CÁC DẠNG TOÁN SỐ PHỨC

Định nghĩa số phức

Số phức z là một biểu thức có dạng z = a + bi, trong đó a và b là các số thực, i là một số thỏa mãn $i^2 = -1$.

a là phần thực; b là phần ảo; i là đơn vị ảo.

Tập hợp các số phức kí hiệu là **C.**

Đặt biệt: Số phức z = a có phần ảo bằng 0 được coi là số thực. Số phức z = bi có phần thực bằng 0 được gọi là số ảo. Số phức z = 0 vừa là số thực, vừa là số ảo.

Số phức bằng nhau

Hai số phức a = a + bi và z' = a' + b'i bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

$$a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Biểu diễn hình học của số phức

Số phức z = a + bi được biểu diễn bởi điểm M(a; b) trong mặt phẳng Oxy.

Mô đun số phức

Môđun số phức z = a + bi là số thực không âm kí hiệu $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của số phức z = a + bi là số phức $\bar{z} = a - bi$.

Cộng, trừ, nhân, chia số phức

Cho hai số phức z = a + bi và z' = a' + b'i.

Cộng hai số phức: (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i.

Trừ hai số phức: (a + bi) – (a' + b'i) = (a – a') + (b – b')i.

Nhân hai số phức: (a + bi)(a' + b'i) = (aa' – bb') + (ab' + a'b)i.

Chia hai số phức: $\dfrac{a + bi}{a' + b'i} = \dfrac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \dfrac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}i = \dfrac{aa' - bb'}{a'^2 + b'^2} - \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}{a'^2 + b'^2}i$

Căn bậc hai của số thực âm

Căn bậc hai của số thực a < 0 là $\pm i\sqrt{|a|}$.

Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với hệ số thực a, b, c và $a \neq 0$.

Khi $\Delta < 0$ phương trình có hai nghiệm phức: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Dạng lượng giác của số phức

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r > 0)$ là dạng lượng giác của số phức z = a + bi, $z \neq 0$

Trong đó $r=\sqrt{a^2+b^2}$ là mô đun của z; φ là một acgumen của z thỏa $\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{r}\\ \sin\varphi=\dfrac{b}{r}\end{cases}$

Nhân chia số phức dưới dạng lượng giác. Nếu z = r(cos φ + i sin φ), $z'=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$ thì

* $z.z'=r.r'\left[\cos(\varphi+\varphi')+i\sin(\varphi+\varphi')\right]$ * $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{r}{r'}\left[\cos(\varphi-\varphi')+i\sin(\varphi-\varphi')\right]$

Công thức Moivre: n là số nguyên dương thì $\left[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$

Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác

Căn bậc hai của số phức z = r(cos φ + i sin φ) (r > 0) là

$\sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}+i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$ và $-\sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}+i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$

Dạng 1 :

Tìm mô đun ,căn bậc hai của số phức, giải phương trình ,hệ phương trình trên tập số phức

Phương Pháp : Cho số phức : z = a + bi với a,b là các số thực

+ Mô đun của số phức z là : $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

+Gọi w = x + yi với x,y $\in R$ là một căn bậc hai của số phức z

Ta có $w^2=a+bi \Leftrightarrow (x+yi)^2=a+bi \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2=a\\ 2xy=b\end{cases}$ giải hệ phương trình trên tìm được các căn bậc hai của số phức z

+Việc giải phương trình ,hệ phương trình được giải tương tự như giải trên trường số thực nhưng chú ý đến việc tìm căn bậc hai của số âm hoặc căn bậc hai của số phức.

Bài 1:

Tìm môđun của số phức $z=1+4i+(1-i)^3$

Lời giải: Vì $(1-i)^3=1^3-3i+3i^2-i^3=1-3i-3+i=-2-2i$

Suy ra: $z=-1+2i \Rightarrow |z|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

Bài 2:

Cho hai số phức: $z_1=\sqrt{3}-5i$; $z_2=\sqrt{3}-i$. Tính $\dfrac{z_1}{z_2}$ và $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$

Lời giải: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\sqrt{3}-5i}{\sqrt{3}-i}=\dfrac{\left(\sqrt{3}-5i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}=\dfrac{8-4\sqrt{3}i}{4}=2-\sqrt{3}i$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\sqrt{2^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{7}$

<u>Bài 3:</u>

Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $z^2+2z+10=0$.

