\cos3x\cos5x$

Giải

Ta biến đổi : $f(x)=\cos3x\cos5x=\dfrac{\cos8x+\cos2x}{2}=\dfrac{1}{2}\cos8x+\dfrac{1}{2}\cos2x$

Khi đó : $I=\int f(x)dx=\dfrac{1}{2}\int\cos8xdx+\dfrac{1}{2}\int\cos2xdx=\dfrac{1}{16}\sin8x+\dfrac{1}{4}\sin2x+C$

Ví dụ 12. Tìm họ nguyên hàm của hàm số : $f(x)=\tan x.\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$

Giải

Ta biến đổi : $f(x)=\tan x.\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)=\dfrac{\sin x.\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)}{\cos x.\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)}$

$$=\frac{\sin x.\left(\cos2x-\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)}{\cos x\left(\cos2x+\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)}=\frac{\cos2x.\sin x+\dfrac{1}{2}\sin x}{\cos2x.\cos x-\dfrac{1}{2}\cos x}=\frac{\dfrac{1}{2}(\sin3x-\sin x)+\dfrac{1}{2}\sin x}{\dfrac{1}{2}(\cos3x+\cos x)-\dfrac{1}{2}\cos x}=\frac{\sin3x}{\cos3x}$$

Khi đó : $I=\int f(x)dx=\int\dfrac{\sin3x}{\cos3x}dx=\dfrac{1}{3}\int\dfrac{3\sin3x}{\cos3x}dx=-\dfrac{1}{3}\int\dfrac{d(\cos3x)}{\cos3x}=-\dfrac{1}{3}\ln|\cos3x|+C$

<u>2. Sử dụng công thức hạ bậc :</u>

Ta nhớ lại các công thức sau :

a. $\cos^2x=\dfrac{1+\cos2x}{2}$; $\sin^2x=\dfrac{1-\cos2x}{2}$.

b. $\sin^3x=\dfrac{3\sin x-\sin3x}{4}$

c. $\cos^3x=\dfrac{3\cos x+\cos3x}{4}$

d. $\sin^4x+\cos^4x=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos4x$

e. $\cos^6x+\sin^6x=1-\dfrac{3}{4}\sin^22x=1-\dfrac{3}{8}(1-\cos4x)=\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\cos4x$

Ví dụ 13. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số :

a. $f(x)=\sin^3x.\sin3x$

b. $f(x)=\sin^3x.\cos3x+\cos^3x.\sin3x$

Giải

a. Ta có : $f(x)=\sin^3 x.\sin 3x=\sin 3x\left(\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}\right)=\frac{3}{4}\sin 3x.\sin x-\frac{1}{4}\sin^2 3x$

$=\frac{3}{8}(\cos 2x-\cos 4x)-\frac{1}{8}(1-\cos 6x)=\frac{3}{8}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 6x-\frac{3}{8}\cos 4x-\frac{1}{8}$.

Do đó : $I=\int f(x)dx=\int\left(\frac{3}{8}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 6x-\frac{3}{8}\cos 4x-\frac{1}{8}\right)dx=\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{1}{48}\sin 6x-\frac{3}{32}\sin 4x-\frac{1}{8}x+C$

b.Ta biến đổi : $f(x)=\sin^3 x.\cos 3x+\cos^3 x.\sin 3x=\cos 3x\left(\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}\right)+\sin 3x\left(\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}\right)$

$=\frac{3}{4}(\cos 3x\sin x+\sin 3x\cos x)=\frac{3}{4}\sin 4x$

Do đó : $I=\int f(x)dx=\frac{3}{4}\int\sin 4x dx=-\frac{3}{16}\cos 4x+C$

<u>3. Sử dụng nhiều phép biến đổi khác nhau .</u>

Trong phương pháp này dòi hỏi HS cần linh hoạt vận dụng các công thức lượng giác . Ngoài ra còn biết cách định hướng để biến đổi sao cho sử dụng được bảng nguyên hàm .

Ví dụ 14. Tìm họ nguyên hàm của hàm số : $f(x)=\frac{\sin 3x.\sin 4x}{\tan x+\cot 2x}$

Giải :

Ta biến đổi : $f(x)=\frac{\sin 3x.\sin 4x}{\tan x+\cot 2x}=\frac{\sin 3x\sin 4x}{\frac{\sin x.\sin 2x+\cos x.\cos 2x}{\cos x.\sin 2x}}=\frac{\sin 3x.\sin 4x}{\frac{\cos x}{\cos x.\sin 2x}}=\sin 3x.\sin 4x.\sin 2x$

$=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 7x)\sin 2x=\frac{1}{2}[\sin 2x.\cos x-\cos 7x\sin 2x]=\frac{1}{4}(\sin 3x+\sin x-\sin 9x+\sin 5x)$.

Do đó : $I=\int\left(\frac{1}{4}(\sin 3x+\sin x-\sin 9x+\sin 5x)\right)dx=-\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{1}{4}\cos x+\frac{1}{9}\cos 9x-\frac{1}{5}\cos 5x+C$.

PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Phương pháp đổi biến số được sử dụng khá phổ biến trong việc tính các tích phân bất định . Phương pháp đổi biến số để xác định nguyên hàm có hai dạng dựa trên định lý sau :

a/ Nếu : $\int f(x)=F(x)+C$ và với u=φ(x) là hàm số có đạo hàm thì : $\int f(u)du=F(u)+C$

b/ Nếu hàm số f(x) liên tục thì đặt x=$\varphi(t)$. Trong đó $\varphi(t)$ cùng với đạo hàm của nó ($\varphi'(t)$ là những hàm số liên tục) thì ta được : $\int f(x)dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=\int g(t)dt=G(t)+C$.

Từ đó ta trình bày hai bài toán về phương pháp đổi biến số như sau :

Bài toán 1:

Sử dụng phương pháp đổi biến số dạng 1 tính tích phân bất định : $I=\int f(x)dx$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau :

- Bước 1: chọn x=$\varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp .
- Bước 2: lấy vi phân hai vế : $dx=\varphi'(t)dt$
- Bước 3 : Biến đổi : $f(x)dx=f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=g(t)dt$
- Bước 4: Khi đó tính : $\int f(x)dx=\int g(t)dt=G(t)+C$.

* *Lưu ý* : Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là :

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\lvert a\rvert\sin t \leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2} \\ x=\lvert a\rvert\cos t\leftrightarrow 0\le t\le\pi\end{array}\right.$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\lvert a\rvert}{\sin t}\leftrightarrow t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x=\frac{\lvert a\rvert}{\cos t}\leftrightarrow t\in[0;\pi]\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\end{array}\right.$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\lvert a\rvert\tan t\leftrightarrow t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \\ x=\lvert a\rvert\cot t\leftrightarrow t\in(0;\pi)\end{array}\right.$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\vee\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	x=a.cos2t
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	x=a+$(b-a)\sin^2 t$

Ví dụ 1. Tính tích phân bất định

a/ $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ b/ $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

Giải

a/ Đặt : x=sint ; t$\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=\cos t dt$

Suy ra : $\dfrac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}=\dfrac{\text{costdt}}{\sqrt{\left(1\text{-}\sin^2 t\right)^3}}=\dfrac{\text{costdt}}{\cos^3 t}=\dfrac{dt}{\cos^2 t}=d\left(\tan t\right).$

Khi đó : $\int\dfrac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}=\int d\left(\tan t\right)=\tan t+C=\dfrac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$

b/ Vì : $x^2+2x+3=\left(x+1\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$, nên

Đặt : $x+1=\sqrt{2}\tan t;t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=\sqrt{2}.\dfrac{dt}{\cos^2 t};\tan t=\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$

Suy ra : $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\dfrac{dx}{\sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}=\dfrac{dt}{\sqrt{2\left(\tan^2 t+1\right)}.\cos^2 t}=\dfrac{dt}{\sqrt{2}\text{cost}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\dfrac{\text{costdt}}{1\text{-}\sin^2 t}$

$=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}.\left(\dfrac{\text{costdt}}{\text{sint-1}}-\dfrac{\text{costdt}}{\text{sint+1}}\right).$

Khi đó : $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\dfrac{\text{costdt}}{\text{sint-1}}-\dfrac{\text{costdt}}{\text{sint+1}}\right)=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sin t-1}{\sin t+1}\right|+C\,(*)$

Từ : $\tan t=\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\tan^2 t=\dfrac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t}=\dfrac{\left(x+1\right)^2}{2}\Rightarrow\sin^2 t=1-\dfrac{2}{x^2+2x+3}$. Ta tìm được sint , thay vào (*) ta tính được I .

Ví dụ 2: Tính tích phân bất định : $I=\int\dfrac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Giải

Vì điều kiện : $|x|>1$, nên ta xét hai trường hợp :

- Với x>1

  Đặt $x=\dfrac{1}{\sin 2t};t\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow dx=-\dfrac{2\cos 2tdt}{\sin^2 2t}$.

  Do đó : $\dfrac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1}{\sin^2 2t.\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 2t}-1}}\left(-\dfrac{2\cos 2tdt}{\sin^2 2t}\right)=-\dfrac{2dt}{\sin^3 2t}=-\dfrac{2\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)dt}{8\sin^3 t\cos^3 t}$

  $=-\dfrac{1}{4}\left(\cot t.\dfrac{1}{\sin^2 t}+\tan t.\dfrac{1}{\cos^2 t}+\dfrac{2}{\tan t}.\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)dt$

  Vậy :

  $I=I=-\dfrac{1}{4}\int\left(-\cot t.d(\cot t)+\tan t.d(\tan t)+\dfrac{2}{\tan t}.d(\tan t)\right)=-\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{2}\cot^2 t+\dfrac{1}{2}\tan^2 t+2\ln|\tan t|\right)+C$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|+C$$

- Với x<1 . Đề nghị học sinh tự làm .

* Chú ý : Tích phân dạng này ta có thể giải bằng cách khác nhanh hơn :

Ta có : $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\Rightarrow I=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\sqrt{x^2-1}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=J+K\,(1)$

Với : J $=\int\sqrt{x^2-1}dx=x\sqrt{x^2-1}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx=x\sqrt{x^2-1}-I\,(a)$

Tích phân :

$$K=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\Rightarrow I=x\sqrt{x^2-1}-I+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$$

$$\Leftrightarrow 2I=x\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\Rightarrow I=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$$

Ví dụ 3. Tính tích phân bất định : $I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

Giải

Đặt : $x=\tan t;t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\to dx=\frac{dt}{\cos^2t}$

Suy ra : $\frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\tan^2t\right)^3}}.\frac{dt}{\cos^2t}=\text{costdt}$.

Khi đó : $I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\int\text{costdt}=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$

Chú ý :

1. Sở dĩ trong ví dụ trên có kết quả như vậy vì :

$$\begin{cases}\text{cost}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};\sin t=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\text{cost}>0\leftrightarrow\sqrt{\cos^2t}=\text{cost;sint=tant.cost}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\end{cases}$$

2. Phương pháp trên áp dụng để giải bài toán tổng quát : $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^{2k+1}}}\left(k\in Z\right)$.

Bài toán 2: Sử dụng phương pháp đổi biến số dạng 2 để tính tích phân : $I=\int f(x)dx$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG.

Ta thực hiện theo các bước sau :

- Bước 1: Chọn t=$\varphi(x)$. Trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp .
- Bước 2: Tính vi phân hai vế : $dt = \varphi'(t)dt$.
- Bước 3: Biểu thị : $f(x)dx = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = g(t)dt$.
- Bước 4: Khi đó : $I = \int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$

* Chú ý : Ta có một số dấu hiệu để đổi biến thường gặp :

Dấu hiệu	**Cách chọn**
Hàm số mẫu số có	t là mẫu số
Hàm số : $f\left(x;\sqrt{\varphi(x)}\right)$	t=$\sqrt{\varphi(x)}$
Hàm $f(x) = \dfrac{a.\sin x+b.\cos x}{c.\sin x+d.\cos x+e}$	$t = \tan\dfrac{x}{2};\left(\cos\dfrac{x}{2} \neq 0\right)$
Hàm $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	• Với : x+a>0 và x+b>0 : Đặt : $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$ • Với x+a<0 và x+b<0 , đặt : $t = \sqrt{x-a} + \sqrt{-x-b}$

Ví dụ 4. Tính tích phân bất định sau : $I = \int x^2\left(2-3x^2\right)^8 dx$

Giải

Đặt : $t = 2-3x^2 \Rightarrow \begin{cases} dt = -6xdx \\ x^2 = \dfrac{2-t}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x^2\left(2-3x^2\right)^8 = \left(\dfrac{2-t}{3}\right)t^8 = \dfrac{1}{3}\left(2t^8 - t^9\right)$.

Vậy : $I = \int x^2\left(2-3x^2\right)^8 dx = \dfrac{1}{3}\left(2\int t^8 dt - \int t^9 dt\right) = \dfrac{2}{27}t^9 - \dfrac{1}{30}t^{10} + C = \dfrac{2}{27}\left(2-3x^2\right)^9 - \dfrac{1}{30}\left(2-3x^2\right)^{10} + C$

Ví dụ 5 : Tính tích phân bất định : $\int \dfrac{x^3dx}{\sqrt{1-x}}$

Giải

Đặt : t=$\sqrt{1-x} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-t^2 \\ dx = -2tdt \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x^2dx}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{\left(1-t^2\right)^3(-2tdt)}{t} = -2\left(1-2t^2+3t^4-t^6\right)dt$.

Vậy : $\int \dfrac{x^3dx}{\sqrt{1-x}} = \int\left(-2+4t^2-6t^4+2t^6\right)dt = -2t + \dfrac{4}{3}t^3 - \dfrac{6}{5}t^5 + \dfrac{2}{7}t^7 + C$

$$= -2\sqrt{1-x} + \frac{4}{3}(1-x)\sqrt{1-x} - \frac{6}{5}(1-x)^2\sqrt{1-x} + \frac{2}{7}(1-x)^3\sqrt{1-x} + C$$

Ví dụ 6: Tính tích phân bất định : $\int x^5\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)^2}dx$

Giải

Đặt : t= $\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)} \Rightarrow t^3 = \left(1-2x^2\right) \leftrightarrow x^2 = \frac{1-t^3}{2} \to 2xdx = -\frac{3}{2}t^2dt$

Do đó : $x^5\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)^2}dx = \frac{1-t^3}{2}.t^2\left(-\frac{3}{4}t^2dt\right) = \frac{3}{8}\left(t^7-t^4\right)dt$

Vậy : $\int x^5\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)^2}dx = \frac{3}{8}\int\left(t^7-t^4\right)dt = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}t^8-\frac{1}{5}t^5\right) = \frac{3}{320}\left(5t^6-8t^3\right)t^2 + C$

$= \frac{3}{320}\left[5\left(1-2x^2\right)^2 - 8\left(1-2x^2\right)\right]\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)^2} + C$

Ví dụ 7: Tính tích phân bất định : $I = \int \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx$.

Giải

Đặt : t= $\sqrt{\cos x} \leftrightarrow t^2 = \cos x \Rightarrow$ 2tdt=-sinxdx .

Do đó : $\sin^3 x\sqrt{\cos x}dx = \left(1-\cos^2 x\right)\sqrt{\cos x}\,\sin x dx = \left(t^4-1\right)t2tdt = 2\left(t^6-t^2\right)dt$.

Vậy : $I = \int \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx = 2\int\left(t^6-t^2\right)dt = \frac{2}{7}t^7 - \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{7}\cos^3 x\sqrt{\cos x} - \frac{1}{2}\cos x\sqrt{\cos x} + C$

Ví dụ 8: Tính tích phân bất định : $I = \int \frac{\cos x.\sin^3 x}{1+\sin^2 x}dx$

Giải

Đặt : $t = 1+\sin^2 x \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = t-1 \\ 2\sin x\cos xdx = dt \end{cases}$

Suy ra : $\frac{\cos x.\sin^3 x}{1+\sin^2 x}dx = \frac{1}{2}\frac{\sin^2 x.2\sin x.\cos x.dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{2}\frac{(t-1)dt}{t} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t}\right)dt$.

Vậy : $I = \int \frac{\cos x.\sin^3 x}{1+\sin^2 x}dx = \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{2}\left(t-\ln|t|\right) + C = \frac{1}{2}\left[1+\sin^2 x - \ln\left(1+\sin^2 x\right)\right] + C$

Ví dụ 9: Tính tích phân bất định : $I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}dx$

Giải

Vì : $\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}=\frac{\cos^2 x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)}{\sin^8 x}=\frac{\left(1-\sin^2 x\right)^2+\left(1-\sin^2 x\right)\sin^2 x}{\sin^8 x}=$

Đặt : t = $\cot x \Rightarrow \begin{cases} dt=-\frac{1}{\sin^2 x}dx \\ \frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x=1+t^2 \end{cases}$

Suy ra : $\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}dx=\cot^2 x\left(\frac{1}{\sin^6 x}\right)dx=\cot^2 x\left[\left(1+\cot^2 x\right)^2.\frac{1}{\sin^2 x}\right]dx=-t^2\left(1+t^2\right)^2 dt$

Vậy : $I=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}dx=-\int\left(t^2+2t^4+t^6\right)dt=-\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{2}{5}t^5+\frac{1}{7}t^7\right)+C$. Thay : t= cotx vào .

Ví dụ 10 : Tính tích phân bất định : $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\left(a\neq 0\right)$

Giải

Đặt : $t=x+\sqrt{x^2+a}\leftrightarrow dt=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}dx=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{tdx}{\sqrt{x^2+a}}\Rightarrow\frac{dt}{t}=\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$

Vậy : $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$

Ví dụ 11: Tính tích phân bất định : $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$

Giải

a. xét hai trường hợp :

- Với : $\begin{cases} x+1>0 \\ x+2>0 \end{cases}\Rightarrow x>-1.$ Đặt : $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\leftrightarrow$

  Suy ra : $dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)dx=\frac{1}{2}\frac{tdx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}\Leftrightarrow\frac{2dt}{t}=\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$

  Vậy : $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}=2\int\frac{dt}{t}=2\ln|t|+C=2\ln\left|\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right|+C$

- Với : $\begin{cases} x+1<0 \\ x+2<0 \end{cases}\Rightarrow x<-2.$ Đặt t = $\sqrt{-(x+1)}+\sqrt{-(x+2)}$

Suy ra : $dt=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{-(x+1)}}+\frac{1}{\sqrt{(x+2)}}\right)dx=-\frac{1}{2}\frac{tdx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}\Leftrightarrow-\frac{2dt}{t}=\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$

Vậy : $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}=-2\int\frac{dt}{t}=-2\ln|t|+C=-2\ln\left|\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right|+C$

BÀI TẬP CHO HAI PHƯƠNG PHÁP : PHÂN TÍCH VÀ ĐỔI BIẾN SỐ

Bài 1 : Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau

a/ $\int x^2(1-x)^9\,dx$

b/ $\int\frac{2x^3-6x^2+9x+9}{x^2-3x+2}dx$

c/ $\int\frac{x^2}{(3x+1)^3}dx$

d/ $\int\frac{x^2-x}{(x-2)^3}dx$

Bài 2: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a/ $\int\frac{2x}{x+\sqrt{x^2-1}}dx$

b/ $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$

c/ $\int\frac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$

d/ $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$

Bài 3: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a/ $\int\frac{dx}{\sin^4 x}$

b/ $\int\frac{1}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$

c/ $\int\frac{1}{\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx$

d/ $\int\frac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}dx$

Bài 4: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a/ $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx$

b/ $\int\sin^2 x\cos^3 x\,dx$

c/ $\int\sin^4 x\cos^5 x\,dx$

d/ $\int\tan^4 x\,dx$

Bài 5: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a/ $\int\frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$

b/ $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos x}$

c/ $\int\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$

d/ $\int\frac{x^3dx}{(x^8-4)^2}$

Bài 6: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a/. $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$ b/ $\int \frac{dx}{x\left(x^{10}+1\right)^2}$

c/ $\int \frac{x^5dx}{x^6-x^3-2}$ d/ $\int \frac{(2x+5)}{3x^2-2x-1}dx$

Bài 7: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a/ $\int \frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$ b/ $\int \frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x}dx$

c/ $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx$ d/ $\int \frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\cos x+\sin x}dx$

Bài 8: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a/ $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$ b/ $\int \frac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\sin x+\cos x+1}dx$

c/ $\int \frac{\sin x+7\cos x+6}{4\sin x+5\cos x+5}dx$ d/ $\int \frac{\sqrt[3]{\sin^3 x-\sin x}}{\sin^3 x\tan x}dx$

Bài 9: Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

a/ $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$ b/ $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\cos^2 x-b^2\sin^2 x}}dx$

c/ $\int \frac{\cos x+\sin x\cos x}{2+\sin x}dx$ d/ $\int \frac{\sin x dx}{\cos x\sqrt{\sin^2 x+1}}$

LUYỆN TẬP TẠI LỚP

Tìm nguyên hàm các hàm số sau :

1. $\int_0^1 \frac{2x+9}{x+3}dx$ 2. $\int_0^1 \frac{3}{x^2-4x-5}dx$ 3. $\int_1^2 \frac{5}{x^2-6x+9}dx$

4. $\int_1^4 \frac{1}{x^2(x+1)}dx$ 5. $\int_0^1 \frac{x-3}{(x+1)(x^2+3x+2)}dx$

6. $\int_0^1 \frac{1}{(x^4+4x^2+3)}dx$ 7. $\int_0^1 \frac{x^2+3x+2}{x+3}dx$

9. $\int_0^1 \frac{x^2}{4-x^2}dx$ 10. $\int_0^1 \frac{x}{4-x^2}dx$

11. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|4x-1|}{x^2-3x+2}dx$ 12. $\int_1^2 \frac{3x^3}{x^2+2x+1}dx$

13 . $\int_0^1 \frac{4x-1}{x^3+2x^2+x+2}dx$

14. $I=\int_0^2 \frac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}dx$

15. $\int_0^1 \frac{x(x-1)}{x^2-4}dx$

16. $\int_0^1 \frac{x^2+3x+10}{x^2+2x+9}dx$

17. $\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^2+1}dx$

18. $\int_1^2 \frac{x^2}{x^2-7x+12}dx$

19.f(x)= $\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$

20. $\int_{1/2}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

I. CÔNG THỨC :

$$I=\int udv = uv - \int vdu$$

Chứng minh :

Giả sử hai hàm số : u=u(x) và v=v(x) liên tục và có đạo hàm .