Tính giá trị của biểu thức A = $|z_1|^2+|z_2|^2$

<u>Lời giải:</u> Ta có: $\Delta = 1^2 - 10 = -9 = 9i^2$

Phương trình có các nghiệm: $z_1 = -1 - 3i$; $z_2 = -1 + 3i$

Ta có: $|z_1|^2+|z_2|^2=(-1)^2+(-3)^2+(-1)^2+3^2=20$

<u>Bài 4:</u>

Tìm số phức z thỏa mãn: $|z-(2+i)|=\sqrt{10}$ và $z.\bar{z}=25$

<u>Lời giải</u>: Đặt z = a + bi với a, b $\in \mathbb{R}$, ta có:

$$\begin{cases} z.\bar{z}=25 \\ |z-(2+i)|=\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ |(a-2)+(b-1)i|=\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ (a-2)^2+(b-1)^2=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ 2a+b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \\ \begin{cases} a=5 \\ b=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có hai số phức cần tìm : z = 3 + 4i , z = 5 + 0i

<u>Bài 5:</u>

Cho số phức z = 4 - 3i. Tìm $\dfrac{z+z^2}{\bar{z}}$

Lời giải: $z+z^2=(4-3i)+(4+3i)^2=11-27i$

$$\Rightarrow \frac{z+z^2}{\bar{z}}=\frac{11-27i}{4+3i}=\frac{(11-27i)(4-3i)}{4^2+3^2}=\frac{-37-141i}{25}$$

<u>Bài 6:</u>

Giải phương trình sau (ẩn z): $z+2\bar{z}=(1+5i)^2$

Lời giải: Giả sử $z=a+bi$; $z+2\bar{z}=(1+5i)^2$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow a+bi+2(a-bi)=1+10i+25i^2$

$$\Leftrightarrow 3a-bi=-24+10i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a=-24 \\ -b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=-10 \end{cases} \Rightarrow z=-8-10i$$

<u>Bài 7:</u>

Tìm căn bậc hai của số phức sau: $z=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Lời giải: Ta có: $z=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}=3\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\text{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

Suy ra z có hai căn bậc hai là:

$$\text{w} = \sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{k2\pi}{2}\right)+\text{i}\sin\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{k2\pi}{2}\right)\right]\ (k=0;1)$$

+ Khi $k=0\Rightarrow \text{w} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+\text{i}\sin\frac{3\pi}{8}\right)$

+ khi $k=1\Rightarrow \text{w} = \sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8}+\pi\right)+\text{i}\sin\left(\frac{3\pi}{8}+\pi\right)\right]$

$$= \sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{8}+\text{i}\sin\frac{11\pi}{8}\right)$$

Bài 8:

Tìm các căn bậc hai của số phức: $z=21-20i$

Lời giải:

Gọi $x+yi\ \ (x,y\in\mathbb{R})$ là một căn bậc hai của z.

Ta có: $\begin{cases} x^2-y^2=21 & (1) \\ 2xy=-20 & (2) \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow y=-\frac{10}{x}$

Thay $y=-\frac{10}{x}$ vào (1) ta được: $x^2-\frac{100}{x^2}=21$

$$\Leftrightarrow x^4-21x^2-100=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=25\Leftrightarrow x=\pm 5$$

$x=5\Rightarrow y=-2; x=-5\Rightarrow y=2$

Vậy số phức đã cho có hai căn bậc hai là: $5-2i$ và $-5+2i$

* Cách khác: $z=25-2.5.2i+(2i)^2=(5-2i)^2$

Vậy số phức đã cho có hai căn bậc hai là: $5-2i$ và $-5+2i$

Bài 9:

Giải phương trình: $z^2-2(2+i)z+(7+4i)=0$

Lời giải: Ta có: $\Delta'=-35-12i$. Ta tìm các căn bậc hai $x+yi$ của Δ':

$(x+yi)^2=-35-12i\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-y^2=-35 \\ 2xy=-12 \end{cases}$

Do đó ta giải được 2 căn bậc hai là: $-(1-6i);1-6i$

nên phương trình có hai nghiệm: $z_1 = 3 - 4i$ và $z_2 = 2 + 2i$

Bài 10:

Giải phương trình sau trên ℂ (ẩn z): $z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1 = 0$

Lời giải:

$z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} + 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$ (do $z \neq 0$)

Đặt $w = z + \frac{1}{z} \Rightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = w^2 - 2$, ta được:

$w^2 - 2 + 2w - 1 = 0 \Leftrightarrow w^2 + 2w - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} w=1 \\ w=-3 \end{array}\right.$

Do đó: $z + \frac{1}{z} = 1$ (1) hay $z + \frac{1}{z} = -3$ (2)

+ Giải (1) $\Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$

Ta có: $\Delta = 1 - 4 = -3 = \left(\sqrt{3}i\right)^2$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt: $z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}; z_2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

+ Giải (2) $\Leftrightarrow z^2 + 3z + 1 = 0$. Ta có: $\Delta = 9 - 4 = 5$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt: $z_3 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}; z_4 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$

Tóm lại phương trình đã cho có bốn nghiệm:

$z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}; z_2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}; z_3 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}; z_4 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$

Bài 11:

Giải phương trình sau trên ℂ (ẩn z): $2z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z + 2 = 0$

Lời giải: $2z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 2\left(z - \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$

Đặt $w = z - \frac{1}{z} \Rightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = w^2 + 2$, ta được:

$2\left(w^2 + 2\right) - 2w + 1 = 0 \Leftrightarrow 2w^2 - 2w + 5 = 0$

+ Giải: $2w^2 - 2w + 5 = 0\,(*)$

Ta có: $\Delta' = 1 - 10 = -9 = (3i)^2$

Vậy phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt: $w_1 = \frac{1 + 3i}{2}; w_2 = \frac{1 - 3i}{2}$

Do đó: $z - \frac{1}{z} = \frac{1 + 3i}{2}$ (1) hay $z - \frac{1}{z} = \frac{1 - 3i}{2}$ (2)

+ Giải (1) $\Leftrightarrow z^2 - \left(\frac{1 + 3i}{2}\right)z - 1 = 0 \Leftrightarrow 2z^2 - (1 + 3i)z - 2 = 0$

Ta có: $\Delta = (1+3i)^2 + 16 = 8 + 6i$

Số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của $\Delta = 8 + 6i$ khi và chỉ khi

$$z^2 = 8 + 6i \Leftrightarrow (x+yi)^2 = 8 + 6i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 8 + 6i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \quad (**)$$

Giải (**) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{9}{x^2} = 8 \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} hay \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Suy ra có hai căn bậc hai của Δ là $3+i$ và $3-i$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm: $z_1 = \dfrac{1+3i+3+i}{4} = 1+i; z_2 = \dfrac{1+3i-3-i}{4} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

+ Giải (2) $\Leftrightarrow z^2 - \left(\dfrac{1-3i}{2}\right)z - 1 = 0 \Leftrightarrow 2z^2 - (1-3i)z - 2 = 0$

Ta có: $\Delta = (1-3i)^2 + 16 = 8 - 6i$

Số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của $\Delta = 8 - 6i$ khi và chỉ khi

$$z^2 = 8 - 6i \Leftrightarrow (x+yi)^2 = 8 - 6i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 8 - 6i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases} (***)$$

Giải (***) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{9}{x^2} = 8 \\ y = -\dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \\ y = -\dfrac{3}{x} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = -\dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = -\dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Suy ra có hai căn bậc hai của Δ là $-3+i$ và $3-i$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm: $z_3 = \dfrac{1-3i+3-i}{4} = 1-i; z_4 = \dfrac{1-3i-3+i}{4} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Tóm lại phương trình đã cho có bốn nghiệm:

$z_1 = 1+i; z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i; z_3 = 1-i; z_4 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Bài 12:

Giải hệ phương trình sau trên tập số phức: $\begin{cases} Z_1 + Z_2 = 2+3i \\ Z_1^2 + Z_2^2 = 5-4i \end{cases}$