Cho nên : d(u.v)=v.du+u.dv . Suy ra : u.dv=d(u.v)-v.du ,

và $\int u.dv = \int d(u.v) - \int v.du = u.v - \int v.du \quad (dpcm)$.

Lý do sử dụng phương pháp tích phân từng phần :

Đôi khi ta gặp phải những tích phân mà không thể sử dụng hai phương phương pháp : Phân tích và đổi biến số , để tìm họ nguyên hàm trực tiếp được . Vì thế ta phải thông qua việc tìm họ nguyên hàm trực tiếp bằng một hàm số khác (mà có thể sử dụng hai phương pháp đã biết để tìm) .

II. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: Sử dụng công thức tích phân từng phàn để tính $I=\int f(x)dx$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau :

- Bước 1: Ta biến đổi tích phân ban đầu về dạng : $I=\int f(x)dx = \int f_1(x).f_2(x)dx$
- Bước 2: Đặt : $\begin{cases} u=f_1(x) \\ dv=f_2(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du=f'_1(x)dx \\ v=\int f_2(x)dx \end{cases}$
- Bước 3: Khi đó : $\int u.dv = u.v - \int v.du$

Ví dụ 1: Tính tích phân bất định : $I=\int \frac{x.\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Giải

Viết lại : $I=\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Đặt : $\begin{cases} u=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \\ dv=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du=\frac{\frac{1+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \\ v=\sqrt{x^2+1} \end{cases}$

Khi đó : $I=\int u.dv=\sqrt{x^2+1}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\int dx=\sqrt{x^2+1}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-x+C$

Ví dụ 2: Tính tích phân bất định : $I=\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$

Giải

Ta viết lại : $I=\int \ln(\cos x).\frac{dx}{\cos^2 x}$

Đặt : $\begin{cases} u=\ln(\cos x) \\ dv=\frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x \\ v=\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x \end{cases} \Rightarrow I=\int u.dv=\tan x.\ln(\cos x)+\int \tan^2 x dx$.

Khi đó : $I=\tan x.\ln(\cos x)+\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\tan x.\ln(\cos x)+\tan x-x+C$

Bài toán 2: Tính tích phân bất định dạng : $\left[\begin{array}{l} I=\int P(x)\sin axdx \\ I=\int P(x)\cos axdx \end{array}\right.$. Với P(x) là một đa thức .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách sau :

- Cách 1: Sử dụng tích phân từng phần , thực hiện theo các bước sau :

+/ Bước 1: Đặt : $\begin{cases} u=P(x) \\ dv=\left[\begin{array}{l} \sin axdx \\ \cos axdx \end{array}\right. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du=P'(x)dx \\ v=\left[\begin{array}{l} \frac{-1}{a}\cos ax \\ \frac{1}{a}\sin ax \end{array}\right. \end{cases}$

+/ Bước 2: Thay vào công thức tích phân từng phần :

+/ Bước 3: Tiếp tục thủ tục như trên ta sẽ khử được bậc của đa thức .

- Cách 2: (Sử dụng phương pháp hệ số bất định) . Ta thực hiện theo các bước sau :

+/ Bước 1: Ta có : $I=\int P(x)\text{cosaxdx=A(x)sinax+B(x)cosax+C}\,(1)$

Trong đó : A(x) và B(x) là các đa thức cùng bậc với P(x).

+/ Bước 2: Lấy đạo hàm hai vế của (1) :

$P(x)\text{cosax=A'(x)cosax-A(x)a.sinax+B'(x)sinax+aB(x)cosax}$

+/ Bước 3: sử dụng phương pháp hệ số bất định ta xác định được A(x) và B(x).

* Nhận xét : Nếu bậc của đa thức lớn hơn 3 , thì cách 1 tỏ ra cồng kềnh , vì khi đó ta thực hiện số lần tích phân từng phần bằng với số bậc của đa thức . Cho nên ta đi đến nhận định như sau :

- Nếu bậc của đa thức lớn hơn hoặc bằng 3 : Ta sử dụng cách 2.
- Nếu bậc của đa thức nhỏ hơn hoặc bằng 2 : Ta sử dụng cách 1.

Ví dụ 3: Tính tích phân bất định : $\int x\sin^2 xdx$

Giải

Ta có : $I=\int x\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int xdx-\frac{1}{2}\int x\cos 2xdx=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}J\,(1)$

Tính : $J=\int x\cos 2xdx$

Đặt : $\begin{cases} u=x \\ dv=\cos 2x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{cases} \Rightarrow J=\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\int \sin 2xdx=\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

Thay vào (1) : $I=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\right)=\frac{1}{4}\left(x^2-x\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$

Ví dụ 4: Tính tích phân bất định : $I=\int\left(x^3-x^2+2x-3\right)\sin x dx$

Giải

Theo nhận xét trên , ta sử dụng phương pháp hệ số bất định

Ta có :

$I=\int\left(x^3-x^2+2x-3\right)\sin x dx=\left(a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1\right)\cos x+\left(a_2x^3+b_2x^2+c_2x+d_2\right)\sin x\,(1)$

Lấy đạo hàm hai vế của (1)

$\Leftrightarrow\left(x^3-x^2+2x-3\right)\sin x=\left[a_2x^3+\left(3a_1+b_2\right)x^2+\left(2b_1+c_2\right)x+c_1+d_2\right]\cos x$

$-\left[a_1x^3-(3a_2-b_1)x^2-(2b_2-c_1)x+c_2-d_1\right]\sin x\,(2)$

Đồng nhất thức ta được : $\begin{cases} a_2=0 \\ 3a_1+b_2=0 \\ 2b_1+c_2=0 \\ c_1+d_2=0 \end{cases} \vee \begin{cases} -a_2=1 \\ 3a_2-b_1=-1 \\ 2b_2-c_1=2 \\ -c_2+d_1=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=-1; a_2=0 \\ b_1=1; b_2=3 \\ c_1=4; c_2=-2 \\ d_1=1; d_2=-4 \end{cases}$

Khi đó : $I=\left(-x^3+x^2+4x+1\right)\cos x+\left(3x^2-2x+4\right)\sin x+C$.

* Có nhận xét gì khi giải bằng cách lấy tích phân từng phần ba lần (Do đây là đa thức bậc ba).

Đặt :

$\begin{cases} u=x^3-x^2+2x-3 \\ dv=\sin x dx \end{cases} \to \begin{cases} du=\left(3x^2-2x+2\right)dx \\ v=-\cos x \end{cases} \Rightarrow I=-\cos x\left(x^3-x^2+2x-3\right)+\int\left(3x^2-2x+2\right)\cos x dx$ (1)

Tính :J= $\int\left(3x^2-2x+2\right)\cos x dx$

Đặt : $\begin{cases} u_1=3x^2-2x+2 \\ dv_1=\cos x dx \end{cases} \to \begin{cases} du_1=(6x-2)dx \\ v_1=\sin x \end{cases} \Rightarrow J=\sin x\left(3x^2-2x+2\right)-\int(6x-2)\sin x dx\,(2)$

Tính : K= $\int(6x-2)\sin x dx$

Đặt : $\begin{cases} u_2=6x-2 \\ dv_2=\sin x dx \end{cases} \to \begin{cases} du_2=6dx \\ v_2=-\cos x \end{cases} \Rightarrow K=-\cos x(6x-2)+6\int\cos x dx=-\cos x(6x-2)+6\sin x$

Thay các kết quả tìm được lần lượt vào (2) và (1) ta tính được I

J= $\sin x\left(3x^2-2x+2\right)-\left(-\cos x(6x-2)+6\sin x\right)=\sin x\left(3x^2-2x-4\right)+(6x-2)\cos x$

I= $-\cos x\left(x^3-x^2+2x-3\right)+\left[\sin x\left(3x^2-2x-4\right)+(6x-2)\cos x\right]=$

$I=\left(-x^3+x^2+4x+1\right)\cos x+\left(3x^2-2x+4\right)\sin x+C$

- Như vậy vấn đề đặt ra là : Em nào thấy cách nào dễ hiểu và không bị nhầm lẫn , thì chọn cách đó , không nhất thiết là dài hay ngắn , quan trọng nhất là kết quả phải chính xác .

Bài toán 3: Tính tích phân bất định : $\left[\begin{array}{l} I=\int e^{ax}\sin bx dx \\ I=\int e^{ax}\cos bx dx \end{array}\right.$. (Với a, b $\neq 0$)

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần , theo các bước sau :

- Bước 1: Đặt $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} u = \cos bx \\ dv = e^{ax}dx \end{cases} \\ \begin{cases} u = \sin bx \\ dv = e^{ax}dx \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} du = -b\sin bx dx \\ v = \dfrac{1}{a}e^{ax} \end{cases} \\ \begin{cases} du = b\cos bx dx \\ v = \dfrac{1}{a}e^{ax} \end{cases}\end{array}\right.$
- Bước 2: Thay vào công thức tích phân từng phần
- Chú ý : Riêng đối với dạng tích phân này bao giờ cũng phải lấy tích phần từng phần hai lần .

Ví dụ 5: Tính tích phân bất định sau : $I = \int e^{2x}\sin^2 x dx$

Giải

Ta có : $I = \int e^{2x}\sin^2 x dx = \int e^{2x}\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = \dfrac{1}{2}\int e^{2x}dx - \dfrac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x dx = \dfrac{1}{4}e^{2x} - \dfrac{1}{2}J \quad (1)$

Tính tích phân J=$\int e^{2x}\cos 2x dx$.

Đặt : $\begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \to \begin{cases} du = -2\sin 2x dx \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \Rightarrow J = \dfrac{1}{2}e^{2x}\cos 2x + \int e^{2x}\sin 2x dx = \dfrac{1}{2}e^{2x}\cos 2x + K \quad (2)$

Tính tích phân K= $\int e^{2x}\sin 2x dx$.

Đặt : $\begin{cases} u_1 = \sin 2x \\ dv_1 = e^{2x}dx \end{cases} \to \begin{cases} du_1 = 2\cos 2x dx \\ v_1 = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \Rightarrow K = \dfrac{1}{2}e^{2x}\sin 2x - \int e^{2x}\cos 2x dx = \dfrac{1}{2}e^{2x}\sin 2x - J \quad (3)$

Từ (2) và (3) ta có hệ : $\begin{cases} J - K = \dfrac{1}{2}e^{2x}\cos 2x \\ J + K = \dfrac{1}{2}e^{2x}\sin 2x \end{cases} \leftrightarrow J = \dfrac{1}{4}e^{2x}\left(\sin 2x + \cos 2x\right)$

Thay vào (1) ta được : I= $\dfrac{1}{4}e^{2x} - \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{4}e^{2x}\left(\sin 2x + \cos 2x\right) = \dfrac{1}{4}e^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{2}\left(\sin 2x + \cos 2x\right)\right) + C$

Bài toán 4: Tính tích phân bất định : $I = \int P(x)e^{ax}dx$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần .Ta tiến hành theo các bước sau

- Bước 1: Đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax}dx \end{cases} \to \begin{cases} du = P'(x)dx \\ v = \dfrac{1}{a}e^{ax} \end{cases}$

- Bước 2: Khi đó : $\Rightarrow I = \frac{1}{a}e^{ax}P(x) - \frac{1}{a}\int P'(x)e^{ax}dx$
- Bước 3: Tiếp tục thủ tục như trên ta sẽ khử được đa thức .

Ví dụ 6: Tính tích phân bất định : $I = \int xe^{3x}dx$

Giải

Đặt : $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{3x}dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$

Ví dụ 7 : Tính tích phân bất định : $I = \int x^2e^{2x}dx$

Giải

Đặt : $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int x.e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - J \quad (1)$

Tính tích phân J= $\int xe^{2x}dx$.

Đặt : $\begin{cases} u_1 = x \\ dv_1 = e^{2x}dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du_1 = dx \\ v_1 = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \Rightarrow J = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$

Thay vào (1) ta được : I=$\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right) + C = \frac{1}{4}e^{2x}\left(2x^2 - 2x + 1\right) + C$

* ***Chú ý*** :

Qua hai ví dụ 6 và 7 ta thấy số lần lấy tích phân từng phần bằng với số bậc của đa thức P(x) . Nghĩa là : số bậc của P(x) càng cao thì số lần lấy tích phân từng phần càng nhiều .

Bài toán 5: Tính tích phân bất định : $I = \int P(x)\ln xdx$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lấy tích phân từng phần , theo các bước sau :

- Bước 1: Đặt : $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = P(x)dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \int P(x)dx \end{cases}$

- Bước 2: Thay vào công thức tích phân từng phần , ta được một tích phân quen thuộc mà có thể tinh được bằng hai phương pháp đã biết .
-

Ví dụ 8: Tính tích phân bất định sau : $I=\int\left(x^2-2x\right)\ln x dx$

Giải

Đặt : $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\left(x^2-2x\right)dx \end{cases} \to \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x} \\ v=\dfrac{1}{3}x^3-x^2 \end{cases}$

Suy ra :

$$I=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\ln x-\int\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\frac{dx}{x}=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\ln x-\left[\frac{1}{3}\int x^2dx-\int xdx\right]$$

$$\mathrm{I}\;=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\ln x-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$$

BÀI TẬP VỀ : PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Bài 1. Tính các tích phân bất định sau :

a/ $\int\left(x^2+1\right)e^{2x}dx$ b/ $\int x^2\sin x dx$

c/ $\int x\cos\sqrt{x}dx$ d/ $\int e^x\left(1+\tan x+\tan^2x\right)dx$

Bài 2. Tính các tích phân bất định sau :

a/ $\int e^{\sqrt{x}}dx$ b/ $\int\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

c/ $\int e^{-2x}\cos 3x dx$ d/ $\int\sin\left(\ln x\right)dx$

Bài 3. Tính các tích phân bất định sau :

a/ $\int(x+1)^2\cos^2xdx$ b/ $\int\sqrt{x^2+b}.dx \quad (b\neq 0)$

c/ $\int x^3\ln xdx$ d/ $\int x^2\log_2 xdx$

Bài 4. Tính các tích phân bất định sau :

a/ $\int\left(x^2+2\right)\sin 2xdx$ b/ $\int\dfrac{x}{\cos^2x}dx$

c/ $\int\sqrt{x^2-4x+8}dx$ d/ $\int\dfrac{\left(1+\sin x\right)e^x}{1+\cos x}dx$

Bài 5. Tính các tích phân bất định sau :

a/ $\int\dfrac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$ b/ $\int\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx$

c/ $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$ d/ $\int x^2e^{3x}dx$

Bài 6. Tính các tích phân bất định sau :

a/ $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$ b/ $\int e^{2x}\cos 3x dx$

c/ $\int \sin\sqrt[3]{x}dx$ d/ $\int \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$

TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

I. TÍCH PHÂN SỬ DỤNG BẢNG NGUYÊN HÀM

Bài 1. Tính các tích phân sau :

a. $\int_1^{\sqrt{2}}(x^2+2x+1)dx$ *b.* $\int_1^2\left(x^2+\frac{3}{x}+e^{3x+1}\right)dx$ *c.* $\int_1^2\frac{x-1}{x^2}dx$

d. $\int_{-1}^2\frac{x}{x^2+2}dx$ *e.* $\int_{-2}^{-1}\frac{(x^4+4)^2}{x^2}dx$ *f.* $\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+x^2\right)dx$

g. $\int_1^2(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$ *h.* $\int_1^2\left(x^2+x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$ *i.* $\int_1^4\left(\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}\right)dx$

k. $\int_1^2\frac{x^2-2x}{x^3}dx$ *l.* $\int_1^{e^2}\frac{2\sqrt{x}+5-7x}{x}dx$ *m.* $\int_1^8\left(4x-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

GIẢI

a. $\int_1^{\sqrt{2}}(x^2+2x+1)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right)\Big|_1^2=\left(\frac{8}{3}+4+2\right)-\left(\frac{1}{3}+1+1\right)=\frac{19}{3}$

b. $\int_1^2\left(x^2+\frac{3}{x}+e^{3x+1}\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+3\ln x+\frac{1}{3}e^{3x+1}\right)\Big|_1^2=\left(\frac{8}{3}+3\ln 2+\frac{1}{3}e^7\right)-\left(\frac{1}{3}+e^4\right)=\frac{7}{3}+3\ln 2+\frac{e^7-3e^4}{3}$

c. $\int_1^2\frac{x-1}{x^2}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\ln 2+\frac{1}{2}-1=\ln 2-\frac{1}{2}$

d. $\int_{-1}^2\frac{x}{x^2+2}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^2\frac{d(x^2+2)}{x^2+2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2)\Big|_{-1}^2=\frac{1}{2}\ln 6-\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln 2$

e. $\int_{-2}^{-1}\frac{(x^4+4)^2}{x^2}dx=\int_{-2}^{-1}\frac{x^8+8x^4+16}{x^2}dx=\int_{-2}^{-1}\left(x^6+8x^2+\frac{16}{x^2}\right)dx=\left(\frac{1}{7}x^7+4x^3+16\ln x\right)\Big|_{-2}^{-1}=$

f. $\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+x^2\right)dx=\left(x^2+\ln x-\frac{1}{x}+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^e=e^2+\frac{e^3}{3}-\frac{1}{e}+\frac{2}{3}$

g. $\int_1^2(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx=\int_1^2\left(\sqrt{x^3}+1\right)dx=\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x\right)\Big|_1^2=\frac{8\sqrt{2}+3}{5}$

h. $\int_1^2 \left(x^2+x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx=\int_1^2\left(x^2+x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{3}}\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_1^2=\frac{71}{60}+\frac{8\sqrt{2}}{5}+\frac{9\sqrt[3]{3}}{4}$

i. $\int_1^4 \left(\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}\right)dx=\int_1^4\left(x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{3}}-4x^{\frac{1}{4}}\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2.\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{16}{5}x^{\frac{5}{4}}\right)\Big|_1^4=$

k. $\int_1^2 \frac{x^2-2x}{x^3}dx=\int_{11}^2\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx=\left(\ln x+\frac{2}{x}\right)^2=\ln 2-3$

l. $\int_1^{e^2}\frac{2\sqrt{x}+5-7x}{x}dx=\int_1^e\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{5}{x}-7\right)dx=\left(4\sqrt{x}+5\ln x-7x\right)\Big|_1^e=4\sqrt{e}-7e+8$

m. $\int_1^8\left(4x-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx=\int_1^8\left(4x-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=\left(2x^2-\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\right)=125$

Bài 2. Tính các tích phân sau

a. $\int_1^2\sqrt{x+1}dx$ b. $\int_2^5\frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$ c. $\int_1^2\left(x^2+x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$

d. $\int_0^2\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ e. $\int_0^2\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3}}dx$ f. $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx$

GIẢI

a. $\int_1^2\sqrt{x+1}dx=\int_1^2(x+1)^{\frac{1}{2}}d(x+1)=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=\frac{2}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$

b. $\int_2^5\frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}=\int_2^5\frac{1}{4}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)dx=\frac{1}{4}\frac{2}{3}\left[(x+2)^{\frac{3}{2}}+(x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5=\frac{1}{6}\left(7\sqrt{7}+3\sqrt{3}-8\right)$

c. $\int_1^2\left(x^2+x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx=\int_1^2\left(x^2+x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{3}}\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_1^2=\frac{7}{3}-\frac{7}{20}+\frac{8\sqrt{2}}{5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$

d. $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int_0^1 d\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\left(-\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^1=1$

e. $\int_0^2\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx=\int_0^2\sqrt[3]{1+x^3}\,d\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^2\Big|_0^2=\frac{\sqrt[3]{9}-1}{2}$

f. $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx=\int_0^4\left(x^2+9\right)d\left(\sqrt{x^2+9}\right)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+9}\right)^3\Big|_0^4=\frac{2}{3}$

Bài 3. Tính các tích phân sau

a. $\int_0^{\pi}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx$ b. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sin x+3\cos x+x\right)dx$ c. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\sin 3x+\cos 2x\right)dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}dx$	e. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3\tan^2 x dx$	f. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2\cot^2 x+5\right)dx$
g. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$	h. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$	i. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^2 x dx$
k. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\tan x-\cot x\right)dx$	l. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}dx$	m. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4 x dx$

GIẢI

a. $$\int_0^{\pi} \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx = -\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)=0$$

b. $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin x+3\cos x+x\right)dx = \left(-2\cos x+3\sin x+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 6-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi^2}{18}$$

c. $$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\sin 3x+\cos 2x\right)dx = \left(-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

d. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(\tan x\right) = \frac{2}{3}\left(\tan x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}$$

e. $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3\tan^2 x dx = 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = 3\left(\tan x-x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{3}-3-\frac{\pi}{4}$$

f. $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2\cot^2 x+5\right)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)+5\right)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(3-\frac{-2}{\sin^2 x}\right)dx = \left(3x-\cot x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}+\sqrt{3}-1$$

g. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}.d\left(\tan\frac{x}{2}\right) = -\left(\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

h. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}-1\right)dx = \left(2\tan\frac{x}{2}-x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4-\pi}{2}$$

$$i.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 xdx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2xdx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

$$k.\ \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\tan x-\cot x)dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{-d(\sin 2x)}{\sin 2x}=-\ln|\sin 2x|\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=0$$

$$l.\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}=\ln|\cos x+\sin x|\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=-\ln 2$$

$$m.\ \int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^4 xdx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(3+4\cos 2x+\cos 4x)dx=\frac{1}{8}\left(3x+2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{8}\left(\frac{3\pi}{4}+2-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{32}(3\pi+7)$$