Lời giải: hpt $\Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 + Z_2 = 2+3i \\ Z_1.Z_2 = -5+8i \end{cases}$

Z_1 và Z_2 là 2 nghiệm phương trình: $Z^2 - (2 + 3i)Z - 5 + 8i = 0$

Có $\Delta = 15-20i = \left[\sqrt{5}(2-i)\right]^2$

$$\left[\begin{array}{l} Z_1 = \left(1+\sqrt{5}\right) + \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}i \\ Z_2 = \left(1-\sqrt{5}\right) + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}i \end{array}\right.$$

Dạng 2:

Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức

Phương pháp : + Gọi số phức có dạng : z = x + yi với x,y là các số thực

+ Dựa vào giả thiết bài toán tìm xem với điểm M(x; y) thỏa mãn phương trình nào .

+ Kết luận tập hợp điểm biểu diễn số phức z đã cho.

Bài 13:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-(3-4i)|=2$

Lời giải: Đặt z = x + yi; x, y $\in \mathbb{R}$, ta có:

$|z-(3-4i)|=2 \Leftrightarrow |(x-3)+(y+4)i|=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}=2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=2$

Vậy tập hợp các điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z = x + yi thỏa mãn điều kiện đã cho là đường tròn tâm I(3; -4); bán kính R = 2

Bài 14:

Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|$

Lời giải: Gọi z = x + yi (x, y $\in \mathbb{R}$)

Ta có: $2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|$

$\Leftrightarrow 2|x+(y-1)i|=|(2+2y)i|$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(2+2y)^2}$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x^2$

Bài 15:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-(5i-2)\right|=2$

Lời giải: Đặt z = x + yi (x, y $\in \mathbb{R}$)

Ta có: z - 5i + 2 = (x + 2) + (y - 5)i

Suy ra: $\left|z-(5i-2)\right|=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}=2 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-5)^2=4$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm I(-2; 5), bán kính R = 2.

Dạng 3:

Biểu diễn số phức dưới dạng đại số , dạng lượng giác

Phương pháp : + Nắm vững Acgumen của số phức z $\neq$ 0

+ Dạng đại số : z = a + bi với a,b$\in$R

+ Dạng lượng giác : $z=r(\cos\varphi+\text{i}.\sin\varphi)$ với r là mô đun của số phức z và φ là một Acgumen của số phức z

+ Nhân và chia hai số phức dưới dạng lượng giác

+ Công thức Moivre : $\left[r(\cos\varphi+\text{i}.\sin\varphi)\right]^n=r^n(\cos n\varphi+\text{i}.\sin n\varphi)$

<u>Bài 16:</u>

Viết số phức sau dưới dạng đại số: $z=\dfrac{(\sqrt{3}-i)^9}{(1+i)^5}$

Lời giải: + Xét $z_1=(\sqrt{3}-i)=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\text{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

$\Rightarrow z_1^9=2^9\left[\cos\left(-\dfrac{9\pi}{6}\right)+\text{i}\sin\left(-\dfrac{9\pi}{6}\right)\right]=2^9\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+\text{i}\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

+ Xét $z_2=(1+i)=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{4}+\text{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right]$

$\Rightarrow z_2^5=(\sqrt{2})^5\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+\text{i}\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+\text{i}\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow z=\dfrac{z_1^9}{z_2^5}=64\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)+\text{i}\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]=64\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=-64-64i$

<u>Bài 17:</u>

Viết dạng lượng giác của số phức $z=1-\sqrt{3}i$

Lời giải: $z = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)i\right]$

Bài 18:

Viết dưới dạng lượng giác rồi tính: $(1+i)^{2010}$

Lời giải: $(1+i)^{2010} = \left(\sqrt{2}\right)^{2010}\left(\cos\frac{2010\pi}{4} + i\sin\frac{2010\pi}{4}\right)$

$$= 2^{1005}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2^{1005}(0+i) = 2^{1005}.i$$

Bài 19:

Tìm dạng lượng giác của số phức sau: $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$