Bài 4. Tính các tích phân sau :

$$a.\ \int_0^1\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^1\frac{d\left(e^x+e^{-x}\right)}{e^x+e^{-x}}=\ln\left|e^x+e^{-x}\right|_0^1=\ln\frac{e^2+1}{2e}$$

$$b.\ \int_1^2\frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx=\int_1^2\frac{\frac{x+1}{x}}{x+\ln x}dx=\int_1^2\frac{d(x+\ln x)}{x+\ln x}=\ln|x+\ln x|\Big|_1^2=\ln(2+\ln 2)$$

$$c.\ \int_0^1\frac{e^{2x}-4}{e^x+2}dx=\int_0^1\frac{\left(e^x-2\right)\left(e^x+2\right)}{e^x+2}dx=\int_0^1\left(e^x-2\right)dx=\left(e^x-2x\right)_0^1=e-3$$

$$d.\ \int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^{\ln 2}\frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=\ln\left|e^x+1\right|_0^{\ln 2}=\ln 3-\ln 2$$

$$e.\ \int_1^2 e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx=\int_1^2\left(e^x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(e^x-\ln|x|\right)_1^2=e^2-e-\ln 2$$

$$f.\ \int_0^1\frac{e^x}{2^x}dx=\int_0^1\left(\frac{e}{2}\right)^x dx=\left[\left(\frac{e}{2}\right)^x\right]_0^1=\frac{e}{2}-1$$

$$g.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos x}\sin xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos x}d(\cos x)=-\left(e^{\cos x}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=e-1$$

$$h.\ \int_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int_1^4 2d\left(e^{\sqrt{x}}\right)=2\left(e^{\sqrt{x}}\right)_1^4=2\left(e^2-e\right)$$

$$i.\ \int_1^e\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx=\int_1^e(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}d(\ln x+1)=\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^e=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

$$k.\ \int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^e\ln xd(\ln x)=\frac{1}{2}\left(\ln^2 x\right)_1^e=\frac{1}{2}$$

$l.\ \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\left(e^{x^2}\right)_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$

$m.\ \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx = \int_0^1 \frac{(1+e^x-e^x)}{1+e^x}dx = \int_0^1\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = x-\ln\left|1+e^x\right|_0^1 = 1-\ln(1+e)+\ln 2 = 1+\ln\frac{2}{1+e}$

II. TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

1. Dạng 1.(Đặt ẩn phụ)

Bài 1. Tính các tích phân sau

$a.\ \int_0^1 x(1-x)^{19}dx = \int_0^1 x^{19}(1-x)dx = \left(\frac{1}{20}x^{20}-\frac{1}{21}x^{21}\right)_0^1 = \frac{1}{20}-\frac{1}{21} = \frac{1}{420}$

$b.\ \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}dx$. Đặt : $t = 1+x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x^2xdx}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t-1)}{t^3}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)_1^2 = -\frac{7}{16}$

$c.\ \int_0^1 \frac{x^5}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^4xdx}{x^2+1}$. Đặt : $x^2+1 = t \Rightarrow dt = 2xdx;\ x^2 = t-1.$

$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{(t-1)^2dt}{2t} = \int_1^2 \frac{1}{2}\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2-2t+\ln|t|\right)_1^2 = \frac{2\ln 2-1}{4}$

$d.\ \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}}$. Đặt : $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx \vee x = \frac{t^2-1}{2}.x = 1 \to t = 1; x = 1 \to t = \sqrt{3}$

Do đó : $d.\ \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(t^2-1)}{2}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$

$e.\ \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$. Đặt : $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 = 1-t^2 \Leftrightarrow xdx = -tdt; x = 0 \to t = 1; x = 1 \to t = 0$

Do đó : $e.\ \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = -\int_1^0 t^2dt = \int_0^1 t^2dt = \left(\frac{1}{3}t^3\right)_0^1 = \frac{1}{3}$

$f.\ \int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$. Đặt : $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 = 1-t^2 \Leftrightarrow xdx = -tdt; x = 0 \to t = 1; x = 1 \to t = 0$

Vậy : $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}xdx = -\int_1^0 (1-t^2)tdt = \int_0^1 (t-t^3)dt = \left(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{4}t^4\right)_0^1 = \frac{1}{4}$

$g.\ \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$. Đặt :

$t = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow x^2 = t^2-4; \Leftrightarrow xdx = tdt; x = \sqrt{5} \to t = 3; x = 2\sqrt{3} \to t = 4$

Vậy : $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int_3^4 \frac{tdt}{(t^2-1)t} = \int_3^4 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|_3^4 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{5}-\ln\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{10}$

$h.\ \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5+2x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$. Đặt : $t = \sqrt{1+x^2} \to x^2 = t^2-1; \vee xdx = tdt.x = 0 \to t = 1; x = \sqrt{3} \to t = 2$

Vậy : $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5+2x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2\left(x^2+2\right)xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_1^2 \frac{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}{t}dt = \int_1^2\left(t^3-\frac{1}{t}\right)dt = \left(\frac{1}{4}t^4-\ln|t|\right)_1^2 = \frac{15}{4}-\ln 2$

i. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x}dx = \leftarrow \int_0^{\ln 2} \frac{d\left(1+e^x\right)}{1+e^x} = \ln\left|1+e^x\right|_0^{\ln 2} = \ln 3-\ln 2$

k. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{\left(e^x+1\right)^3}} \int_0^{\ln 3}\left(e^x+1\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(e^x+1\right) = \left[2\left(e^x+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\ln 3} = 4-2\sqrt{2}$

l. $\int_1^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{2x}dx$. Đặt : $t=\sqrt{2+\ln x} \to t^2-2=\ln x; \Rightarrow 2tdt=\frac{dx}{x}; x=1 \to t=\sqrt{2}, x=e \to t=\sqrt{3}$

Vậy : $\int_1^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{2x}dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} t.tdt = \left(\frac{1}{3}t^3\right)_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3}$

m. $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x}\ln xdx$. Đặt : $t=\sqrt{1+3\ln x} \leftrightarrow t^2-1=3\ln x; 2tdt=\frac{3dx}{x}; x=1 \to t=1; x=e \to t=2$

Vậy : $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x}\ln xdx = \int_1^e \ln x.\sqrt{1+3\ln x}.\frac{dx}{x} = \int_1^2 \frac{t^2-1}{3}t\frac{2}{3}tdt = \frac{2}{9}\int_1^2\left(t^4-t^2\right)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)_1^2 = \frac{116}{135}$

n. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx$. Đặt : $t=\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x} \Rightarrow t^2=\cos^2 x+4\sin^2 x; \Leftrightarrow 2tdt=3\sin 2xdx; x=0$
$\to x=0; x=\frac{\pi}{2} \to t=2$

Vậy : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx = \int_0^2 \frac{2}{3}tdt.\frac{1}{t} = \frac{2}{3}\int_1^2 dt = \left(\frac{2}{3}t\right)_0^2 = \frac{4}{3}$

o. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\sin^3 x}{1+\sin^2 x}dx$. Đặt : $t=1+\sin^2 x \Rightarrow dt=\sin 2xdx; \sin^2 x=t-1; x=0 \to t=1; x=\frac{\pi}{2} \to t=2$

Vậy : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\sin^3 x}{1+\sin^2 x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x.\sin 2xdx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t-1)dt}{t} = \frac{1}{2}\int_1^2\left(1-\frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{2}\left(t-\ln|t|\right)_1^2 = \frac{1-\ln 2}{2}$

p. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2xdx}{2\sin^2 x+\cos^2 x}$. Đặt : $t=2\sin^2 x+\cos^2 x \Rightarrow dt=\sin 2xdx; x=0 \to t=1; x=\frac{\pi}{6} \to t=\frac{5}{4}$

Vậy : $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2xdx}{2\sin^2 x+\cos^2 x} = \int_1^{\frac{5}{4}} \frac{dt}{t} = \ln|t|_1^{\frac{5}{4}} = \ln\frac{5}{4}$

2.Dạng 2.

Bài 2. Tính các tích phân sau bằng phương pháp dổi biến số dạng 2

a. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Đặt : $x=\sin t \Rightarrow dx = \text{costdt;x=0} \to \text{t=0;x=}\frac{1}{2} \to t=\frac{\pi}{6}; \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t$.(Do $t\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right] \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\text{costdt}}{\text{cost}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}dt=(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$.

b. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$

Đặt : $x=2\sin t \Rightarrow dx=2\cos tdt; x=0\to t=0; x=1\to t=\frac{\pi}{6};\sqrt{4-x^2}=2\cos t$

$\Leftrightarrow \int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{(2\sin t)^3.2\cos tdt}{2\cos t}=8\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 t\sin tdt=8\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\cos^2 t\right)d\left(-\cos t\right)=8\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\cos t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{3}-3\sqrt{3}$

c. $\int_1^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

- Đặt : $x=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos tdt; x=1\to t=\frac{\pi}{6}; x=2\to t=\frac{\pi}{2};\sqrt{4-x^2}=2\cos t$
- Vậy :
$$\int_1^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t.2\cos t.2\cos tdt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 2tdt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\left(1-\cos 4t\right)dt=\left(2t-\frac{1}{2}\sin 4t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

d. $\int_0^3\frac{dx}{x^2+3}$

- Đặt : $x=\sqrt{3}\tan t\Rightarrow dx=\sqrt{3}\frac{1}{\cos^2 t}dt; x=0\to t=0; x=3\to t=\frac{\pi}{3}; x^2+3=3\left(1+\tan^2 t\right)$
- $\int_0^3\frac{dx}{x^2+3}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}dt}{\cos^2 t3\left(1+\tan^2 t\right)}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{3}dt=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$

e. $\int_0^1\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)}=\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2}\right)dx=I-J\ (1)$

- Tính : $I=\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}$. Đặt : $x=\tan t\Rightarrow dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt; x=0\to t=0, x=1\to t=\frac{\pi}{4};1+x^2=1+\tan^2 t$
$\Rightarrow J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos^2 t\left(1+\tan^2 t\right)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$
- Tính : $J=\int_0^1\frac{dx}{x^2+3}$. Đặt : $x=\sqrt{3}\tan t\Rightarrow dx=\sqrt{3}\frac{dt}{\cos^2 t}.x=0\to t=0; x=3\to t=\frac{\pi}{3}$

- Vậy : $I=\int_0^1\frac{dx}{x^2+3}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}dt}{\cos^2 t3\left(1+\tan^2 t\right)}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{3}dt=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$
- Do đó : I-J= $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$

f. $\int_0^1\frac{xdx}{x^4+x^2+1}$.

- Đặt : $x^2=t\Rightarrow dt=2xdx; x=0\to t=0; x=1\to t=1\Rightarrow\int_0^1\frac{xdx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{t^2+t+1}=\frac{1}{2}I$
- Tính : $I=\int_0^1\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dt$. Đặt : $t+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan u\Rightarrow dt=\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2 u}du$
- $\Leftrightarrow\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\left(1+\tan^2 u\right); t=0\to u=\frac{\pi}{6}; t=1\to u=\frac{\pi}{3}$
- $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2 u\frac{3}{4}\left(1+\tan^2 u\right)}du=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}du=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}u\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$

g. $\int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

- Ta có : $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\Rightarrow x+1=\tan t\to dx=\frac{dt}{\cos^2 t}; x=-1\to t=0; x=0\to t=\frac{\pi}{4}$
- Vậy : $\int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1+\tan^2 t}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\left(1-\tan^2\frac{t}{2}\right)}\frac{dt}{\cos^2\frac{t}{2}}$
- $\Leftrightarrow -2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\tan\frac{t}{2}-1}-\frac{1}{\tan\frac{t}{2}+1}\right)d\left(\tan\frac{t}{2}\right)=2\ln\left|\frac{\tan\frac{t}{2}+1}{\tan\frac{t}{2}-1}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=2\ln\left|\frac{\tan\frac{\pi}{8}+1}{\tan\frac{\pi}{8}-1}\right|=2\ln\tan\frac{\pi}{4}=0$

h. $\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}dx$

- Đặt : $x=\frac{1}{\sin t}\Rightarrow dx=-\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt\to\left[\begin{array}{l}x=1\to t=\frac{\pi}{2}\\ x=\sqrt{2}\to t=\frac{\pi}{4}\end{array}\right.;\sqrt{x^2-1}=\frac{\cos t}{\sin t}.\ t\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\sin t,\cos t>0$

- Vậy : $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t}.\frac{1}{\left(\frac{1}{\sin t}\right)^3}.-\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = -\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi+2}{8}$

i. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

- Đặt : $x = \tan t \to dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \to \left[\begin{array}{l} x=0 \to t=0 \\ x=1 \to t=\frac{\pi}{4} \end{array}\right.; \sqrt{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{1}{\cos^3 t}$
- $\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 t}.\frac{1}{\frac{1}{\cos^3 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt = \left(\sin t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

k. $\int_2^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

- Đặt : $x = \frac{1}{\sin t} \to dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt; \to \left[\begin{array}{l} x=2 \to t=\frac{\pi}{6} \\ x=\frac{2}{\sqrt{3}} \to t=\frac{\pi}{3} \end{array}\right.; \sqrt{x^2-1} = \frac{\cos t}{\sin t}$
- Vậy : $\int_2^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{1}{\sin t}.\frac{\cos t}{\sin t}} - \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \left(-t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$

l. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

- Đặt : $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \to t=0 \\ x=\frac{\sqrt{2}}{2} \to t=\frac{\pi}{4} \end{array}\right.; \quad \sqrt{1-x^2} = \cos t$
- Vậy : $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi-2}{8}$

m. $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx = \int_0^2 x\sqrt{1-\left(x-1\right)^2}dx$

- Đặt : $x-1 = \sin t \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sin t \\ dx = \cos t dt \end{array}\right.; \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \to t=-\frac{\pi}{2} \\ x=2 \to t=\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \to \sqrt{2x-x^2} = \cos t$

- $\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin t)\cos t.\cos tdt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2} - \cos^2 td(\cos t)\right)\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$

III. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Bài 1. Tính các tích phân sau

a. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2xdx$ *b.* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x+\sin^2 x\right)\cos xdx$ *c.* $\int_0^{2\pi} x^2\cos xdx$

d. $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx$ *e.* $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x\tan^2 xdx$ *f.* $\int_0^1 (x-2)e^{2x}dx$

g. $\int_0^{\ln 2} xe^x dx$ *h.* $\int_1^e x\ln xdx$ *i.* $\int_2^3 \ln\left(x^2-x\right)dx$

k. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\sin 5xdx$ *l.* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin 2xdx$ *m.* $\int_1^e \ln^3 xdx$

o. $\int_1^e x^3\ln^2 xdx$ *p.* $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln x}{x^2}dx$ *q.* $\int_{-1}^0 x\left(e^{2x}+\sqrt[3]{x+1}\right)dx$

GIẢI

a. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2xdx$

- Đặt : $\left[\begin{array}{l} u=x \to du=dx \\ dv=\sin 2xdx \to v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right. \to \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2xdx = -\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos 2xdx = \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x+\sin^2 x\right)\cos xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos xdx = I + \frac{1}{3}\sin^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = I + \frac{1}{3} \quad (1)$

Ta có : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xd(\sin x) = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$

Thay vào (1) : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x+\sin^2 x\right)\cos xdx = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$

c. $\int_0^{2\pi} x^2\cos xdx$

$$\int_0^{2\pi} x^2\cos x dx = \int_0^{2\pi} x^2 d(\sin x) = x^2\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x\sin x dx = 2\int_0^{2\pi} x d(\cos x) = 2\left[x\cos x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos x dx\right]$$

$$= 2\left[2\pi - \sin x\Big|_0^{2\pi}\right] = 2[2\pi - 0] = 4\pi$$

$d.\ \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx$

- Đặt : $t = \sqrt{x} \to dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \to 2tdt = dx.x = 0 \to t = 0; x = \frac{\pi^2}{4} \to t = \frac{\pi}{2}$
- Vậy :
  $$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t^2\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t^2 d(\sin t) = 2t^2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4t\sin t dt = \frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2} - J = \frac{\pi^2}{2} - J(1)$$
- Tính : $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4t\sin t dt = -4\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t d(\cos t)\right] = -4\left[t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t dt\right] = -4\left[0 + \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = -4$
- Vậy thay vào (1) ta có : $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx = \frac{\pi^2}{2} + 4$

$e.\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x\tan^2 x dx$

- Đặt : $\begin{cases} u = x \to du = dx \\ dv = \tan^2 x dx \to v = \tan x - x \end{cases} \to \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x\tan^2 x dx = x(\tan x - x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan x - x)dx = \frac{3\pi}{4} - J(1)$
- Tính $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan x - x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x dx = x\tan x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{d(\cos x)}{\cos x} - \frac{1}{2}x^2\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$
  $$= \pi\sqrt{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right) + \ln(\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \pi\sqrt{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{2}\ln 2$$

Vậy thay vào (1) thì : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x\tan^2 xdx = \frac{3\pi}{4} - \left(\pi\sqrt{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{2}\ln 2\right)$

$f.\ \int_0^1 (x-2)e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x-2)d\left(e^{2x}\right) = \frac{1}{2}\left[(x-2)e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2x}dx\right] = \frac{1}{2}\left[2 - e^{-2} - \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1\right]$

$= 1 - \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{2e^2} - \frac{e^2}{4}$

$g.\ \int_0^{\ln 2} xe^x dx = \int_0^{\ln 2} xd\left(e^x\right) = xe^x\Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x dx = 2\ln 2 - e^x\Big|_0^{\ln 2} = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1$

$h.\ \int_1^e x\ln xdx = \frac{1}{2}\int_1^e \ln xd\left(x^2\right) = \frac{1}{2}\left[x^2\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x^2\frac{1}{x}dx\right] = \frac{1}{2}\left[e^2 - \frac{1}{2}x^2\Big|_1^e\right] = \frac{e^2+1}{4}$

$k.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\sin 5xdx$

- Đặt : $\begin{cases} u = e^{3x} \to du = 3e^{3x} \\ dv = \sin 5xdx \to v = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{cases} \to I = -\frac{1}{5}\cos 5x.e^{3x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\cos 5x = \frac{1}{5} + J(1)$
- Đặt : $\begin{cases} u' = e^{3x} \to du' = 3e^{3x} \\ dv' = \cos 5xdx \to v' = \frac{1}{5}\sin 5x \end{cases} \to J = \frac{1}{5}e^{3x}\sin 5x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\sin 5xdx = \frac{1}{5}e^{3\frac{\pi}{2}} - I(2)$
- Từ (1) và (2) ta có hệ : $\begin{cases} I - J = \frac{1}{5} \\ I + J = \frac{1}{5}e^{3\frac{\pi}{2}} \end{cases} \to I = \frac{e^{3\frac{\pi}{2}}+1}{10}$

$l.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin 2xdx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin x.\cos xdx$

- Đặt : $\begin{cases} u = \cos x \to du = -\sin xdx \\ dv = e^{\cos x}\sin xdx \to v = -e^{\cos x} \end{cases} \to I = -2e^{\cos x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^{\cos x}dx = 2e + 2e^{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$

$m.\ \int_1^e \ln^3 xdx$

- Đặt : $\begin{cases} u = \ln^3 x \to du = \frac{3\ln^2 x}{x}dx \\ dv = dx \to v = x \end{cases} \to I = x\ln^3 x\Big|_1^e - 3\int_1^e \ln^2 xdx = e - 3J(1)$

- Đặt : $\begin{cases} u'=\ln^2 x \to du'=\dfrac{2\ln x}{x}dx \\ dv'=dx \to v'=x \end{cases} J=x\ln^2 x\Big|_1^e - 2\int_1^e \ln xdx = e-2K(2)$
- Đặt : $\begin{cases} u''=\ln x \to u''=\dfrac{dx}{x} \\ dv''=dx \to v''=x \end{cases} \to K=x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e-x\Big|_1^e = 1$
- Thay các kết quả vào (1) ta có : $I=e-3(e-2.1)=6-2e$

o. $\int_1^e x^3\ln^2 xdx$

- Đặt : $\begin{cases} u=\ln^2 x \to du=\dfrac{2\ln x}{x}dx \\ dv=x^3dx \to v=\dfrac{1}{4}x^4 \end{cases} \to I=\dfrac{1}{4}x^4\ln^2 x\Big|_1^e - \dfrac{1}{2}\int_1^e x^3\ln xdx = \dfrac{e^4}{4}-\dfrac{1}{2}J(1)$
- Đặt :
$\begin{cases} u'=\ln x \to du'=\dfrac{dx}{x} \\ dv'=x^3dx \to v'=\dfrac{1}{4}x^4 \end{cases} \to J=\dfrac{1}{4}x^4\ln x\Big|_1^e - \dfrac{1}{4}\int_1^e x^3dx = \dfrac{e^4}{4}-\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{4}x^4\Big|_1^e = \dfrac{e^4}{4}-\dfrac{1}{16}\left(e^4-1\right)=\dfrac{3e^4+1}{16}$
- Thay các kết quả vào (1) ta có : $I=\dfrac{e^4}{4}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3e^4+1}{16}\right)=\dfrac{e^4-1}{32}$

p. $\int_{\frac{1}{e}}^e \dfrac{\ln x}{x^2}dx$

- Đặt : $\begin{cases} u=\ln x \to du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\dfrac{dx}{x^2} \to v=-\dfrac{1}{x} \end{cases} \to I=-\dfrac{1}{x}\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^e - \int_1^e -\dfrac{1}{x^2}dx = -\left(\dfrac{1}{e}+e\right)-\dfrac{1}{x}\Big|_{\frac{1}{e}}^e = -\dfrac{2}{e}$

q. $\int_{-1}^0 x\left(e^{2x}+\sqrt[3]{x+1}\right)dx = \int_{-1}^0 xe^{2x}dx + \int_{-1}^0 x\sqrt[3]{x+1}dx = I+K(1)$

- Đặt :
$\begin{cases} u=x \to u=dx \\ dv=e^{2x}dx \to v=\dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \to I=\dfrac{1}{2}xe^{2x}\Big|_{-1}^0 - \dfrac{1}{2}\int_{-1}^0 e^{2x}dx = -\dfrac{1}{2e^2}-\dfrac{1}{4}e^{2x}\Big|_{-1}^0 = -\dfrac{1}{2e^2}-\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{e^2}\right)=-\dfrac{e^2+1}{4}(2)$
- Đặt : $\sqrt[3]{x+1}=t \to t^3=x+1 \to \begin{cases} x=t^3-1 \\ dx=3t^2dt \end{cases}; x=-1 \to t=0; x=0 \to t=1$

- Vậy : $I=\int_0^1\left(t^3-1\right)t.3t^2dt=3\int_0^1\left(t^6-t^3\right)dt=3\left(\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{4}t^4\right)\Big|_0^1=3\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{9}{28}$

IV. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ CÓ CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bài 1. Tính các tích phân sau

$a.\ \int_0^2 \left\|x-2\right\|dx$	$b.\ \int_0^2 \left\|x^3-x\right\|dx$	$c.\ \int_0^2 \left\|x^2+2x-3\right\|dx$
$d.\ \int_{-3}^3 \left\|x^2-1\right\|dx$	$e.\ \int_{-2}^5 \left(\left\|x+2\right\|-\left\|x-2\right\|\right)dx$	$f.\ \int_0^3 \left\|2^x-4\right\|dx$
$g.\ \int_1^4 \sqrt{x^2-6x+9}dx$	$h.\ \int_0^3 \sqrt{x^3-4x^2+4}dx$	$i.\ \int_{-1}^1 \sqrt{4-\left\|x\right\|}dx$

GIẢI

Bài 1.

$a.\ \int_0^2 |x-2|dx$. Do : $x\in[0;2]\Rightarrow x-2<0,\Leftrightarrow |x-2|=2-x$

- Vậy : $I=\int_0^2(2-x)dx=\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^2=4-2=2$

$b.\ \int_0^2 |x^3-x|dx$. Do : $f(x)=x^3-x=x\left(x^2-1\right)=0\leftrightarrow x=0,x=-1;x=1$

- $\Rightarrow f(x)>0\forall x\in[1;2];\ f(x)<0\forall x\in[0;1]$
- Vậy : $I=\int_0^1\left(x-x^3\right)dx+\int_1^2\left(x^3-x\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1+\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}^2\right)\Big|_1^2=\frac{5}{2}$

$c.\ \int_0^2 |x^2+2x-3|dx$. Vì : $f(x)=x^2+2x-3=0\to x=1,x=-3\Rightarrow f(x)>0\forall x\in[1;2];\ f(x)<0\forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow I=\int_0^1-f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1\left(3-2x-x^2\right)dx+\int_1^2\left(x^2+2x-3\right)dx$

$=\left(3x-x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1+\left(\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right)\Big|_1^2=\left(3-1-\frac{1}{3}\right)+\left[\left(\frac{8}{3}+4-6\right)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)\right]=5$

$d.\ \int_{-3}^3 |x^2-1|dx$.

- Vì : $f(x)=x^2-1=0\to x=-1;x=1\Rightarrow f(x)>0\forall x\in[-3;-1]\cup[1;3];\ f(x)<0\forall x\in[-1;1]$

- Vậy : $I=\int_{-3}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\int_{-1}^1\left(1-x^2\right)dx+\int_1^3\left(x^2-1\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_{-3}^{-1}+\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^1+\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_1^3=$

$\Rightarrow I=\frac{20}{3}+\frac{4}{3}+\frac{16}{3}=\frac{40}{3}$

e. $\int_{-2}^{5}\left(|x+2|-|x-2|\right)dx$.

- Lập bảng xét dấu : $f(x)=4\forall x\in[-2;2];\ f(x)=2x\forall x\in[2;5]$

-Vậy : $\int_{-2}^{5} f(x)dx=\int_{-2}^{2}4dx+\leftarrow\int_{2}^{5}2xdx=4x\Big|_{-2}^{2}+x^2\Big|_{2}^{5}=16+32-4=44$

$f.\ \int_0^3\left|2^x-4\right|dx$

- Nhận xét : $2^x-4>0\Leftrightarrow x>2.\Rightarrow f(x)>0\forall x\in[2;3];\ f(x)<0\forall x\in[0;2]$

- Vậy :

$$I=\int_0^2\left(4-2^x\right)dx+\int_2^3\left(2^x-4\right)dx=\left(4x-\frac{1}{\ln 2}2^x\right)\Big|_0^2+\left(\frac{1}{\ln 2}2^x-4x\right)\Big|_2^3=\left(8-\frac{3}{\ln 2}\right)+\left(\frac{4}{\ln 2}-4\right)=4+\frac{1}{\ln 2}$$

$g.\ \int_1^4\sqrt{x^2-6x+9}dx=\int_1^4|x-3|dx$

- Ta có : $x-3>0\forall x\in[3;4];x-3<0\forall x\in[1;3]$

-Vậy : $I=\int_1^3(3-x)dx+\int_3^4(x-3)sx=\left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^3+\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\Big|_3^4=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

h. $\int_0^3\sqrt{x^3-4x^2+4x}dx=\int_0^3|x-2|\sqrt{x}dx$

-Vì : $f(x)>0\forall x\in[2;3];\ f(x),<0\forall x\in[0;2]$

- $\Rightarrow I=\int_0^2(2-x)\sqrt{x}dx+\int_2^3(x-2)\sqrt{x}dx=$

$$t=\sqrt{x}\to t^2=x\Leftrightarrow dx=2tdt;\left[\begin{array}{l}x=0\to t=0;x=2\to t=\sqrt{2}\\ x=3\to t=\sqrt{3}\end{array}\right.\Rightarrow f(x)dx=\left[\begin{array}{l}\left(2-t^2\right)t2tdt=\left(4t^2-2t^4\right)dt\\ \left(2t^4-4t^2\right)dt\end{array}\right.$$

- Vậy : $I=\int_0^{\sqrt{2}}\left(4t^2-2t^4\right)dt+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\left(2t^4-4t^2\right)dt=\left(2t^2-\frac{2}{5}t^5\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}+\left(\frac{2}{5}t^5-2t^2\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}=\frac{18\sqrt{3}}{5}-\frac{16\sqrt{2}}{5}+2$

i. $\int_{-1}^{1}\sqrt{4-|x|}dx=\int_{-1}^{0}\sqrt{4+x}dx+\int_0^1\sqrt{4-x}dx=J+K(1)$

- Tính : $J=\int_{-1}^{0}\sqrt{4+x}dx$; Đặt : $t=\sqrt{4+x}\to t^2=4+x,\leftrightarrow dx=2tdt;x=-1\to t=\sqrt{3},x=0\to t=2$

- Vậy : $J=\int_{\sqrt{3}}^{2}t.2tdt=2\int_{\sqrt{3}}^{2}t^2dt=2\frac{1}{3}t^3\Big|_{\sqrt{3}}^{0}=-2\sqrt{3}$.

- Tính : $K=\int_0^1\sqrt{4-x}dx$. Đặt : $t=\sqrt{4-x}\to t^2=4-x\Leftrightarrow 2tdt=-dx.x=1\to t=\sqrt{3};x=0\to t=2.$

Vậy : $K=-\int_2^{\sqrt{3}}t.2tdt=\int_{\sqrt{3}}^{2}2t^2dt=\frac{2}{3}t^3\Big|_{\sqrt{3}}^{2}=\frac{16}{3}-\sqrt{3}$

Do đó : $I=J+K=-2\sqrt{3}+\frac{16}{3}-\sqrt{3}=\frac{16}{3}-3\sqrt{3}$

Bài 2. Tính các tích phân sau

a. $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ b. $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx$ c. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx$

d. $\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$ e. $\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$ f. $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$

g. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\tan^2 x+\cot^2 x-2}dx$ h. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$ i. $\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}dx$

GIẢI

Bài 2.

a. $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2 x}dx=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$

-Do : $x\in[0;\pi]\to \sin x>0.\Rightarrow|\sin x|=\sin x$; $x\in[\pi;2\pi]\to\sin x<0\Rightarrow|\sin x|=-\sin x$

Vậy : $I=\sqrt{2}\left(\int_0^{\pi}\sin x dx+\int_{\pi}^{2\pi}-\sin x dx\right)=\sqrt{2}\left(-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)=\sqrt{2}(1+1+1+1)=4\sqrt{2}$

b. $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}dx=\int_0^{\pi}|\cos x-\sin x|dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$

Do : $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}>\frac{\pi}{2}\to\pi>x>\frac{\pi}{4}$. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+k\pi\to 0<x<\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow I=\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]dx=\sqrt{2}\left[-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\right]=-2\sqrt{2}$$

c. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx$

- Do : $\sin x<0\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$; $\sin x>0\Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

- Vậy : $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\sin x dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1-0-(0-1)=2$

$d.\ \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$

Vì : $1-\sin x=\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2\Rightarrow\sqrt{1-\sin x}=\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

Mặt khác : $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0\Leftrightarrow\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}>\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow\frac{x}{2}>\frac{\pi}{4}+k\pi;\Leftrightarrow x>\frac{\pi}{2}+k2\pi$

Vậy :

$$I=-\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx=-2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}+2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-4\sqrt{2}$$

$e.\ \int_{0}^{2\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx$

Vì : $1+\cos 2x=2\cos^2 x\Rightarrow\sqrt{1+\cos 2x}=\sqrt{2}|\cos x|$;

Do đó : $\Rightarrow I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2}\cos x dx+\int_{3\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{2}\cos x dx=\sqrt{2}\left[\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}+\sin x\Big|_{3\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\right]=4\sqrt{2}$

$f.\ \int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}dx=\sqrt{2}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx\right)=\sqrt{2}\left(\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=2\sqrt{2}$

$g.\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\tan^2 x+\cot^2 x-2}dx$

- Vì : $\tan^2 x+\cot^2 x-2=\frac{4\cos^2 2x}{\sin^2 2x}\Rightarrow\sqrt{\tan^2 x+\cot^2 x-2}=2\left|\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right|;x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow 2x\in\left[\frac{\pi}{3};2\frac{\pi}{3}\right]$

$$\Rightarrow I=\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}dx=\right)=\ln|\sin 2x|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}-\ln|\sin 2x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\ln\frac{3}{4}=\ln 3-2\ln 2$$

$h.\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$

Vì : $\cos x-\cos^3x=\cos x\left(1-\cos^2x\right)=\cos x\sin^2x\Rightarrow\sqrt{\cos x-\cos^3x}=|\sin x|\sqrt{\cos x}$

$$\Rightarrow I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\sin x\cos x\sqrt{\cos x}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\sqrt{\cos x}dx=J+K$$

* Tính J: Đặt : $\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{\cos x}\rightarrow t^2=\cos x\Rightarrow 2tdt=-\sin xdx \\ x=-\frac{\pi}{2}\rightarrow t=0;x=0\rightarrow t=1;x=\frac{\pi}{2}\rightarrow t=0\end{array}\right.$

Do đó : $J=\int_0^1 t^2t.2tdt=2\int_0^1 t^4dt=\frac{2}{5}t^5\Big|_0^1=\frac{2}{5}$

* Tính K. Giống như trên ,ta có :

$$K=\int_1^0 2t^5dt=-2\int_0^1 t^5dt=-\frac{2}{5}t^5\Big|_0^1=-\frac{2}{5}\Rightarrow I=J+K=0$$

V. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ HỮU TỶ

* Trước khi làm bài tập , tổng hợp cho HS các phương pháp phân tích đã hướng dẫn .

Bài 1. Tính các tích phân sau

a. $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x+x^3}$ b. $\int_0^1\frac{dx}{x^2-5x+6}$ c. $\int_0^3\frac{x^3dx}{x^2+2x+1}$

d. $\int_0^1\frac{x}{(1+2x)^3}dx$ e. $\int_2^3\frac{x^2dx}{(1-x)^9}$ f. $\int_1^4\frac{dx}{x^2(1+x)}$

g. $\int_2^4\frac{dx}{x(x-1)}$ h. $\int_0^1\frac{(4x+11)dx}{x^2+5x+6}$ i. $\int_0^1\frac{x^3+x+1}{x+1}dx$

k. $\int_{-1}^0\frac{2x^3-6x^2+9x+9}{x^2-3x+2}dx$ l. $\int_2^3\frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}dx$ m. $\int_0^1\frac{x^2}{(3x+1)^3}dx$

GIẢI

a. $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x+x^3}$

- Phân tích : $f(x)=\frac{1}{x+x^3}=\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x\left(1+x^2\right)}$
- Đồng nhất hệ số hai tử số ta có : $\begin{cases}A+B=0\\C=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=0\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$
- $\Leftrightarrow\int_1^{\sqrt{3}}f(x)dx=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\left(\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{\ln3-\ln2}{2}$

b. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-5x+6}$

- Phân tích : $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$
- Vậy : $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx=\left(\ln|x-3|-\ln|x-2|\right)\Big|_0^1=2\ln 2-\ln 3$

c. $\int_0^3 \frac{x^3dx}{x^2+2x+1}$.

- Phân tích : $f(x)=\frac{x^3}{x^2+2x+1}=x-2+\frac{5x+2}{x^2+2x+1}=x-2+\frac{5}{2}\left(\frac{2x+2}{x^2+2x+1}\right)-\frac{3}{(x+1)^2}$
- Vậy : $I=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3\left(x-2+\frac{5}{2}\left(\frac{2x+2}{x^2+2x+1}\right)-\frac{3}{(x+1)^2}\right)dx$
- $\Leftrightarrow=\left[\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2}\ln(x+1)^2+\frac{3}{x+1}\right]\Big|_0^3=-\frac{3}{4}-10\ln 2$

d. $\int_0^1 \frac{x}{(1+2x)^3}dx$.

- Phân tích : $f(x)=\frac{x}{(1+2x)^3}=\frac{A}{(1+2x)^3}+\frac{B}{(1+2x)^2}+\frac{C}{1+2x}=\frac{4Cx^2+(2B+4C)x+A+B+C}{(1+2x)^3}$
- Đồng nhất hệ số hai tử số : $\begin{cases}4C=0\\2B+4C=1\\A+B+C=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{2}\\B=\frac{1}{2}\\C=0\end{cases}\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2(1+2x)^3}+\frac{1}{2(1+2x)^2}$
- Vậy : $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(-\frac{1}{2(1+2x)^3}+\frac{1}{2(1+2x)^2}\right)dx=\left(\frac{1}{4(1+2x)^2}-\frac{1}{2(1+2x}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{9}$

e. $\int_2^3 \frac{x^2dx}{(1-x)^9}$.

- Phân tích : $f(x)=\frac{x^2}{(1-x)^9}=\frac{1-(1-x^2)}{(1-x)^9}=\frac{1}{(1-x)^9}-\frac{1+x}{(1-x)^8}=\frac{1}{(1-x)^9}-\frac{2-(1-x)}{(1-x)^8}$
- Vậy : $I=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\left(\frac{1}{(1-x)^9}-\frac{2}{(1-x)^8}+\frac{1}{(1-x)^7}\right)dx=\left(\frac{1}{8(1-x)^8}+\frac{2}{7(1-x)^7}-\frac{1}{6(1-x)^6}\right)\Big|_2^3=$

f. $\int_1^4 \frac{dx}{x^2(1+x)}$.

- Phân tích : $f(x)=\frac{1}{x^2(1+x)}=\frac{\text{Ax+B}}{\text{x}^2}+\frac{C}{1+x}=\frac{(A+C)x^2+(A+B)x+B}{x^2(1+x)}$
- Đồng nhất hệ số hai tử số : $\begin{cases}A+C=0\\A+B=0\\B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\B=1\\C=1\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=\frac{-x+1}{x^2}+\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x}$
- Vậy : $I=\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x}\right)dx=\left(-\ln|x|-\frac{1}{x}+\ln|1+x|\right)\Big|_1^4=\ln 5-3\ln 2+\frac{3}{4}$

g. $\int_2^4\frac{dx}{x(x-1)}=\int_2^4\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\Big|_2^4=\ln\frac{3}{2}=\ln 3-\ln 2$

h. $\int_0^1\frac{(4x+11)dx}{x^2+5x+6}$.

- Phân tích : $f(x)=\frac{4x+11}{x^2+5x+6}=\frac{2(2x+5)+1}{x^2+5x+6}=2\frac{2x+5}{x^2+5x+6}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$
- Vậy : $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(2\frac{2x+5}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx=2\ln\left|x^2+5x+6\right|+\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$

i. $\int_0^1\frac{x^3+x+1}{x+1}dx$.

- Phân tích : $f(x)=\frac{x^3+1+x}{x+1}=(x^2-x+1)+\frac{x}{x+1}=(x^2-x+1)+1-\frac{1}{x+1}=(x^2-x+2)-\frac{1}{x+1}$
- Vậy : $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2-x+2-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x-\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=\frac{11}{6}-\ln 2$

k. $\int_{-1}^0\frac{2x^3-6x^2+9x+9}{x^2-3x+2}dx$.

- Phân tích : f(x)=$\frac{2x^3-6x^2+9x+9}{x^2-3x+2}=2x+\frac{5x+9}{x^2-3x+2}=2x+\frac{5x+9}{(x-1)(x-2)}$
- Phân tích : $\frac{5x+9}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{(A+B)x-B-2A}{(x-1)(x-2)}$
- Đồng nhất hệ số hai tử số : $\begin{cases}A+B=5\\-B-2A=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-14\\B=19\end{cases}\Rightarrow f(x)=2x+\frac{19}{x-2}-\frac{14}{x-1}$
- Vậy :
  $I=\int_{-1}^0 f(x)dx=\int_{-1}^0\left(2x+\frac{19}{x-2}-\frac{14}{x-1}\right)dx=\left(x^2+19\ln|x-2|-14\ln|x-1|\right)\Big|_{-1}^0=32\ln 2+19\ln 3-1$

l. $\int_2^3\frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}dx$.

- Phân tích : $f(x)=\dfrac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}=\dfrac{3x^2+3x+3}{(x-1)^2(x+2)}=\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{B}{(x-1)}+\dfrac{C}{x+2}=$
- $\dfrac{(B+C)x^2+(B-2C+A)x+2A-2B+C}{(x-1)^2(x+2)}$. Đồng nhất hệ số hai tử số ta có :
- $\begin{cases}B+C=3\\A+B-2C=3\\2A-2B+C=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=3\\B=2\\C=1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x-1)}+\dfrac{1}{x+2}$
- Vậy : $I=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\left(\dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x-1)}+\dfrac{1}{x+2}\right)dx=\left(-\dfrac{3}{x-1}+2\ln|x-1|+\ln|x+2|\right)\Big|_2^3=\dfrac{3}{2}+\ln 5$

m. $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{(3x+1)^3}dx$.

- Phân tích : $f(x)=\dfrac{x^2}{(3x+1)^3}=\dfrac{A}{(3x+1)^3}+\dfrac{B}{(3x+1)^2}+\dfrac{C}{3x+1}=$
- $\dfrac{9Cx^2+(3B+6C)x+A+B+C}{(3x+1)^3}$. Đồng nhất hệ số hai tử số :
- $\begin{cases}9C=1\\3B+6C=0\\A+B+C=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{9}\\B=-\dfrac{2}{9}\\C=\dfrac{1}{9}\end{cases}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{9(3x+1)^3}-\dfrac{2}{9(3x+1)^2}+\dfrac{1}{9(3x+1)}$
- Vậy : $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\dfrac{1}{9(3x+1)^3}-\dfrac{2}{9(3x+1)^2}+\dfrac{1}{9(3x+1)}\right)dx$
- $=\left(-\dfrac{1}{18}\dfrac{3}{(3x+1)^2}+\dfrac{2}{9}\dfrac{3}{(3x+1)}+\dfrac{1}{9}\ln|3x+1|\right)\Big|_0^1=\dfrac{2}{9}\ln 2-\dfrac{1}{96}$

Bài 2. Tính các tích phân sau :

a. $\displaystyle\int_0^2\frac{1}{x^2-2x+2}dx$ b. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{(3x^2+2)}{x^2+1}dx$ c. $\displaystyle\int_0^2\frac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}dx$

d. $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(x+2)^2(x+3)^2}dx$ e. $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx$ f. $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x^4+1}dx$

g. $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x(1+x^4)}dx$ h. $\displaystyle\int_1^2\frac{1-x^{2008}}{x(1+x^{2008})}dx$ i. $\displaystyle\int_2^3\frac{x^4}{(x^2-1)^2}dx$

k. $\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}dx$	l. $\int_1^2 \frac{1-x^2}{1+x^4}dx$	m. $\int_0^1 \frac{2-x^4}{1+x^2}dx$

GIẢI

a. $\int_0^2 \frac{1}{x^2-2x+2}dx$

- Phân tích : $f(x)=\frac{1}{x^2-2x+2}=\frac{1}{(x-1)^2+1}\Rightarrow x-1=\tan t\rightarrow \left[\begin{array}{l} dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt \\ x=0\rightarrow t=-\frac{\pi}{4}, x=2\rightarrow t=\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$
- Vậy : $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos^2 t\left(1+\tan^2 t\right)}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}dt=t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}$

b. $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\left(3x^2+2\right)}{x^2+1}dx$.

- Phân tích : $f(x)=\frac{3x^2+2}{x^2+1}=3-\frac{1}{x^2+1}$
- Vậy : $I=\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx=\int_0^{\sqrt{3}}3dx-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=3x\Big|_0^{\sqrt{3}}-J=3\sqrt{3}-J(1)$
- Tính : $J=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$. Đặt : $x=\tan t\Rightarrow \left[\begin{array}{l} dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt \\ x=0\rightarrow t=0, x=\sqrt{3}\rightarrow t=\frac{\pi}{3}\end{array}\right.$
- Do đó : $J=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 t\left(1+\tan^2 t\right)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow I=3\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

c. $\int_0^2 \frac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}dx$.