Lời giải:

$$z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} = \frac{2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)} = \frac{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}{2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]} = 1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Bài 20:

Tìm phần thực và phần ảo của số phức sau: $z = \frac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}i\right)^{2008}}{\left(\sin\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{6}\right)^{2009}}$

Lời giải: $z = \frac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}i\right)^{2008}}{\left(\sin\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{6}\right)^{2009}} = \frac{\left[2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^{2008}}{\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{2009}}$

$$= \frac{\left[2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{2008}}{\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^{2009}}$$

$$= \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^{2008}\left[\cos\left(-\frac{2008\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2008\pi}{3}\right)\right]}{\cos\left(-\frac{2009\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{2009\pi}{6}\right)}$$

$$=\left(2\sqrt{2}\right)^{2008}\left[cos\left(-\frac{2008\pi}{3}+\frac{2009\pi}{6}\right)+\text{isin}\left(-\frac{2008\pi}{3}+\frac{2009\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2^{3012}\left[\cos\left(-\frac{669\pi}{2}\right)+\text{isin}\left(-\frac{669\pi}{2}\right)\right]=-2^{3012}i$$

Do đó: phần thực bằng 0; phần ảo bằng -2^{3012}.

Bài 21:

Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$. Hỏi các số sau đây là số thực hay số ảo:

a) $z^2-(\bar{z})^2$ b) $\frac{z^2+(\bar{z})^2}{1+z\bar{z}}$

Lời giải:

a) $z^2-(\bar{z})^2=(a+bi)^2-(a-bi)^2=4abi$ là số ảo

b) $\frac{z^2+(\bar{z})^2}{1+z\bar{z}}=\frac{(a+bi)^2+(a-bi)^2}{1+(a+bi)(a-bi)}=\frac{2(a^2+b^2)}{1+a^2+b^2}$ là số thực

Bài 22:

Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z=2010i^{2009}+2009i^{2010}$

Lời giải: $z=2010i^{2009}+2009i^{2010}=2010(i^2)^{1004}.i+2009(i^2)^{1005}=2010i-2009$

$\Rightarrow$ phần thực và phần ảo

Bài 23:

Giải phương trình sau trên tập hợp số phức: $z^2-2(1+2i)z+8i=0$

CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ PHỨC CÓ HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Phần 1: Dạng đại số của số phức

Bài 1: Tính z + $\bar{z}$ và z . $\bar{z}$ với :

a) z = 2 + 3i b) z = -5 + 3i . ĐS: a) 4 và 13 b) -10 và 34

Bài 2: Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau :

a) (4 – i) + (2 + 3i) – (5 + i) b) $(1 + i)^2 – (1 – i)^2$ c) $(2 + i)^3 – (3 – i)^3$ d) $\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}-\frac{\sqrt{2}+i}{i}$

ĐS: a) 1 và 1 b) 0 và 4 c) -16 và 37 d) $\frac{\sqrt{3}-3}{2}$ và $\frac{2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}}{2}$

Bài 3: Tính :

a) $\frac{1+i\tan x}{1-i\tan x}$ b) $\frac{a+bi}{a-bi}$ c) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$ d) $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$

ĐS: a) cos2x + isin2x b) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}$ c) 2 d) $\frac{-1-32i}{25}$

Bài 4: Tính: a) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ (với n là số nguyên dương) b) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$. ĐS: a) $-2i^{n+1}$ b) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

Bài 5: Giả sử $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, tính :

a) $(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon)$ b) $(a+b)(a+b\varepsilon)(a+b\varepsilon^2)$ c) $(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)^3+(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon)^3$

d) $(a\varepsilon^2+b\varepsilon)(b\varepsilon^2+a\varepsilon)$ HD: Để ý : $\varepsilon^2=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$ và $\varepsilon^3=1$

a) $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac)$ b) a^3+b^3

c) $2(a^3+b^3+c^3)-3(a^2b+a^2c+b^2a+c^2a+c^2b)+12abc$ d) a^2-ab+b^2

Bài 6: Giải các hệ phương trình sau với x, y, z là số phức :

a) $\begin{cases}(3-i)x+(4+2i)y=2+6i\\(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i\end{cases}$ b) $\begin{cases}(2+i)x+(2-i)y=6\\(3+2i)x-(3-2i)y=8\end{cases}$

ĐS: a) x = 1 + i , y = i b) x = 2 + i , y = 2 – i

Bài 7: Tìm các số liên hợp với :

a) Bình phương của chính nó. b) Lập phương của chính nó.