- Phân tích : $f(x)=\frac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}=x+2+\frac{1}{x^2+4}$
- Vậy : $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(x+2+\frac{1}{x^2+4}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_0^2+J=6+J(1)$
    - Tính : $J=\int_0^2\frac{1}{x^2+4}dx$. Đặt : $x=2\tan t\Rightarrow \left[\begin{array}{l} dx=\frac{2}{\cos^2 t}dt \\ x=0\rightarrow t=0, x=2\rightarrow t=\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$

- $\Rightarrow J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t.4\left(1+\tan^2 t\right)} dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{1}{4}t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{16}$. Thay vào (1) : $I = 6 + \frac{\pi}{16}$

$d.\quad \int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2(x+3)^2} dx.$

- Phân tích :

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)^2(x+3)^2} = \frac{(x+3)-(x+2)}{(x+2)^2(x+3)^2} = \frac{1}{(x+3)(x+2)^2} - \frac{1}{(x+2)(x+3)^2} = J - K$$

- Tính : $J = \frac{1}{(x+3)(x+2)^2}$. Phân tích : $\frac{1}{(x+3)(x+2)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$
- $g(x) = \frac{1}{(x+3)(x+2)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (4A+5B+C)x + 4A+6B+3C}{(x+3)(x+2)^2}$
- Đồng nhất hệ số hai tử số : $\begin{cases} A+B=0 \\ 4A+5B+C=0 \\ 4A+6B+3C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$
- Vậy :

$$J = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}\right)dx = \left(\ln|x+3| - \ln|x+2| - \frac{1}{x+2}\right)\Big|_0^1 = 3\ln 2 - 2\ln 3 - \frac{2}{3}$$

Tính : $K = \int_0^1 \frac{1}{(x+2)(x+3)^2} dx$

- Phân tích :

$$h(x) = \frac{1}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+3)} + \frac{C}{(x+3)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (6A+5B+C)c + 9A+6B+2C}{(x+2)(x+3)^2}$$

- Đồng nhất hệ số hai tử số : $\begin{cases} A+B=0 \\ 6A+5B+C=0 \\ 9A+6B+2C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases} \Rightarrow h(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+3)} - \frac{1}{(x+3)^2}$
- $K = \int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+3)} - \frac{1}{(x+3)^2}\right)dx = \left(\ln|x+2| - \ln|x+3| + \frac{1}{x+3}\right)\Big|_0^1 = 2\ln 3 - 3\ln 2 - \frac{1}{12}$

Do đó : I$= 3\ln 2 - 2\ln 3 - \frac{2}{3}$-($2\ln 3 - 3\ln 2 - \frac{1}{12}$)$= -\frac{7}{12}$

$e.\quad \int_0^1 \frac{x^3+x+1}{x^2+1} dx.$

- Phân tích : $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2+1} = x + \frac{1}{x^2+1}$

- Do đó : $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1-J=\frac{1}{2}-J(1)$
- Tính : $J=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$. Đặt : $x=\tan t\Rightarrow\left[\begin{array}{l} dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt \\ x=0\to t=0,x=1\to t=\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$
- Do đó : $J=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 t\left(1+\tan^2 t\right)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{3}$

$f.\ \int_0^1\frac{x}{x^4+1}dx.$

- Đặt : $x^2=\tan t\Rightarrow\left[\begin{array}{l} xdx=\frac{1}{2\cos^2 t}dt \\ x=0\to t=0;x=1\to t=\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$
- Vậy : $\int_0^1\frac{x}{x^4+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\cos^2 t\left(1+\tan^2 t\right)}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$

$g.\ \int_1^2\frac{1}{x\left(1+x^4\right)}dx.$

- Phân tích : $f(x)dx=\frac{1}{x\left(1+x^4\right)}dx=\frac{x^3dx}{x^4\left(1+x^4\right)}=\frac{1}{4}\frac{d\left(1+x^4\right)}{x^4\left(1+x^4\right)}$
- Do đó : Đặt : $t=1+x^4\Rightarrow\left[\begin{array}{l} dt=4x^3dx \\ x=1\to t=2,x=2\to t=5\end{array}\right.\Leftrightarrow f(x)dx=\frac{dt}{4(t-1)t}$
- $\Rightarrow I=\int_1^2 f(x)dx=\int_2^5\frac{dt}{4t(t-1)}=\frac{1}{4}\int_2^5\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|\right)\Big|_2^5=\frac{3\ln 2-\ln 5}{4}$

$h.\ \int_1^2\frac{1-x^{2008}}{x\left(1+x^{2008}\right)}dx.$

- Phân tích : $f(x)=\frac{1-x^{2008}}{x\left(1+x^{2008}\right)}=\frac{1}{x\left(1+x^{2008}\right)}-\frac{x^{2008}}{x\left(1+x^{2008}\right)}=\frac{x^{2007}}{x^{2008}\left(1+x^{2008}\right)}-\frac{x^{2007}}{\left(1+x^{2008}\right)}$
- Vậy : $I=\int_1^2\frac{x^{2007}}{x^{2008}\left(1+x^{2008}\right)}dx-\int_1^2\frac{x^{2007}}{1+x^{2008}}dx=J-\frac{1}{2007}\int_1^2\frac{x^{2007}}{1+x^{2008}}dx==J-\frac{1}{2007}\ln\left|1+x^{2008}\right|\Big|_1^2=$

Tính : $J=\int_1^2\frac{x^{2007}}{x^{2008}\left(1+x^{2008}\right)}dx$

- Đặt : $t = x^{2008} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} dt = 2008x^{2007}dx \\ x=1 \to t=1, x=2 \to t=2^8 \end{array}\right. \Leftrightarrow f(x)dx = \frac{1}{2008}\frac{dt}{t(t+1)} = \frac{1}{2008}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$
- Vậy : $J = \int_1^{2^8} \frac{1}{2008}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2008}\left(\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\right)\Big|_1^{2^8} = \frac{9\ln 2 - \ln(1+2^8)}{2008}$

Cho nên : $I = \frac{9\ln 2 - \ln(1+2^8)}{2008} - \frac{\ln(1+2^8)+\ln 2}{2007}$

i. $\int_2^3 \frac{x^4}{(x^2-1)^2}dx$

- Phân tích : $f(x) = \frac{x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-1+1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{(x^2-1)^2} = 1 + \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = J + K$

Tính $J = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \left(x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Big|_2^3 = 1 + \ln 2 + \ln 3$

Tính : $K = \int_2^3 \frac{1}{(x^2-1)^2}dx$

- Phân tích :

$g(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}\right] = \frac{1}{2}(h(x) - p(x))$

- $h(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (C-2A)x + A + C - B}{(x+1)(x-1)^2}$
- Đồng nhất hệ số hai tử số : $\begin{cases} A+B=0 \\ C-2A=0 \\ A+C-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases} \leftrightarrow h(x) = \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}$
- Vậy : $\int_2^3 h(x)dx = \int_2^3 \left[\frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}\right]dx = \left[\frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)}\right]\Big|_2^3 =$

Cho nên : $\int_2^3 h(x)dx = \frac{\ln 2 - \ln 3 + 1}{4}$

- $p(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (C+2A)x + A - C - B}{(x+1)(x-1)^2}$

- Đồng nhất hệ số hai tử số : $\begin{cases} A+B=0 \\ C+2A=0 \\ A-C-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{4} \\ B=-\dfrac{1}{4} \\ C=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \leftrightarrow h(x)=\dfrac{1}{4(x+1)}-\dfrac{1}{4(x-1)}-\dfrac{1}{2(x+1)^2}$

- $\int_2^3 p(x)dx=\int_2^3\left[\dfrac{1}{4(x+1)}-\dfrac{1}{4(x-1)}-\dfrac{1}{2(x+1)^2}\right]dx=\left[\dfrac{1}{4}\ln|x+1|-\dfrac{1}{4}\ln|x-1|+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x+1)}\right]\Bigg|_2^3=$

Cho nên : $\int_2^3 p(x)dx=\dfrac{\ln 2-\ln 3}{4}-\dfrac{1}{12}$

Vậy : $I=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln 2-\ln 3+1}{4}-\left(\dfrac{\ln 2-\ln 3}{4}-\dfrac{1}{12}\right)\right)=\dfrac{1}{3}$

k. $\int_0^2 \dfrac{1}{4+x^2}dx$

- Đặt : $x=2\tan t \rightarrow \left[\begin{array}{l} dx=2\dfrac{1}{\cos^2 t}dt \\ x=0\rightarrow t=0, x=2\rightarrow t=\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right. \Rightarrow f(x)dx=\dfrac{2dt}{\cos^2 t.4(1+\tan^2 t)}=\dfrac{1}{2}dt$

- Vậy : $I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{2}dt=\dfrac{1}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{8}$

l. $\int_1^2 \dfrac{1-x^2}{1+x^4}dx$

- Phân tích : $f(x)dx=\dfrac{1-x^2}{1+x^4}dx=\dfrac{\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)dx}{\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)}$

- Đặt :

$t=x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} dt=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)dx;\quad t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2 \\ x=1\rightarrow t=2, x=2\rightarrow t=\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow f(x)dx=\dfrac{dt}{t^2-2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{t-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt$

- Vậy : $I=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\int_2^{\frac{5}{2}}\left(\dfrac{1}{t-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left|\dfrac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\right)\Bigg|_2^{\frac{5}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{6+\sqrt{2}}{6-\sqrt{2}}\right)$

m. $\int_0^1 \dfrac{2-x^4}{1+x^2}dx$

- Phân tích : $f(x)=\dfrac{2-x^4}{1+x^2}=\dfrac{1+1-x^4}{1+x^2}=\dfrac{1}{1+x^2}+1-x^2$
- Vậy : $I=\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx+\int_0^1 (1-x^2)dx=J+\left(x-\dfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=J+\dfrac{2}{3}$
- Tính : $J=\int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2}$. Đặt : $x=\tan t \Rightarrow \left[\begin{array}{l} dx=\dfrac{1}{\cos^2 t}dt \\ x=0\to t=0, x=1\to t=\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right.$
- Do đó : $J=\int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\cos^2 t(1+\tan^2 t)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow I=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{3}$

VI. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

* Nhắc nhở học sinh :

- Thuộc công thức lượng giác : Công thức cộng góc ,nhân đôi ,nhân ba ,hạ bậc
- Thuộc các công thức góc có liên quan đặc biệt : Đối,bù ,phụ hơn kém nhau 1góc bẹt .
- Lẻ sin thì đặt cosx=t , và lẻ cos thì đặt sinx=t . Còn chẵn sin,chẵn cos thì đặt tanx =t
- Đặc biệt chú ý đến hai cận để có thể sử dụng phương pháp đổi biến số dạng 1
- Ngoài ra còn chú ý đến một số công thức tính tích phân như : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$,

  $\int_0^b f(x)dx=\int_0^b f(b-x)dx$

MỘT SỐ BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tính các tích phân sau :

a. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\cos x dx$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{1+3\cos x}dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ e. $\int_0^{\pi} \sin^2 x dx$ f. $\int_0^{\pi} \cos^2 3x dx$

GIẢI

a. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 3x+\sin x}{2}dx=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\cos 3x+\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{3}$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\ln 2}{2}$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx = -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\ln 2}{3}$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - 1) d(\cos x) = \left(\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$

e. $\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0 (1-\cos 2x) dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

f. $\int_0^{\pi} \cos^2 3x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1+\cos 6x) dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}\sin 6x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

Bài 2. Tính các tích phân sau :

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^4 x dx$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx$ c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^5 x dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^3 x) dx$ e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos x+1} dx$ f. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1+\cos x} dx$

GIẢI

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^4 x dx$

- $f(x) = \sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x.\cos^2 x = \frac{1}{4}\frac{1-\cos 4x}{2}.\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{16}(1-\cos 4x+\cos 2x-\cos 4x\cos 2x)$
- Do đó : $f(x) = \frac{1}{32}(2 - 2\cos 4x + \cos 2x - \cos 6x)$
- $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-\cos 6x-2\cos 4x+\cos 2x) dx = \frac{1}{32}\left(2x - \frac{1}{6}\sin 6x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{32}$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (1-\sin^2 x) d(\sin x) = \left(\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15}$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x - 2\sin^6 x + \sin^8 x) d(\sin x)$

Vậy : $I=\left(\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{7}+\frac{1}{9}\right)=\frac{48}{315}$

$d.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\text{cos3x+3cosx}}{4}+\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}\right]dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\text{cos3x-sin3x+3cosx-3sinx}\right)dx$

$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{3}\text{cos3x+3sinx-3cosx}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}$

$e.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\text{cosx+1}}dx$

- $f(x)=\frac{\cos^3 x}{\text{cosx+1}}=\frac{\cos^3 x+1}{\text{cosx+1}}-\frac{1}{\text{cosx+1}}=\left(\cos^2 x-\text{cosx+1}\right)-\frac{1}{\text{cosx+1}}=\frac{3+\text{cos2x-2cosx}}{2}-\frac{1}{\text{cosx+1}}$
- $\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3+\text{cos2x-2cosx}}{2}\right)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\text{cosx+1}}dx=\frac{1}{2}\left(3x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-J=\frac{3\pi-4}{4}-J$

Tính : $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\text{cosx+1}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1;\Rightarrow I=\frac{3\pi-8}{4}$

$f.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos x}{1+\text{cosx}}dx$

- $f(x)=\frac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}=\frac{2\sin x\cos^2 x}{1+\cos x}=\left[\frac{2\cos^2 x-2}{1+\cos x}+\frac{2}{1+\cos x}\right].\text{sinx}=\left[2(\text{cosx-1})+\frac{2}{1+\cos x}\right]\text{sinx}$
- $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x-2)dx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\text{cosx})}{1+\text{cosx}}=\left(2\sin x-2x-2\ln|1+\text{cosx}|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2-\pi-2\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$

Bài 3. Tính các tích phân sau :

$a.\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x\,dx$	$b.\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^4 x\,dx$	$c.\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\text{sinxcos}^3 x}$
$d.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$	$e.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{1+\cos x}dx$	$f.\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^4 x.\text{cosx}}$

GIẢI

$a.\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 xdx$

- $\tan^3 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.\frac{\text{sinx}}{\text{cosx}} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}.\frac{\text{sinx}}{\text{cosx}} = \frac{\text{sinx}}{\cos^3 x} - \frac{\text{sinx}}{\text{cosx}}$
- $\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-d\left(\text{cosx}\right)}{\cos^3 x} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(\text{cosx}\right)}{\text{cosx}} = \left[\frac{1}{2\cos^2 x} + \ln\left|\text{cosx}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3-\ln 2}{2}$

$b.\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^4 xdx.$

- $\tan^4 x = \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2}{\cos^4 x} = \frac{1-2\cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^4 x} = \left(1+\tan^2 x\right)\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\cos^2 x} + 1$
- $\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1+\tan^2 x\right) d\left(\text{tanx}\right) - 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\left(\text{tanx}\right) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dx = \left(\text{tanx} + \frac{1}{3}\tan^3 x - 2\tan x + x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi+2}{3}$

$c.\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\text{sinx}\cos^3 x}$

- $\frac{1}{\text{sinx.}\cos^3 x} dx = \frac{1}{\text{tanx}}.\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1+\tan^2 x}{\text{tanx}} d\left(\text{tanx}\right) = \left(\frac{1}{\text{tanx}} + \text{tanx}\right) d\left(\text{tanx}\right)$
- $\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\text{tanx}} + \text{tanx}\right) d\left(\text{tanx}\right) = \left(\ln\left|\text{tanx}\right| + \frac{1}{2}\tan^2 x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\ln 3 - 2}{2}$

$d.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx.$

- $\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}.\text{sinxdx} = \left(\frac{2}{1+\cos^2 x} - 1\right)\text{sinxdx} = \text{d}\left(\text{cosx}\right) - 2.\frac{\text{d}\left(\text{cosx}\right)}{1+\cos^2 x}$
- $\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{d(cosx)} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{d(cosx)}}{1+\cos^2 x} = \text{cosx}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = -1 + 2J$

Tính : $J = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

- Tính : $J=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Đặt : $x=\tan t \Rightarrow \left[\begin{array}{l} dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt \\ x=0\to t=0, x=1\to t=\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$

- Do đó : $J=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t\left(1+\tan^2 t\right)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}-1$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+\cos x}dx$.

- $\frac{\cos^3 x}{1+\cos x}dx=\frac{\cos^3 x+1}{1+\cos x}-\frac{1}{1+\cos x}=\cos^2 x-\cos x+1-\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1+\cos 2x}{2}-\cos x+1-\frac{1}{1+\cos x}$

- $\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3+\cos 2x+2\cos x\right)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\left(3x+\frac{1}{2}\sin 2x+2\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{4}$

f. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^4 x.\cos x}$.

- $\frac{1}{\sin^4 x.\cos x}=\frac{\cos x dx}{\sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)}=\frac{dt}{t^4\left(1-t^2\right)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\cos x \\ x=\frac{\pi}{6}\to t=\frac{\sqrt{3}}{2}; x=\frac{\pi}{3}\to t=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

- $\frac{1}{t^4\left(1-t^2\right)}=\frac{1-t^2+t^2}{t^4\left(1-t^2\right)}=\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^2\left(1-t^2\right)}=\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)$

- $\Rightarrow I=\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right)dt=\left(-\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}}$

- $\Leftrightarrow I=-\frac{14}{3}+\frac{\ln 3}{2}+\frac{8\sqrt{3}}{27}+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}\right)$

Bài 4. Tính các tích phân sau .

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^3 x}\,\sin x\cos^5 x dx$ *b.* $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$ *c.* $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)dx$ *e.* $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan x+e^{\sin x}\cos x\right)dx$ *f.* $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sin^2 x\right)^3\sin 2x dx$

GIẢI

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^3 x}\,\sin x\cos^5 x dx$.

- $\sqrt{1-\cos^3 x}\,\sin x\cos^5 x dx = -\sqrt{1-\cos^3 x}\cos^3 x\cos^2 x\sin x dx$
- Đặt : $t=\sqrt{1-\cos^3 x} \Rightarrow t^2 = 1-\cos^3 x \to \cos^3 x = 1-t^2 \to \left[\begin{array}{l} 2tdt = 3\cos^2 x\sin x dx \\ x=0 \to t=0, x=\frac{\pi}{2} \to t=1 \end{array}\right.$
- Vậy : $I=\int_0^1 t\left(1-t^2\right)\frac{2}{3}tdt = \frac{2}{3}\int_0^1\left(t^2-t^4\right)dt = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{45}$

b. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$.

- $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x} = \frac{\left(\cos x+\sin x\right)^2+\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}{\cos x+\sin x} = 2\cos x$
- $\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x dx = 2\sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 1$

c. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\frac{1}{\cos^2 x}}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x d\left(\tan x\right)}{\sqrt{2+\tan^2 x}}$

- Đặt : $t=\tan x \Rightarrow \to \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4} \to t=1; x=\frac{\pi}{3} \to t=\sqrt{3} \\ f(t)dt = \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}\right.$
- Đặt : $u=\sqrt{1+t^2} \Rightarrow u^2 = 1+t^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tdt = udu \\ t=1 \to u=\sqrt{2}, t=\sqrt{3} \to u=2 \end{array}\right.$
- Vậy : $I=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{udu}{u} = \int_{\sqrt{2}}^{2} du = u\Big|_{\sqrt{2}}^{2} = 2-\sqrt{2}$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)dx$

- Vì : $\sin^4 x+\cos^4 x = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x = 1-\frac{1}{2}\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$

- $\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\right)\cos 2x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{7}{8}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 6x\right)dx=\left(\frac{7}{16}\sin 2x+\frac{1}{48}\sin 6x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0$

$e.\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan x+e^{\sin x}\cos x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{\sin x}\cos x dx$

- Vậy : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{d(\cos x)}{\cos x}+\int_0^{1}e^{\sin x}d(\sin x)=\left(-\ln|\cos x|+e^{\sin x}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln 2+e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-1$

$f.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sin^2 x\right)^3\sin 2x dx$.

- Vì : $\left(1+\sin^2 x\right)'=2\sin x.\cos x=\sin 2x$
- Vậy : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sin^2 x\right)^3 d\left(1+\sin^2 x\right)=\frac{1}{4}\left(1+\sin^2 x\right)^4\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4$

Bài 5. Tính các tích phân sau

$a.\ \int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\ln(\cos x)dx$ $\quad b.\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 x}{\left(\tan^2 x+1\right)^2\cos^5 x}dx$ $\quad c.\ \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 x+9\cos^2 x}dx$

$d.\ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx$ $\quad e.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2-\cos x}$ $\quad f.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}$

GIẢI

$a.\ \int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\ln(\cos x)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(\cos x)d(\cos x)$

- Đặt : $t=\cos x\Rightarrow x=0\to t=1;x=\frac{\pi}{3}\to t=\frac{1}{2}$
- $\Rightarrow I=-\int_1^{\frac{1}{2}}\ln t dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln t dt=t\ln t\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}dt=(t\ln t-t)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{\ln 2-1}{2}$

$b.\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 x}{\left(\tan^2 x+1\right)^2\cos^5 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^3 x}{\left(\tan^2 x+1\right)^2}d(\tan x)$

- Đặt : $t=\tan x\Rightarrow f(x)dx=\frac{t^3}{\left(1+t^2\right)^2}dt=\frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}tdt.x=0\to t=0;x=\frac{\pi}{4}\to t=1$

- Đặt : $u=1+t^2 \Rightarrow t^2=u-1 \to \left[\begin{array}{l} du=2tdt \\ t=0\to u=1; t=1\to u=2 \end{array}\right.$
- Vậy : $I=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{u-1}{u^2}du=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)du=\frac{1}{2}\left(\ln u+\frac{1}{u}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}\ln 2$

c. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x+9\cos^2 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2 x+9}d(\tan x)$

- Đặt : $t=\tan x \Rightarrow x=-\frac{\pi}{3}\to t=-\sqrt{3}; x=\frac{\pi}{3}\to t=\sqrt{3} \Leftrightarrow I=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{dt}{t^2+9}$
- Đặt : $t=3\tan u \Rightarrow \left[\begin{array}{l} dt=3\frac{1}{\cos^2 u}du, t^2+9=9\left(1+\tan^2 u\right) \\ t=-\sqrt{3}\to u=-\frac{\pi}{3}, t=\sqrt{3}\to u=\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$
- Vậy : $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 u.9\left(1+\tan^2 u\right)}du=\frac{1}{9}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}du=\frac{1}{9}u\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{27}$

d. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)dx=\left(\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|-lm\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right)=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\ln 3$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2-\cos x}$

- Đặt : $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow \left[\; x=0\to t=0, x=\frac{\pi}{2}\to t=1;\quad dt=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx; 2-\cos x=2-\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1+3t^2}{1+t^2}\right.$
- Vậy : $I=\int_0^1\frac{2}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{1+3t^2}{1+t^2}\right)}dt=\int_0^1\frac{2}{1+3t^2}dt$
- Đặt : $\sqrt{3}t=\tan u\Rightarrow\left[\begin{array}{l} dt=\frac{1}{\sqrt{3}\cos^2 u}du \\ t=0\to u=0, t=1\to u=\frac{\pi}{3}\end{array}\right.$

- $\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{2}{\sqrt{3}\cos^2u\left(1+\tan^2u\right)}du=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}du=\frac{2}{\sqrt{3}}u\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

$f.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+cosx}$

- Đặt : $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\left[x=0\to t=0,x=\frac{\pi}{2}\to t=1;\quad dt=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx;2-cosx=2+\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{3+t^2}{1+t^2}\right.$
- Vậy : $I=\int_0^1\frac{2}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{3+t^2}{1+t^2}\right)}dt=\int_0^1\frac{2}{3+t^2}dt$
- Đặt : $t=\sqrt{3}\tan u\Rightarrow\left[\begin{array}{l}dt=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2u}du\\ t=0\to u=0,t=1\to u=\frac{\pi}{6}\end{array}\right.$
- $\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\sqrt{3}}{\cos^2u\left(1+\tan^2u\right)}du=2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}du=2\sqrt{3}u\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

Bài 6. Tính các tích phân sau :

$a.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{1+cosx}dx$ $\quad b.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{2-cosx}dx$ $\quad c.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{2+sinx}dx$

$d.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{sinx+cosx+1}dx$ $\quad e.\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx-cosx+1}{sinx+2cosx+3}dx$ $\quad f.\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{cosx.cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

GIẢI

$a.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{1+cosx}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{1+cosx}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx=\left(x-\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$

$b.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{2-cosx}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{2-cosx}-1\right)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2-cosx}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=2J-\frac{\pi}{2}$

Tính : $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2-cosx}$

- Đặt : $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\left[x=0\to t=0, x=\frac{\pi}{2}\to t=1;\quad dt=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx; 2-\cos x=2-\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1+3t^2}{1+t^2}\right.$
- Vậy : $J=\int\limits_0^1\frac{2}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{1+3t^2}{1+t^2}\right)}dt=\int\limits_0^1\frac{2}{1+3t^2}dt$
- Đặt : $\sqrt{3}t=\tan u\Rightarrow\left[\begin{array}{l}dt=\frac{1}{\sqrt{3}\cos^2u}du\\ t=0\to u=0, t=1\to u=\frac{\pi}{3}\end{array}\right.$
- $\Rightarrow J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{2}{\sqrt{3}\cos^2u\left(1+\tan^2u\right)}du=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}du=\frac{2}{\sqrt{3}}u\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\Rightarrow I=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{\pi}{2}$

c. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2+\sin x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{2}{2+\sin x}\right)dx=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\sin x}=\frac{\pi}{2}-2J$

Tính : $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\sin x}$

- Đặt : $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ x=0\to t=0; x=\frac{\pi}{2}\to t=1\end{array}\right.\Leftrightarrow f(x)dx=\frac{dt}{t^2+t+1}=\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$
- Đặt : $t+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan u\Rightarrow dt=\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2u}\Leftrightarrow t=0\to u=\frac{\pi}{6}; t=1\to u=\frac{\pi}{3}$
- $\Rightarrow I=\frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{du}{\cos^2u.\frac{3}{4}\left(1+\tan^2u\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}du=\frac{2\sqrt{3}}{3}u\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$

d. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+\cos x+1}dx$.

- Đặt : $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ x=0\to t=0;x=\frac{\pi}{2}\to t=1\end{array}\right.\Leftrightarrow f(x)dx=\frac{2dt}{\left(t^2+1\right)\left(\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)}=\frac{dt}{t+1}$
- Vậy : $I=\int_0^1\frac{dt}{t+1}=\ln|t+1|\Big|_0^1=\ln 2$

e. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{sinx-cosx+1}}{\text{sinx+2cosx+3}}dx$.

Phân tích :

$$\frac{\text{sinx-cosx+1}}{\text{sinx+2cosx+3}}=A+\frac{B\left(\text{cosx-2sinx}\right)}{\text{sinx+2cosx+3}}+\frac{C}{\text{sinx+2cosx+3}}=\frac{\left(A-2B\right)\text{sinx}+\left(\text{2A+B}\right)\text{cosx}+\left(\text{3A+C}\right)}{\text{sinx+2cosx+3}}$$

Đồng nhất hệ số hai tử số : $\begin{cases}A-2B=1\\ 2A+B=-1\\ 3A+C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\ B=-1\\ C=4\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=-1-\frac{\text{cosx-2sinx}}{\text{sinx+2cosx+3}}+\frac{4}{\text{sinx+2cosx+3}}$

Vậy : $I=\left(-x-\ln\left|\text{sinx+2cosx+3}\right|\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\text{sinx+2cosx+3}}==-\pi-\ln 2+4J$

Tính : $J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\text{sinx+2cosx+3}}$.

- Đặt :

$t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ x=-\frac{1}{2}\to t=-1;x=\frac{\pi}{2}\to t=1\end{array}\right.\Leftrightarrow f(x)dx=\frac{2dt}{\left(t^2+1\right)\left(\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2\left(1-t^2\right)}{1+t^2}+3\right)}=\frac{2dt}{\left(t+1\right)^2+4}$

- Đặt : $t+1=2\tan u\Rightarrow dt=\frac{1}{\cos^2u}du\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\to u=0;t=1\to u=\frac{\pi}{4}\\ \left(t+1\right)^2+4=4\left(1+\tan^2u\right)\end{array}\right.$
- Vậy : $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2du}{\cos^2u.4\left(1+\tan^2u\right)}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}du=\frac{1}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}\Rightarrow I=-\pi-\ln 2+4J+\frac{4\pi}{8}=-\frac{\pi}{2}-\ln 2$

$f.\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

Phân tích : $\frac{1}{\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}.\frac{\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-x\right]}{\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos x-\sin x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow I = \frac{2}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right]dx = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\ln|\cos x| - \ln\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow I = \sqrt{2}\ln\left|\frac{\cos x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\left(\ln\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} - \ln\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}\ln 3$$

Bài 7. Tính các tích phân sau :

$a.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)(2-\cos^2 x)}dx$ $\quad b.\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx$ $\quad c.\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

$d.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos x dx$ $\quad e.\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{1+\cos 2x}$ $\quad f.\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$

GIẢI

$a.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)(2-\cos^2 x)}dx$.

- $f(x)dx = \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1+\sin^2 x)}d(\sin x) = \frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)}dt; t=\sin x. \Rightarrow x=0 \to t=0, x=\frac{\pi}{2} \to t=1$
- Phân tích : $f(t)dt = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} = \frac{(A+B)t^2+(B+C)t+(A+C)}{(1+t)(1+t^2)}$
- Đồng nhất hệ số hai tử số : $\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=-1 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases} \Leftrightarrow f(t)dt = \left(\frac{1}{1+t} - \frac{t}{1+t^2}\right)dt$

- Vậy : $I=\int_0^1\left(\frac{1}{1+t}-\frac{t}{1+t^2}\right)dt=\left(\ln|t+1|-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$

b. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx$.

- Phân tích : $\frac{1}{\sin x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}.\frac{\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-x\right]}{\sin x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos x+\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

- $\Rightarrow f(x)=\sqrt{2}\left[\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\right]\Rightarrow I=\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\right)dx=\sqrt{2}\ln\left|\frac{\cos x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=$

- Vậy : $I=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 3$

c. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

- Phân tích : $\frac{1}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}.\frac{\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-x\right]}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=2\left[\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x-\sin x.\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right]$

- $\Rightarrow f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\Leftrightarrow I=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right]dx=2\ln\left|\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=2\ln\frac{3}{2}$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1)\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1)d(\sin x)=(2x-1)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x dx=\left[(2x-1)\sin x-2\cos x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1+\pi$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{1+\cos 2x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x.d(\tan x)=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x dx=\frac{1}{2}\left[x\tan x+\ln|\cos x|\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}xd(\tan x)=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x dx=\left(x\tan x+\ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 2$

Bài 8. Tính các tích phân sau :

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\sqrt[3]{x}dx$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos xdx$ c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.e^{2x+1}dx$

d. $\int_1^2 \cos(\ln x)dx$ e. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}$ f. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos^2 xdx$

GIẢI

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\sqrt[3]{x}dx$. Đặt : $t=\sqrt[3]{x} \Rightarrow t^3=x, \Leftrightarrow dx=3t^2dt.x=0\to t=0; x=\frac{\pi}{2}\to t=\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$

- Vậy : $I=3\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} t^2\sin tdt=3\left[-\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} t^2d(\cos t)\right]=-3\left(t^2\cos t\left|\begin{matrix}\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\\0\end{matrix}\right.-2\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} t\cos tdt\right)=$
- $\Leftrightarrow I=-3\left(\frac{\pi}{2}\cos\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right)+6\left(t\sin t+\ln|\cos t|\right)\left|\begin{matrix}\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\\0\end{matrix}\right.=-3\left(\frac{\pi}{2}\cos\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right)+6\left(\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right)\sin\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}+\ln\left|\cos\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right|$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2d(\sin x)=x^2\sin x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right.-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx=\frac{\pi^2}{4}+2x.\cos x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right.-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\frac{\pi^2}{4}-\sin x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right.=\frac{\pi^2}{4}-1$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.e^{2x+1}dx$.

- Đặt : $\left[\begin{matrix}u=e^{2x+1}\to du=2e^{2x+1}dx\\dv=\sin 2xdx\to v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{matrix}\right.\Rightarrow I=-e^{2x+1}\cos 2x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right.+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x+1}\cos 2xdx=e^{\pi+1}-e+J$
- Đặt : $\left[\begin{matrix}u'=e^{2x+1}\to du'=2e^{2x+1}dx\\dv'=\cos 2xdx\to v'=\frac{1}{2}\sin 2x\end{matrix}\right.\Rightarrow J=e^{2x+1}\sin 2x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right.-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x+1}\sin 2xdx=-I$
- Vậy ta có hệ : $\begin{cases}I+J=0\\I\_J=e^{\pi+1}-e\end{cases}\Rightarrow I=\frac{e^{\pi+1}-e}{2}$

d. $\int_1^2 \cos(\ln x)dx$.

- Đặt : $t=\ln x \Rightarrow x=e^t; \Leftrightarrow dt=\frac{dx}{x} \to dx=e^t dt. x=1 \to t=0; x=2 \to t=\ln 2$
- $\Rightarrow I=\int_0^{\ln 2} e^t \text{costdt}=\int_0^{\ln 2} e^t d(s\text{int})=e^t \sin t\Big|_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2} e^t \text{costdt}=2\sin(\ln 2)-I \Leftrightarrow 2I=2\sin(\ln 2) \to I=\sin(\ln 2)$

e. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(s\text{inx})}{\cos^2 x}$.

- Đặt : $\left[\begin{array}{l} u=\ln(s\text{inx}) \to du=\frac{\text{cosx}}{\text{sinx}}dx \\ dv=\frac{1}{\cos^2 x}dx \to v=\tan x \end{array}\right. \Rightarrow I=\tan x.\ln(\text{sinx})\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{cosx}}{\text{sinx}}\tan x dx=$
- $\Leftrightarrow I=\sqrt{3}\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{1}{2}-x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3-\frac{3\ln 2}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1)\cos^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1)\cos 2x dx$

- Tính : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$
- Tính : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1)\cos 2x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1)\frac{1}{2}d(\sin 2x)=\frac{2x-1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx=0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d(\cos 2x)$
- Vậy : $I=\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-2$

Bài 9. Tính các tích phân sau :

a. $\int_0^{\pi} e^{2x}\sin^2 x dx$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x dx$ c. $\int_0^{\pi} x\sin x\cos^2 x dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\sin x.\cos^3 x dx$ e. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$ f. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^4 x}$

GIẢI

a. $\int_0^{\pi} e^{2x}\sin^2 xdx$. Sử dụng công thức hạ bậc :

- $I=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}e^{2x}dx-\int_0^{\pi}\frac{1}{2}e^{2x}\text{cos2xdx}=\frac{1}{2}\left(e^{2\pi}-1\right)-J$

Tính : $J=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}e^{2x}\text{cos2xdx}=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}e^{2x}d\left(\sin 2x\right)=\frac{1}{4}\left[e^{2x}\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2e^{2x}\sin 2xdx\right]=0-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}e^{2x}d\left(\text{cos2x}\right)$

- $\Leftrightarrow J=-\frac{1}{4}\left(e^{2x}\text{cos2x}\Big|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}e^{2x}\text{cos2xdx}\right)=\frac{1}{4}e^{2\pi}+\frac{1}{4}-2J\Rightarrow 3J=\frac{e^{2\pi}+1}{4}\Leftrightarrow J=\frac{e^{2\pi}+1}{12}$
- Vậy : $I=\frac{e^{2\pi}-1}{2}-\frac{e^{2\pi}+1}{12}=\frac{5e^{2\pi}-7}{12}$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\tan^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{\cos^2 x}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}xdx=J-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=J-\frac{\pi^2}{32}$

Tính : $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x.\frac{dx}{\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}xd(\text{t anx})=\text{xtanx}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\text{t anxdx}=\frac{\pi}{4}+\ln\left|\text{cosx}\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

Vậy : $I=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi^2}{32}$

c. $\int_0^{\pi}x\sin x\cos^2 xdx$.

- $I=\int_0^{\pi}-\frac{1}{3}xd\left(\cos^3 x\right)=-\frac{1}{3}x\cos^3 x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\cos^2 x\cos xdx=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left(1-\sin^2 x\right)d\left(\text{s inx}\right)$
- Vậy : $I=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\left(\text{s inx-}\frac{1}{3}\sin^3 x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}(0-0)=\frac{\pi}{3}$.

e. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\text{t anx}\right)dx$.

- Đặt : $t=\frac{\pi}{4}-x\Rightarrow dt=-dx\Rightarrow x=0\to t=\frac{\pi}{4};x=\frac{\pi}{4}\to t=0$
- $\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)-dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right]dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\ln 2-\ln\left(1+\tan t\right)\right)dt=\ln 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-I$
- Vậy : $2I=\frac{\pi}{4}\ln 2\Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2$

$f.\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$.

- Phân tích : $\frac{1}{\cos^4 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x} = \tan^2 x.\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$
- Vậy : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x.d(\tan x) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} d(\tan x) = \left(\frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3}$

VII. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ MŨ -LOGARIT

* Nhắc nhở HS :

- Thuộc các công thức nguyên hàm sau : $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C; \int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$
- Sử dụng thành thạo các cách tính tích phân : Đổi biến số , từng phần .

MỘT SỐ BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tính các tích phân sau :

a. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^x}$ b. $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x+5}$ c. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+4}$

d. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$ e. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{e^x+1}e^{2x}dx$ f. $\int_0^{\ln 2} \frac{1-e^x}{1+e^x}dx$

GIẢI

a. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^x} = \int_0^1 \frac{d(1+e^x)}{1+e^x} = \ln|1+e^x|\Big|_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2$

b. $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x+5}$.

- Đặt : $t = e^x \to dt = e^x dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{t}. \to x = 0 \leftrightarrow t = 1; x = \ln 2 \leftrightarrow t = 2$
- Vậy : $I = \int_1^2 \frac{dt}{t(t+5)} = \frac{1}{5}\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+5}\right)dt = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{t}{t+5}\right|\Big|_1^2 = \frac{1}{5}\left(\ln\frac{2}{7} - \ln\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{5}\ln\frac{12}{7}$

c. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+4}$

- Đặt : $t = e^x \to dt = e^x dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{t}. \to x = 0 \leftrightarrow t = 1; x = 1 \leftrightarrow t = e$
- Vậy : $I = \int_1^e \frac{dt}{t(t+4)} = \frac{1}{4}\int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+4}\right)dt = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t}{t+4}\right|\Big|_1^e = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{e}{e+4} - \ln\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{5e}{e+4}$

d. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

- Đặt : $t=\sqrt{e^x+1}\Rightarrow t^2=e^x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2tdt=e^xdx\\ x=\ln 3\to t=3; x=\ln 8\to t=8\end{array}\right.\Rightarrow I=\int\limits_3^8\frac{2tdt}{t}=2\int\limits_3^8 dt=2t\Big|_3^8=10$

e. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8}\sqrt{e^x+1}e^{2x}dx$.

- Đặt : $t=\sqrt{e^x+1}\Rightarrow t^2=e^x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2tdt=e^xdx\\ x=\ln 3\to t=3; x=\ln 8\to t=8\end{array}\right.\Rightarrow$
- Vậy : $I=\int\limits_3^8 t.\left(t^2-1\right).2tdt=2\int\limits_3^{88}\left(t^4-t^2\right)dt=2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_3^8=\frac{374.8^3-32.3^3}{15}$

f. $\int\limits_0^{\ln 2}\frac{1-e^x}{1+e^x}dx=\int\limits_0^{\ln 2}\frac{2-\left(1+e^x\right)}{1+e^x}dx=2\int\limits_0^{\ln 2}\frac{dx}{1+e^x}-\int\limits_0^{\ln 2}dx=2J-\ln 2$

Tính : $J=\int\limits_0^{\ln 2}\frac{dx}{1+e^x}$.

- Đặt : $t=e^x\Rightarrow\left[\begin{array}{l}dt=e^xdx\leftrightarrow dx=\dfrac{dt}{t}\\ x=0\to t=1; x=\ln 2\to t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow J=\int\limits_1^2\frac{tdt}{1+t}=\int\limits_1^2\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=\left(t-\ln|t|\right)\Big|_1^2=1-\ln 2$
- Vậy : $I=2\left(1-\ln 2\right)-\ln 2=2-3\ln 2$

Bài 2. Tính các tích phân sau :

a. $\int\limits_1^2\frac{1}{1-e^{-x}}dx$ *b.* $\int\limits_0^2\frac{e^x}{e^x+1}dx$ *c.* $\int\limits_0^1\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$

d. $\int\limits_1^e\frac{\ln x}{x\left(\ln^2 x+1\right)}dx$ *e.* $\int\limits_0^1\frac{e^{-2x}}{e^{-x}+1}dx$ f. $\int\limits_0^{\ln 3}\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$

GIẢI

a. $\int\limits_1^2\frac{1}{1-e^{-x}}dx=\int\limits_1^2\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int\limits_1^2\frac{d\left(1+e^x\right)}{1+e^x}=\ln\left|1+e^x\right|\Big|_1^2=\ln\left(1+e^2\right)-\ln\left(1+e\right)$

b. $\int\limits_0^2\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int\limits_0^2\frac{d\left(1+e^x\right)}{1+e^x}=\ln\left|1+e^x\right|\Big|_0^2=\ln\left(1+e^2\right)-\ln 2$

c. $\int\limits_0^1\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+e^x}$

- Đặt :

$t=e^x\Rightarrow\left[\begin{array}{l}dt=e^xdx\leftrightarrow dx=\dfrac{dt}{t}\\ x=0\to t=1; x=1\to t=e\end{array}\right.\Leftrightarrow J=\int\limits_1^e\frac{tdt}{1+t}=\int\limits_1^e\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=\left(t-\ln|t|\right)\Big|_1^e=e-1-1=e-2$

d. $\int\limits_1^e\frac{\ln x}{x\left(\ln^2 x+1\right)}dx$.