ĐS: a) 0; 1; $-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$ b) 0; 1; -1; i; -i

Bài 8: Cho số phức z = x + iy (x, y thuộc R). Tìm phần thực và phần ảo của các số phức:

a) $z^2-2z+4i$ b) $\frac{\bar{z}+i}{iz-1}$

ĐS: a) x^2-y^2-2x và $2(xy-y+2)$; b) $\frac{-2xy}{x^2+(y+1)^2}$ và $\frac{y^2-x^2-1}{x^2+(y+1)^2}$

Bài 9: Giải các phương trình sau (ẩn z) :

a) $\frac{2+i}{1-i}z=\frac{-1+3i}{2+i}$ b) $\left((2-i)\bar{z}+3+i\right)\left(iz+\frac{1}{2i}\right)=0$. ĐS: a) $\frac{22}{25}+\frac{4}{25}i$ b) -1 + i , ½

Bài 10: a) Chứng minh : $i^{2k+1}=(-1)^k.i, k\in N; i^{2k}=(-1)^k, k\in N.$

b) Giả sử $z_k=i^{2k}+i^{2k+1}, k\in N$. Tính tổng z_k+z_{k+1} . ĐS: b) 0.

Bài 11: Thực hiện các phép tính :

a) $\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$; b) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^2-(2+i)^2}$; c) $\frac{(2+i)^3+(2-i)^3}{(2+i)^3-(2-i)^3}$; d) $(2-i)^6$

ĐS: a) $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$ b) $\frac{21}{34}+\frac{9}{17}i$ c) $-\frac{2}{11}i$ d) -117 – 44i

Bài 12: Cho hai số phức z = a + bi và z' = a' + b'i

a) Với điều kiện nào giữa a, b, a', b' thì tổng của chúng là số thực ? số ảo?

b) Cũng câu hỏi trên đối với hiệu z – z' .
ĐS: a) z + z' là số thực nếu b = -b' , là số ảo nếu a = -a' , $b \neq -b'$
b) z – z' là số thực nếu b = b' , là số ảo nếu a = a', $b \neq b'$.
Bài 13: a) Với điều kiện nào giữa a, b thì bình phương của z = a + bi là số thực, số ảo?
b) Cũng câu hỏi trên đối với z^3.
HD: a) $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$.
Z^2 là số thực nếu a = 0 hoặc b = 0 hoặc a = b = 0 .
Z^2 là số thuần ảo nếu $|a| = |b| \neq 0$
b) $z^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i$
z^3 là số thực nếu b = 0 hoặc $b^2 = 3a^2$
z^3 là số ảo nếu a = 0, $b \neq 0$ hoặc $a^2 = 3b^2$, $b \neq 0$.
Bài 14: Xác định tập điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn : a) $z = a + ai, a \in R$ b) $\frac{1}{z-i}$ là số ảo
ĐS: a) Đường thẳng y = x b) Trục ảo Oy trừ (i)
Bài 15: Xác định tập điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn :
a) z^2 là số thực âm b) $|z - i + 2| + |z + i| = 9$. ĐS: a) Trục thực Ox từ gốc O. b) Elip
Bài 16: Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z = x + yi với x, y thuộc R và thỏa mãn :
a) $1 \leq |z| \leq 3$ b) $\begin{cases} x + y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$
Bài 17: Chứng minh rằng :
a) Bình phương của hai số phức liên hợp cũng là liên hợp.
b) Lập phương của hai số phức liên hợp cũng là liên hợp.
c) Lũy thừa bậc n của 2 số phức liên hợp cũng là liên hợp.
Bài 18: Cho z = a + bi. Chứng minh $|z|\sqrt{2} \geq |a| + |b|$. Khi nào thì đẳng thức xảy ra ? ĐS: $b = \pm a$
Bài 19: a) Các điểm A, B, C và A', B', C' trong mặt phẳng phức biểu diễn theo thứ tự các số :
1 – i ; 2 + 3i ; 3 + i và 3i ; 3 – 2i ; 3 + 2i. CMR ABC và A'B'C' là 2 tam giác có cùng trọng tâm.
b) Biết các số phức biểu diễn bởi ba đỉnh nào đó của một hình bình hành trong mặt phẳng phức , hãy tìm số biểu diễn bởi đỉnh còn lại.
HD: b) $z_1 + z_2 - z_3$, $z_2 + z_3 - z_1$, $z_3 + z_1 - z_2$
Bài 20: a) Xác định tập hợp các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z = x + yi
$(x, y \in R)$ thỏa mãn điều kiện $z^2 + \left(\bar{z}\right)^2 = 0$
b) Tìm số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện : $z^2 + \left(\bar{z}\right)^2 = 0$ và $\left|\frac{z-1}{z-3}\right| = 1$