- Đặt : $t=\ln x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\to t=0 \\ x=e\to t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow I=\int_0^1 \frac{tdt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(1+t^2\right)}{1+t^2}=$
- Vậy : $I=\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$

e. $\int_0^1 \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+1}dx=\int_0^1 \frac{dx}{e^x\left(1+e^x\right)}$

- $t=e^x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} dt=e^x dx \leftrightarrow dx=\frac{dt}{t} \\ x=0\to t=1; x=1\to t=e \end{array}\right. \Leftrightarrow I=\int_1^e \frac{dt}{t^2\left(1+t\right)}$
- Phân tích : $\frac{1}{t^2\left(1+t\right)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t+1}=\frac{\left(A+C\right)t^2+\left(A+B\right)t+B}{t^2\left(t+1\right)}$
- Đồng nhất hệ số hai tử số : $\begin{cases} A+C=0 \\ A+B=0 \\ B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=-1 \end{cases} \Leftrightarrow f(t)=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}$
- Vậy : $I=\int_1^e\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=-\left(\frac{1}{t}+\ln|t|+\ln|t+1|\right)\Big|_1^e=-\left(\frac{e+1}{e}+\ln\frac{e+1}{2}\right)$

f. $\int_0^{\ln 3}\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

- Đặt : $t=\sqrt{e^x+1} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} dt=\frac{e^x dx}{2t}=\frac{t^2-1}{2t}dx \to dx=\frac{2tdt}{t^2-1} \\ x=0\to t=\sqrt{2}; x=\ln 3\to t=2 \end{array}\right.$
- Vậy : $I=\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2tdt}{t^2-1}.\frac{1}{t}=2\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)}dt=\int_{\sqrt{2}}^2\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_{\sqrt{2}}^2=\ln\frac{\sqrt{2}-1}{3\left(\sqrt{2}+1\right)}$

Bài 3. Tính các tích phân sau :

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$ b. $\int_0^2 x.e^{2x}dx$ c. $\int_0^1 x.e^{-x}dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^x+\cos x\right)\cos x dx$ e. $\int_0^1 x\ln\left(1+x\right)dx$ f. $\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln^2 x}}{x}dx$

GIẢI

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d\left(\cos x\right)=-\left(e^x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx\right)=e+J$

- $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d(\sin x)=e^x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x dx=e^{\frac{\pi}{2}}-I\Rightarrow I+J=e^{\frac{\pi}{2}}$
- Vậy ta có hệ : $\begin{cases} I+J=e^{\frac{\pi}{2}} \\ I-J=e \end{cases}\Rightarrow I=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+e}{2}$

b. $\int_0^2 x.e^{2x}dx=\int_0^2 x.\frac{1}{2}d\left(e^{2x}\right)=\frac{1}{2}\left[x.e^{2x}\Big|_0^2-\int_0^2 e^{2x}dx\right]=\frac{1}{2}\left[x.e^{2x}-\frac{1}{2}e^x\right]\Big|_0^2=e^4-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$

c. $\int_0^1 x.e^{-x}dx=-\int_0^1 x.d\left(e^{-x}\right)=-\left[x.e^{-x}\Big|_0^1-\int_0^{11} e^{-x}dx\right]=-\left[x.e^{-x}+e^{-x}\right]\Big|_0^1=1-2e^{-1}$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^x+\cos x\right)\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=J+K$

- $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d(\sin x)=e^x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x dx=e^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d(\cos x)$
- $\Leftrightarrow J=e^{\frac{\pi}{2}}+e^x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx=e^{\frac{\pi}{2}}-1-J;\Rightarrow 2J=e^{\frac{\pi}{2}}-1\Leftrightarrow J=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$
- $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$. Vậy : $I=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}+\dfrac{\pi}{4}$.

e. $\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\int_0^1\ln(1+x)d(1+x)$.

- Đặt : $t=1+x\Rightarrow x=0\to t=1;x=1\to t=2\Rightarrow f(t)dt=\ln t dt$
- $\Leftrightarrow I=\int_1^2\ln t dt=t\ln t\Big|_1^2-\int_1^2 dt=\left(t\ln t-t\right)\Big|_1^2=2\ln 2-1$

f. $\int_1^e\dfrac{\sqrt{1+\ln^2 x}}{x}dx$.

- Đặt : $t=\sqrt{1+\ln^2 x}\Rightarrow t^2=1+\ln^2 x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2tdt=\dfrac{2\ln x dx}{x}\to \\ x=1\to t=1;x=e\to t=\sqrt{2}\end{array}\right.$

Bài 4. Tính các tích phân sau

a. $\int_0^{e^2} \frac{\ln x + \ln(\ln x)}{x} dx$	b. $\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x\sqrt{\ln x + 1}} + \ln^2 x \right) dx$	c. $\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$
d. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$	e. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx$	f. $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx$

GIẢI

a. $\int_e^{e^2} \frac{\ln x + \ln(\ln x)}{x} dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx + \int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \frac{1}{2}\ln^2 x \Big|_1^e + \int_e^{e^2} \ln(\ln x) d(\ln x) = \frac{1}{2} + J$

- Tính : $J = \int_e^{e^2} \ln(\ln x) d(\ln x)$. Đặt : $t = \ln x \Rightarrow x = e \to t = 1; x = e^2 \to t = 2 \Leftrightarrow J = \int_1^2 \ln t dt$
- $\Leftrightarrow J = t\ln t \Big|_1^2 - \int_1^2 dt = (t\ln t - t)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1$

b. $\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x\sqrt{\ln x + 1}} + \ln^2 x \right) dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx + \int_1^e \ln^2 x dx = J + K$

-Tính J. Đặt : $\sqrt{\ln x + 1} = t \Rightarrow \ln x = t^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{dx}{x} = 2tdt \\ x = 1 \to t = 1; x = e \to t = \sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow J = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2 - 1}{t} 2tdt$

Do đó : $J = 2\int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt = 2\left(\frac{1}{3}t^3 - t \right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3} - \sqrt{2}$

- Tính K . $K = x\ln^2 x \Big|_1^e - 2\int_1^e x.\ln x.\frac{dx}{x} = e - \int_1^e \ln x dx = e - \left(x\ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx \right) = e - (x\ln x - x)\Big|_1^e = e - 1$

- Vậy : $I = \frac{4}{3} - \sqrt{2} + e - 1 = \frac{1}{3} - \sqrt{2} + e$

c. $\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$

- Đặt : $t = \ln x \Rightarrow x = e^2 \to t = 2; x = e^3 \to t = 3 \Leftrightarrow J = \int_2^3 \ln t dt$
- $\Leftrightarrow J = t\ln t \Big|_2^3 - \int_2^3 dt = (t\ln t - t)\Big|_2^3 = 3\ln 3 - 3 - (2\ln 2 - 2) = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$

d. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = -\int_1^2 \ln x.d\left(\frac{1}{x}\right) = -\left[\frac{\ln x}{x}\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \right] = -\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$

e. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\sin x).d(\tan x) = \tan x.\ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x.\frac{\cos x}{\sin x}dx = \left(\tan x.\ln(\sin x) - x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

Vậy : $I = \frac{\sqrt{3}\ln 3}{2} - \frac{2\ln 2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}$.

$f.\ \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx = 2\int_0^1 \ln(x+1).d(\sqrt{x+1}) = 2\left[\sqrt{x+1}.\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}dx\right] = 2\sqrt{2}\ln 2 - 2J$

-Tính J; $J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = 2\sqrt{x+1}\Big|_0^1 = 2\sqrt{2}. \Rightarrow I = 2\sqrt{2}\ln 2 - 2.2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left(\ln 2 - 2\right)$

VIII. TÍCH PHÂN MỘT SỐ HÀM SỐ ĐẶC BIỆT

Dạng 1.

- Nếu hàm f(x) liên tục và là hàm số lẻ trên $[a;b]$ thì : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- Nếu hàm số f(x) liên tục và là hàm số chẵn trên $[a;b]$ thì : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Vì các tính chất này không có trong SGK nên khi tính tích phân có dạng này ta có thể chứng minh như sau :

Bước 1: Phân tích $I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = J + K$

Bước 2. Tính tích phân $J = \int_{-a}^{0} f(x)dx$ bằng phương pháp đổi biến số . Đặt t=-x

- Nếu f(x) là hàm số lẻ thì J=-K suy ra I=J+K=0
- Nếu f(x) là hàm số chẵn thì J=K suy ra I= J+K=2K

Dạng 2. Nếu f(x) liên tục và là hàm số chẵn trên R thì :

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{a^x+1}dx = \int_0^a f(x)dx$$

Để chứng minh tính chất này ta cũng làm tương tự như trên :

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x+1}dx = \int_{-\alpha}^{0} \frac{f(x)}{a^x+1}dx + \int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x+1}dx \quad \left(J = \int_{-\alpha}^{0} \frac{f(x)}{a^x+1}dx; K = \int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x+1}dx\right)$$

Để tính J ta cũng đặt x=-t

Dạng 3. Nếu f(x) liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ***thì*** : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

Để chứng minh tính chất này ta đặt : $t = \frac{\pi}{2} - x$

Dạng 4. Nếu f(x) liên tục và f(a+b-x)=f(x) hoặc f(a+b-x)=-f(x) thì đặt : t=a+b-x

Đặc biệt , nếu : a+b=π thì đặt t=π -x

Nếu : a+b=2π thì đặt t= 2π -x

Dạng 5 . Tính tích phân bằng cách sử dụng nguyên hàm phụ

Để tính nguyên hàm của hàm số f(x) ta cần tìm một hàm g(x) sao cho nguyên hàm của các hàm số f(x) $\pm$ g(x) dễ xác định hơn so với f(x) . Từ đó suy ra nguyên hàm của hàm f(x) . Ta thực hiện các bước sau :

Bước 1. Tìm hàm số g(x)

Bước 2. Xác định nguyên hàm của các hàm số f(x) $\pm$ g(x), tức là :

$$\begin{cases} F(x)+G(x)=A(x)+C_1 \\ F(x)-G(x)=B(x)+C_2 \end{cases} \quad (*)$$

Bước 3. Từ hệ (*) ta suy ra $F(x)=\frac{1}{2}\left[A(x)+B(x)\right]+C$, là nguyên hàm của f(x) .

MỘT SỐ BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1.

a. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^7-x^5+x^3-x+1}{\cos^4 x}dx$ b. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{cosx.ln}\left(\text{x}+\sqrt{1+\text{x}^2}\right)dx$ c. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \text{cosx.ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$

d. $\int_{-1}^{1} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ e. $\int_{-1}^{1} \frac{|x|dx}{x^4-x^2+1}$ f. $\int_{-1}^{1} \frac{x^4+\sin x}{x^2+1}dx$

GIẢI

a. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^7-x^5+x^3-x+1}{\cos^4 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{x^7-x^5+x^3-x+1}{\cos^4 x}dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^7-x^5+x^3-x+1}{\cos^4 x}dx = J+K$

- Tính : $J=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{x^7-x^5+x^3-x+1}{\cos^4 x}dx$. Đặt : t = -x , suy ra dt=-dx và :
- $J=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{-t^7+t^5-t^3+t+1}{\cos^4 t}dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} J = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-x^7+x^5-x^3+x+1}{\cos^4 x}dx \Rightarrow J+K=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^4 x}dx$
- Vậy : $I=J+K=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^4 x}dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 x\right)d\left(\tan x\right) = 2\left(x+\frac{1}{3}\tan^3 x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}$

b. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{cosx.ln}\left(\text{x}+\sqrt{1+\text{x}^2}\right)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \text{cosx.ln}\left(\text{x}+\sqrt{1+\text{x}^2}\right)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{cosx.ln}\left(\text{x}+\sqrt{1+\text{x}^2}\right)dx = J+K$

- Tính : $J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \text{cosx.ln}\left(\text{x}+\sqrt{1+\text{x}^2}\right)dx$. Đặt : t = -x suy ra dt =- dx .

- $J=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos\text{-t}.\ln\left(\text{-t}+\sqrt{1+\text{t}^2}\right)dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\cos t\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)dt=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln\left(\text{x}+\sqrt{1+\text{x}^2}\right)dx=-K$
- Vậy : I= J+K =0 .

c. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x.\ln\left(\frac{1\text{-x}}{1+\text{x}}\right)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\cos x.\ln\left(\frac{1\text{-x}}{1+\text{x}}\right)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\cos x.\ln\left(\frac{1\text{-x}}{1+\text{x}}\right)dx=J+K$

- Tính : $J=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\cos x.\ln\left(\frac{1\text{-x}}{1+\text{x}}\right)dx$. Đặt : t = -x suy ra : dt =- dx , cho nên :
- $J=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\cos x.\ln\left(\frac{1\text{-x}}{1+\text{x}}\right)dx=-\int_{\frac{1}{2}}^{0}\cos(\text{-t}).\ln\left(\frac{1+\text{t}}{1\text{-t}}\right)dt=\int_{0}^{\frac{1}{2}}-\cos t.\ln\left(\frac{1\text{-t}}{1+\text{t}}\right)dt=-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\cos x.\ln\left(\frac{1\text{-x}}{1+\text{x}}\right)dx=-K$
- Vậy : $\Rightarrow I=J+K=0$

d. $\int_{-1}^{1}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=\int_{-1}^{0}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx+\int_{0}^{1}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=J+K$

- Tính : $J=\int_{-1}^{0}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$. Đặt : t = -x , suy ra : dt = - dx . Cho nên :
- $J=\int_{-1}^{0}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=-\int_{1}^{0}\ln(-t+\sqrt{1+t^2})dt=\int_{0}^{1}-\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)dt=-\int_{0}^{1}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=-K$
- Vậy : $I=J+K=0$.

e. $\int_{-1}^{1}\frac{|x|dx}{x^4-x^2+1}=\int_{-1}^{0}\frac{|x|dx}{x^4-x^2+1}+\int_{0}^{1}\frac{|x|dx}{x^4-x^2+1}=J+K$

- Tính : $J=\int_{-1}^{0}\frac{|x|dx}{x^4-x^2+1}$. Đặt : t = -x , suy ra : dt = -dx . Cho nên :
- $J=\int_{-1}^{0}\frac{|x|dx}{x^4-x^2+1}=-\int_{1}^{0}\frac{|-t|dt}{t^4-t^2+1}=\int_{0}^{1}\frac{|t|dt}{t^4-t^2+1}=\int_{0}^{1}\frac{|x|dx}{x^4-x^2+1}=K$
- Vậy : I=J+K=2K= $2\int_{0}^{1}\frac{|x|dx}{x^4-x^2+1}$. Đặt :

  $u=x^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}du=2xdx\\x=0\to u=0;x=1\to u=1\end{array}\right.\Leftrightarrow K=\int_{0}^{1}\frac{1}{2}\frac{du}{u^2-u+1}=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{du}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

- Đặt : $u-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t \Rightarrow \left[\begin{array}{l} du=\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2 t}dt \\ u=0\to t=-\frac{\pi}{6}; u=1\to t=\frac{\pi}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow K=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2 t.\frac{3}{4}\left(1+\tan^2 t\right)}dt=$
- Vậy : $K=\frac{1}{2}\frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}dt=\frac{\sqrt{3}}{3}t\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. Do đó : $I=2K=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

$f.\ \int_{-1}^{1}\frac{x^4+\sin x}{x^2+1}dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^4+\sin x}{x^2+1}dx+\int_{0}^{1}\frac{x^4+\sin x}{x^2+1}dx=J+K$

- Tính : $J=\int_{-1}^{0}\frac{x^4+\sin x}{x^2+1}dx$. Đặt : t = -x , suy ra : dt = -dx
- Do đó : $J=\int_{-1}^{0}\frac{x^4+\sin x}{x^2+1}dx.=-\int_{1}^{0}\frac{t^4-\sin t}{t^2+1}dt=\int_{0}^{1}\frac{x^4-\sin x}{x^4+1}dx$
- $\Rightarrow J+K=\int_{0}^{1}\frac{x^4-\sin x}{x^4+1}dx+\int_{0}^{1}\frac{x^4+\sin x}{x^4+1}dx=\int_{0}^{1}\frac{2x}{x^4+1}dx=\int_{0}^{1}\frac{dx^2}{x^4+1}=\int_{0}^{1}\frac{dt}{t^2+1}=H$
- Đặt : $t=\tan u\Rightarrow\left[\begin{array}{l} dt=\frac{du}{\cos^2 u} \\ t=0\to u=0; t=1\to u=\frac{\pi}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow H=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{du}{\cos^2 u\left(1+\tan^2 u\right)}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}du=u\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$
- Vậy : $I=\frac{\pi}{4}$

Bài 2. Tính các tích phân sau :

a. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 x}{\sqrt{1+\cos x}}dx$ b. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x dx}{4-\sin^2 x}$ c. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\cos x}{4-\sin^2 x}dx$

d. $\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{2^x+1}dx$ e. $\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx$ f. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(e^x+1\right)\left(x^2+1\right)}$

GIẢI

$a.\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 x}{\sqrt{1+\cos x}}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^5 x}{\sqrt{1+\cos x}}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 x}{\sqrt{1+\cos x}}dx=J+K$

- Tính : $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^5 x}{\sqrt{1+\cos x}}dx$. Đặt : t = -x suy ra : dt = -dx

- $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^5 x}{\sqrt{1+\cos x}}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^5(-t)}{\sqrt{1+\cos(-t)}}dt=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 t}{\sqrt{1+\cos t}}dt=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 x}{\sqrt{1+\cos x}}dx=-K$
- Vậy : I=J+K =0

b. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{4-\sin^2 x}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{xdx}{4-\sin^2 x}+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{4-\sin^2 x}=J+K$

- Tính : $J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{xdx}{4-\sin^2 x}$. Đặt t = -x suy ra : dt = -dx , cho nên
- $J=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-tdt}{4-\sin^2 t}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-tdt}{4-\sin^2 t}=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{4-\sin^2 x}=-K\Rightarrow I=J+K=0$

c. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\cos x}{4\text{-}\sin^2 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{x+\cos x}{4\text{-}\sin^2 x}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\cos x}{4\text{-}\sin^2 x}dx=J+K$

- Tính : $J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{x+\cos x}{4\text{-}\sin^2 x}dx$. Đặt t = -x suy ra : dt = -dx , cho nên
- $J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-t+\cos(-t)}{4-\sin^2(-t)}(-dt)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-t+\cos t}{4\text{-}\sin^2 t}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-x+\cos x}{4\text{-}\sin^2 x}dx$.
- $J+K=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-x+\cos x}{4\text{-}\sin^2 x}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\cos x}{4\text{-}\sin^2 x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x}{4-\sin^2 x}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{d(\sin x)}{2-\sin x}-\frac{d(\sin x)}{2+\sin x}\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$
- Vậy : I= $=\frac{1}{2}\ln\frac{4+\pi}{4-\pi}$

d. $\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{2^x+1}dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^4}{2^x+1}dx+\int_{0}^{1}\frac{x^4}{2^x+1}dx=J+K$

- Tính : $J=\int_{-1}^{0}\frac{x^4}{2^x+1}dx$. Đặt : t = -x suy ra : dt = -dx , cho nên
- $J=\int_{-1}^{0}\frac{x^4}{2^x+1}dx=\int_{1}^{0}\frac{(-t)^4}{2^{-t}+1}-dt=\int_{0}^{1}\frac{2^t t^4}{2^t+1}dt=\int_{0}^{1}\frac{2^x x^4}{2^x+1}dx$
- $I=J+K=\int_{0}^{1}\frac{2^x x^4}{2^x+1}dx+\int_{0}^{1}\frac{x^4}{2^x+1}dx=\int_{0}^{1}x^4dx=\frac{1}{5}x^5\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{5}$

e. $\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx=\int_{-1}^{0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx+\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx=J+K$

- Tính : $J=\int_{-1}^{0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx$. Đặt t = -x , suy ra : dt = -dx . Cho nên
- $J=\int_{-1}^{0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx=\int_{1}^{0}J=-\int_{-1}^{0}\frac{\sqrt{1-(-t)^2}}{1+2^{-t}}dt=\int_{0}^{1}J=\int_{-1}^{0}\frac{2^x\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx$
- $\Rightarrow I=J+K=\int_{0}^{1}\frac{2^x\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx+\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}=\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$

* Ta có thể tính : $\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ bằng cách :

- Đặt : $x=\sin t\Rightarrow\left[\begin{array}{l}dx=\text{costdt};1\text{-x}^2=1-\sin^2 t=\cos^2 t\\ \text{x=0}\to\text{t=;x=1}\to\text{t=}\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt$
- Vậy : $I=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

$f.\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}=J+K$

- Tính : $J=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$. Đặt : t = -x ,suy ra : dt = -dx. Cho nên
- $J=\int_{1}^{0}\frac{-dt}{(e^{-t}+1)(t^2+1)}=\int_{0}^{1}\frac{e^t dt}{(e^t+1)(t^2+1)}=\int_{0}^{1}\frac{e^x dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$
- Vậy : $J+K=\int_{0}^{1}\left(\frac{e^x}{(e^x+1)(x^2+1)}+\frac{1}{(e^x+1)(x^2+1)}\right)dx=\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+1}$
- Tính : $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+1}$. Đặt : $x=\tan t\Rightarrow\left[\begin{array}{l}dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt\\ x=0\to t=0;x=1\to t=\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$ $\Rightarrow I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos^2 t(1+\tan^2 t)}=$
- Vậy : I= $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}dt=t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

Bài 3. Tính các tích phân sau :

a. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx$	b. $\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{1+2^x}dx$	c. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(4^x+1)(x^2+1)}$
d. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\sin 3x\cos 5x}{1+e^x}dx$	e. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{6^x+1}dx$	f. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2\sin x}{1+2^x}dx$

GIẢI

a. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx=\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx+\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx=J+K$

Nếu áp dụng bài toán dạng 2 (Như các bài tập : 1-2). Thì bài 3 ta viết gọn lại như sau :

a. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx=\int_{0}^{\pi}\sin^2 x dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$

b. $\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{1+2^x}dx=\int_{0}^{1}(x^2+1)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

- c. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(4^x+1)(x^2+1)}=\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+1}$. Đặt :

$x=\tan t\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt\\ x=0\to t=0;x=1\to t=\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos^2 t(1+\tan^2 t)}=$ Vậy : I= $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

d. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\sin 3x\cos 5x}{1+e^x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin 3x\cos 5x dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos 7x-\frac{1}{4}\cos x-\frac{1}{4}\cos 9x\right)dx$

$\Leftrightarrow I=\left(\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{1}{28}\sin 7x-\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{36}\sin 9x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{12}-\frac{1}{28}-\frac{1}{4}-\frac{1}{36}=\frac{146}{369}$

e. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{6^x+1}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sin^6 x+\cos^6 x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x\right)dx=\left(\frac{5}{8}x+\frac{3}{32}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{5\pi-3}{32}$

f. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2\sin x}{1+2^x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x dx=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2 d(\cos x)=-\left[x^2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2x\cos x dx\right]=-(0-2K)=2K$

- Tính : $K=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x.\cos x dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x.d(\sin x)=x.\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$

- Vậy : $I = 2K = 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi - 2$

Bài 4. Tính các tích phân sau :

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx \left(n \in N^*\right)$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^7 x}{\cos^7 x + \sin^7 x} dx$ c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2010} x}{\sin^{2010} x + \cos^{2010} x} dx$ e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ f. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$

GIẢI

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx \left(n \in N^*\right)$. Đặt : $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} dt = -dx \\ x = 0 \to t = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} \to t = 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t}{\sin^n t + \cos^n t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx \Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

Tương tự cách làm như vậy đối với phần a của bài 3 . Các phần sau đều có kết quả như nhau .

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^7 x}{\cos^7 x + \sin^7 x} dx \Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4}$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4}$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2010} x}{\sin^{2010} x + \cos^{2010} x} dx \Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4}$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4}$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx \Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4}$

Bài 5. Tính các tích phân sau :

a. $\int_0^{\pi} \frac{x.\sin x}{4-\cos^2 x} dx$ b. $\int_0^{\pi} \frac{x + \cos x}{4-\sin^2 x} dx$ c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) dx$

$d.\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$	$e.\ \int_0^{2\pi} x.\cos^3 x dx$	$f.\ \int_0^{\pi} x.\sin^3 x dx$

GIẢI

$a.\ \int_0^{\pi} \frac{x.\sin x}{4\text{-}\cos^2 x}dx$

- Đặt : $t=\pi-x \Rightarrow \begin{bmatrix} dx=-dt \\ x=0 \to t=\pi; x=\pi \to t=0 \end{bmatrix} \Rightarrow I=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{4-\cos^2(\pi-t)}dt=$
- $\Leftrightarrow I=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{4\text{-}\cos^2 x}dx-\int_0^{\pi}\frac{x.\sin x}{4\text{-}\cos^2 x}dx=\pi J-I \Rightarrow 2I=\pi J; \Leftrightarrow I=\frac{\pi}{2}J$
- Tính : $J=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{4\text{-}\cos^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x-4}=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{d(\cos x}{\cos x\text{-}2}-\frac{d(\cos x}{\cos x\text{+}2}\right)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x\text{-}2}{\cos x\text{+}2}\right|\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}\ln 3$
- Vậy : $I=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{2}\ln 3=\frac{\pi}{4}\ln 3$

$b.\ \int_0^{\pi}\frac{x+\cos x}{4\text{-}\sin^2 x}dx$. (Sai đề)

$c.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1\text{+}\cos x}\right)dx$

- Đặt : $t=\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow \begin{bmatrix} dx=-dt \\ x=0 \to t=\frac{\pi}{2}; x=\frac{\pi}{2} \to t=0 \end{bmatrix} \Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln\left[\frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{1\text{+}\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\right](-dt)$
- $\Leftrightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1+\cos t}{1\text{+}\sin t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1\text{+}\cos x}\right)^{-1}dx=-I \Rightarrow 2I=0; I=0$

$d.\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$.

- Đặt : $t=\frac{\pi}{4}-x \Rightarrow \begin{bmatrix} dx=-dt \\ x=0 \to t=\frac{\pi}{4}; x=\frac{\pi}{4} \to t=0 \end{bmatrix} \Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)(-dt)$
- $\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[1+\frac{1-\tan x}{1\text{+}\tan x}\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2.dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\frac{\pi}{4}\ln 2-I$
- Vậy : $2I=\frac{\pi}{4}\ln 2 \Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2$

e. $\int_0^{2\pi} x.\cos^3 x dx$.

- Đặt : $t = 2\pi - x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} dx = -dt \\ x = 0 \to t = 2\pi; x = 2\pi \to t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow I = \int_{2\pi}^{0} (2\pi - t)\cos^3(2\pi - t)(-dt) =$
- $\Leftrightarrow I = 2\pi\int_0^{2\pi} \cos^3 x dx - \int_0^{2\pi} x.\cos^3 x dx = 2\pi\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)dx - I$
- Vậy : $I = \frac{\pi}{4}\int_0^{2\pi}(\cos 3x + 3\cos x)dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$

f. $\int_0^{\pi} x.\sin^3 x dx$.

- Đặt : $t = \pi - x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} dx = -dt \\ x = 0 \to t = \pi; x = \pi \to t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow I = \int_{\pi}^{0} (\pi - t)\sin^3(\pi - t)(-dt)$
- $\Leftrightarrow I = \int_0^{\pi}(\pi - x)\sin^3 x dx = \pi\int_0^{\pi}\sin^3 x dx - \int_0^{\pi} x\sin^3 x dx = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}(3\sin x - \sin 3x)dx - I$
- Vậy : $I = \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi}(3\sin x - \sin 3x)dx = \frac{\pi}{8}\left(-3\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{3}$

Bài 6. Tính các tích phân sau :

a. $\int_0^{\pi} \frac{xdx}{1+\sin x}$ b. $\int_0^{\pi} \frac{x.\sin x}{2+\cos^2 x}dx$ c. $\int_0^{\pi} \frac{x.\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x.\ln(1+\tan x)dx$ e. $\int_0^{\pi} \frac{x.\sin x}{9+4\cos^2 x}dx$ f. $\int_0^{\pi} x.\sin x.\cos^4 x dx$

GIẢI

a. $\int_0^{\pi} \frac{xdx}{1+\sin x}$.

- Đặt : $t = \pi - x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} dx = -dt \\ x = 0 \to t = \pi, x = \pi \to t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow I = \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)(-dt)}{1+\sin(\pi - t)}$
- $I = \pi\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin x} - \int_0^{\pi}\frac{xdx}{1+\sin x} = \pi\int_0^{\pi}\frac{1}{2}.\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}dx - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}+1$

b. $\int_0^{\pi} \frac{x.\sin x}{2+\cos^2 x}dx$.

- Đặt : $t = 2\pi - x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} dx = -dt \\ x = 0 \to t = \pi, x = \pi \to t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow I = \int_{2\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)(-dt)}{2+\cos^2(\pi - t)}$

- $I=-\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2-\cos x}dx-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{2+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{d(\cos x)}{2+\cos^2 x}-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\ln\left(2+\cos^2 x\right)\Big|_0^{\pi}=0$

c. $\int_0^{\pi}\frac{x.\sin x}{1+\cos^2 x}dx$. Giống cách giải của câu b.(Học sinh tự giải)

d. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 4x.\ln(1+\tan x)dx$.

- Đặt : $t=\frac{\pi}{4}-x\Rightarrow\left[\begin{array}{l}dx=-dt\\ x=0\to t=\frac{\pi}{4};x=\frac{\pi}{4}\to t=0\end{array}\right.\Leftrightarrow I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\sin 4\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right](-dt)$
- $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 4x.\left(\ln 2-\ln(1+\tan x)\right)dx=\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 4xdx-I\Rightarrow I=\frac{\ln 2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 4xdx$
- Vậy : $I=-\frac{\ln 2}{2}.\frac{1}{4}\cos 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\ln 2}{4}$

e. $\int_0^{\pi}\frac{x.\sin x}{9+4\cos^2 x}dx$.

- Đặt : $t=\pi-x\Rightarrow\left[\begin{array}{l}dx=-dt\\ x=0\to t=\pi;x=\pi\to t=0\end{array}\right.\Leftrightarrow I=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)(-dt)}{9+4\cos^2(\pi-t)}$
- $\Leftrightarrow I=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x dx}{9+4\cos^2 x}-\int_0^{\pi}\frac{x.\sin x}{9+4\cos^2 x}dx=-\pi\int_0^{\pi}\frac{d(\cos x)}{9+4\cos^2 x}-I\Rightarrow I=-\frac{\pi}{2}\ln\left(9+4\cos^2 x\right)\Big|_0^{\pi}=0$

f. $\int_0^{\pi}x.\sin x.\cos^4 xdx$.

- Đặt : $t=\pi-x\Rightarrow\left[\begin{array}{l}dx=-dt\\ x=0\to t=\pi;x=\pi\to t=0\end{array}\right.\Leftrightarrow I=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)\sin(\pi-t)\cos^4(\pi-t)(-dt)$
- $\Leftrightarrow I=\pi\int_0^{\pi}\sin x.\cos^4 xdx-\int_0^{\pi}x.\sin x.\cos^4 xdx=-\pi\int_0^{\pi}\cos^4 x.d(\cos x)-I$
- $\Rightarrow I=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{5}\cos^5 x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{5}$

Bài 7. Tính các tích phân sau

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}dx$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 x.\sin 2xdx$

d $\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 x.\sin 2xdx$ e. $\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{e^x-e^{-x}}dx$ f. $\int_{-1}^{1}\frac{e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$

GIẢI

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}dx$

- Chọn : $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{\sin x - \cos x}dx \Rightarrow I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$; $\quad I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}dx$
- $\Leftrightarrow I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sin x - \cos x} = \ln|\sin x - \cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$
- Vậy : $\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{2} \\ I - J = 0 \end{cases} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$

b. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$. Chọn : $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$

- $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$; $\quad J - I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln|\cos x + \sin x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$
- Vậy : $\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{2} \\ J - I = 0 \end{cases} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$

c. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x.\sin 2x dx$. Chọn : $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 x \sin 2x dx$

- $I + J = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x)\sin 2x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$
- $J - I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin 2x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x.\sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$
- Vậy : I=1

d $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 x.\sin 2x dx$. Giải giống bài 6-c .Ta cũng có kết quả : I = 1

e. $\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x - e^{-x}}dx$. Chọn : $J = \int_{-1}^{1} -\frac{e^{-x}}{e^x - e^{-x}}dx$

- $I+J=\int_{-1}^{1}dx=x\Big|_{-1}^{1}=2.\quad I-J=\int_{-1}^{1}\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{d\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{e^{x}-e^{-x}}=\ln\left|e^{x}-e^{-x}\right|\Big|_{-1}^{1}=0$
- Vậy : I=1.

$f.\ \int_{-1}^{1}\frac{e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}dx$. (Cách giải giống như câu e.)

BÀI TẬP ÔN TỔNG HỢP VỀ TÍCH PHÂN

Bài 1. Tính các tích phân sau

$a\ \int_{0}^{2}\left|x^{3}-x\right|dx$	$b.\ \int_{2}^{3}\frac{x^{7}}{1+x^{8}-2x^{4}}dx$	$c.\ \int_{1}^{3}\left|x^{2}-2x+1\right|dx$
$d.\ \int_{-1}^{2}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{2}dx$	$e.\ \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^{2}+2x+4}$	$f.\ \int_{0}^{2}\frac{x^{3}+2x^{2}+4x+9}{x^{2}+4}dx$

GIẢI

$a\ \int_{0}^{2}\left|x^{3}-x\right|dx$ .Bằng cách xét dấu ta thấy : $f(x)=x^{3}-x>0,\forall x\in[1;2];\ f(x)<0\forall x\in[0;1]$

Vậy : $I=\int_{0}^{1}\left(x-x^{3}\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x^{3}-x\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{4}x^{4}\right)\Big|_{0}^{1}+\left(\frac{1}{4}x^{4}-\frac{1}{2}x^{2}\right)\Big|_{1}^{2}=\frac{5}{2}$

$b.\ \int_{2}^{3}\frac{x^{7}}{1+x^{8}-2x^{4}}dx=\int_{2}^{3}\frac{x^{4}.x^{3}dx}{\left(x^{4}-1\right)^{2}}=\frac{1}{4}\int_{2}^{3}\frac{x^{4}d\left(x^{4}\right)}{\left(x^{4}-1\right)^{2}}$

- Đặt : $\begin{cases}t=x^{4}\rightarrow dt=4x^{3}dx\\x=2\rightarrow t=16,x=3\rightarrow t=81\end{cases}\Leftrightarrow I=\frac{1}{4}\int_{16}^{81}\frac{tdt}{(t-1)^{2}}=\frac{1}{4}\left[\int_{16}^{81}\frac{dt}{t-1}+\int_{16}^{81}\frac{dt}{(t-1)^{2}}\right]$
- $I=\frac{1}{4}\left[\ln|t-1|-\frac{1}{t-1}\right]\Big|_{16}^{81}=\frac{1}{4}\left(\ln 80-\ln 15-\frac{1}{80}+\frac{1}{15}\right)$

$c.\ \int_{1}^{3}\left|x^{2}-2x+1\right|dx=\int_{1}^{3}(x-1)^{2}dx=\frac{1}{3}(x-1)^{3}\Big|_{1}^{3}=\frac{8}{3}$.

$d.\ \int_{-1}^{2}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{2}dx$.

- Nhận xét : $f(x)=\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{2}=\left(1-\frac{3}{x+2}\right)^{2}=1-\frac{6}{x+2}+\frac{9}{(x+2)^{2}}$
- Vậy : $I=\left(x-6\ln|x+2|-\frac{9}{x+2}\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{39}{4}-6\ln 4$

$e.\ \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^{2}+2x+4}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x+1)^{2}+\left(\sqrt{3}\right)^{2}}$

- Đặt : $x+1=\sqrt{3}\tan t \Rightarrow \left[\begin{array}{l} dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt \\ x=-1\to t=0, x=0\to t=\dfrac{\pi}{6}\end{array}\right. \Rightarrow I=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{dt}{\cos^2 t.3(1+\tan^2 t)}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}dt$
- Vậy : $I=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$

$f.\ \int_0^2 \dfrac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}dx=\int_0^2\left(x+2+\dfrac{1}{x^2+4}\right)dx$

- $I=\left(\dfrac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_0^2+\int_0^2\dfrac{dx}{x^2+4}=\dfrac{16}{3}+J$
- Đặt : $x=2\tan t\to \left[\begin{array}{l} dx=\dfrac{2}{\cos^2 t}dt \\ x=0\to t=0, x=2\to t=\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right. \Rightarrow J=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dt}{\cos^2 t.2\left(1+\tan^2 t\right)}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt$
- Vậy : $J=t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{4};\Rightarrow I=\dfrac{16}{3}+\dfrac{\pi}{4}$

Bài 2. Tính các tích phân sau :

a. $\int_{-1}^5\left(|x+2|-|x-2|\right)dx$ b. $\int_0^1\dfrac{dx}{2x^2+5x+2}$ c. $\int_0^1\dfrac{x^3}{x^2+1}dx$

d. $\int_0^1\dfrac{xdx}{(x+1)^3}$ e. $\int_0^1\dfrac{xdx}{(x+1)^2}$ f. $\int_0^1\dfrac{xdx}{1+x^2}$

GIẢI

a. $\int_{-1}^5\left(|x+2|-|x-2|\right)dx$. Bằng cách xét dấu : $f(x)=2x\forall x\in[-1;2];\ f(x)=4\forall x\in[2;5]$

- Vậy : $I=\int_{-1}^2 2xdx+\int_2^5 4dx=x^2\Big|_{-1}^2+4x\Big|_2^5=4-1+20-8=15$

b. $\int_0^1\dfrac{dx}{2x^2+5x+2}=\dfrac{1}{2}\int_0^1\left(\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{x+2}\right)dx=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+\frac{1}{2}}{x+2}\right|\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{2}$

c. $\int_0^1\dfrac{x^3}{x^2+1}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{x^2d\left(x^2\right)}{x^2+1}$.

- Đặt : $t=x^2\Rightarrow x=0\to t=0; x=1\to t=1\Leftrightarrow I=\int_0^1\dfrac{tdt}{t+1}=\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{t+1}\right)dt$

- Vậy : $I=\left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_0^1=1-\ln 2$

$d.\ \int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^3}=\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right)dx=\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}.\frac{1}{(x+1)^2}\right]\Big|_0^1=\frac{1}{8}$

$e.\ \int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^2}=\int_0^1\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]dx=\left[\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}\right]\Big|_0^1=\ln 2-\frac{1}{2}$

$f.\ \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$

Bài 3. Tính các tích phân sau :

$a.\ \int_1^2 \frac{x}{x+\sqrt{x-1}}dx$ $\quad b.\ \int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}dx$ $\quad c.\ \int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx$

$d.\ \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5+2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$ $\quad e.\ \int_{-1}^4 \frac{2dx}{\sqrt{x+5}+4}$ $\quad f.\ \int_0^2 \frac{x^4}{\sqrt{x^5+1}}dx$

GIẢI

$a.\ \int_1^2 \frac{x}{x+\sqrt{x-1}}dx$.

- Đặt : $t=\sqrt{x-1}\Rightarrow x=t^2-1\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}dx=2tdt\\x=1\to t=0,x=2\to t=1\end{array}\right.\Leftrightarrow I=\int_0^1\frac{t^2-1}{t^2-1+1}2tdt=2\int_0^1\left(t-\frac{1}{t}\right)dt$
- Vậy : $I=2\left(\frac{1}{2}t^2-\ln|t|\right)\Big|_0^1=1$

$b.\ \int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}dx=\int_0^{\sqrt{3}} x^2\sqrt{1+x^2}xdx$.

- Đặt : $t=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow x^2=t^2-1\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}xdx=tdt\\x=0\to t=1,x=\sqrt{3}\to t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow I=\int_1^2(t^2-1)t^2dt$
- Vậy : $I=\int_1^2(t^4-t^2)dt=\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_1^2=\frac{58}{15}$

$c.\ \int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx$.

- Đặt : $t=\sqrt{1-x}\Rightarrow x=1-t^2\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}dx=-2tdt\\x=1\to t=0,x=9\to t=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow I=\int_0^{-2}(1-t^2)t.(-2tdt)$
- Vậy : $I=2\int_{-2}^0(t^2-t^4)dt=2\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5\right)\Big|_{-2}^0=-\frac{112}{15}$

$d.\ \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^5+2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2(x^2+2)xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

- Đặt : $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=t^2-1; xdx=tdt\\ x=0\to t=1, x=\sqrt{3}\to t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow I=\int_1^2\frac{(t^2-1)(t^2+1)t.2tdt}{t}=2\int_1^2(t^4-1)tdt$
- Vậy : $I=2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{2}t^2\right)\Big|_1^2=\frac{59}{5}$

e. $\int_{-1}^{4}\frac{2dx}{\sqrt{x+5}+4}$.

- Đặt : $t=\sqrt{x+5}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=t^2-5, dx=2tdt\\ x=-1\to t=2, x=4\to t=3\end{array}\right.\Leftrightarrow I=\int_2^3\frac{2.2tdt}{t+4}=4\int_2^3\left(1-\frac{4}{t+4}dt\right)$
- Vậy : $I=4\left(t-4\ln|t+4|\right)\Big|_2^3=4+4(\ln 6-\ln 7)=4+4\ln\frac{6}{7}$

f. $\int_0^2\frac{x^4}{\sqrt{x^5+1}}dx=\frac{1}{5}\int_0^2\frac{d(x^5+1)}{\sqrt{x^5+1}}=\frac{2}{5}\sqrt{x^5+1}\Big|_0^2=\frac{2}{5}\left(\sqrt{33}-1\right)$

Bài 4. Tính các tích phân sau :

a. $\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}dx$ *b.* $\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+x^2}.x^3dx$ *c.* $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$

d. $\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}$ *e.* $\int_{-1}^0 x\sqrt{1+x}dx$ *f.* $\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+3}dx$

GIẢI

a. $\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}xdx$

- Đặt : $t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1-t^2; xdx=-tdt\\ x=0\to t=1, x=1\to t=0\end{array}\right.\Leftrightarrow I=\int_1^0(1-t^2)^2t.(-tdt)=\int_0^1 t^2(t^4-2t^2+1)dt$
- Vậy : $I=\left(\frac{1}{7}t^7-\frac{2}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^1=\frac{8}{105}$

b. $\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+x^2}.x^3dx=\int_0^{\sqrt{3}}x^2\sqrt{1+x^2}xdx$

- Đặt : $t=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=t^2-1; xdx=tdt\\ x=0\to t=1, x=\sqrt{3}\to t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow I=\int_1^2(t^2-1)t.tdt=\int_1^2(t^4-t^2)dt$
- Vậy : $I=\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_1^2=\frac{58}{15}$

c. $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

- Đặt : $x=2\sin t \Rightarrow \left[\begin{array}{l} dx=2\cos tdt;\sqrt{4-x^2}-\cos t \\ x=0 \to t=0.x=2 \to t=\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t.2\cos t.2\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 2tdt$
- Vậy : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=\left(t-\dfrac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}$

$d.\ \int_1^2 \dfrac{xdx}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}=\dfrac{1}{2}\int_1^2\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)dx=\dfrac{1}{2}\left[\int_1^2 (2+x)^{\frac{1}{2}}-(2-x)^{\frac{1}{2}}\right]dx$

- Vậy : $I=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2}{3}(2+x)^{\frac{3}{2}}+\dfrac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_1^2=\dfrac{22}{9}-\sqrt{3}$

$e.\ \int_{-1}^0 x\sqrt{1+x}dx$

- Đặt : $t=\sqrt{1+x} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=t^2-1;dx=2tdt \\ x=-1 \to t=0,x=0 \to t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow I=\int_0^1 (t^2-1)t.2tdt=2\int_0^1 (t^4-t^2)dt$
- Vậy : $I=2\left(\dfrac{1}{5}t^5-\dfrac{1}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1=2\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{4}{15}$

$f.\ \int_0^1 x^3\sqrt{x^2+3}dx=\int_0^1 x^2\sqrt{x^2+3}.xdx$

- Đặt : $t=\sqrt{x^2+3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=t^2-3;xdx=tdt \\ x=0 \to t=\sqrt{3},x=1 \to t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow I=\int_{\sqrt{3}}^2 (t^2-1)t.tdt=\int_{\sqrt{3}}^2 (t^4-t^2)dt$
- Vậy : $I=\left(\dfrac{1}{5}t^5-\dfrac{1}{3}t^3\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^2=\dfrac{56-12\sqrt{3}}{15}$

Bài 5. Tính các tích phân sau :

$a.\ \int_{-1}^3 \dfrac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}dx$ $\quad b.\ \int_0^{7/3} \dfrac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$ $\quad c.\ \int_5^{10} \dfrac{dx}{x-2\sqrt{x-1}}$

$d.\ \int_0^1 \dfrac{x^2+x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}dx$ $\quad e.\ \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^3+1}x^3dx$ $\quad f.\ \int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$

GIẢI