HD: a) $z^2+\left(\bar{z}\right)^2=2\left(x^2-y^2\right)$. Suy ra $z^2+\left(\bar{z}\right)^2=0 \Leftrightarrow x^2=y^2$

Vậy tập hợp cần tìm là hai đường thẳng : y = ± x

b) $\left|\frac{z-1}{z-3}\right|=1 \Leftrightarrow x=2$ nên có hai số phức thỏa mãn đề bài là : $z_1 = 2(1 + i)$ và $z_2 = 2(1 – i)$

Bài 21: A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số :
1 + 2i , $1+\sqrt{3}+i, 1+\sqrt{3}-i, 1-2i$

Chứng minh rằng ABCD là một tứ giác nội tiếp đường tròn. Hỏi tâm đường tròn đó biểu diễn số phức nào?

HD: vì mỗi cặp số 1 + 2i, 1 – 2i và $1+\sqrt{3}+i, 1+\sqrt{3}-i$ là cặp số phức liên hiệp nên hai điểm A, D và hai điểm B, C đối xứng qua Ox; phần thực của hai số đầu khác phần thực của hai số sau nên ABCD là một hình thang cân . Do đó nó là một tứ giác nội tiếp đường tròn có tâm J nằm trên trục đối xứng Ox; J biểu diễn số thực x sao cho :
$\left|\overrightarrow{JA}\right|=\left|\overrightarrow{JB}\right| \Leftrightarrow \left|1-x+2i\right|=\left|1-x+\sqrt{3}+i\right| \Leftrightarrow x=1$. Từ đó suy ra tâm đường tròn biểu diễn : z = 1

* Cách khác: $\overrightarrow{AB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3}-i, \overrightarrow{DB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3}+3i$. Mà $\frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i}=\sqrt{3}i$ nên

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB}=0$.

T/tự (hay vì lí do đ/x qua Ox), $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AC}=0$.Từ đó suy ra AD là một đ/kính của đ/tròn đi qua các điểm A, B, C, D.

Phần 2: Căn bậc hai và phương trình

Bài 1: Tìm các căn bậc hai của số phức: a) z = 200 b) z = - 13. ĐS: a) $\pm 10\sqrt{2}$ b) $\pm i\sqrt{13}$

Bài 2: Tìm các căn bậc hai của số phức:

a) 3 + 4i b) $1-2i\sqrt{2}$ $1-2i\sqrt{2}$. ĐS: a) $\pm(2+i)$ b) $\pm\left(\sqrt{2}-i\right)$

Bài 3: Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau:

a) $-1+4\sqrt{3}i$ b) -8i. ĐS: a) $\pm\left(\sqrt{3}+2i\right)$ b) $\pm(2-2i)$

Bài 4: Tìm các căn bậc hai của số phức: a) -8 + 6i b) -8 – 6i c) 8 – 6i d) 8 + 6i

ĐS: a) $\pm(1+3i)$ b) $\pm(1-3i)$ c) $\pm(3-i)$ d) $\pm(3+i)$

Bài 5: Gọi z là căn bậc hai của 4 + i, z' là căn bậc hai của 4 – i. Tính z + z'.

ĐS: $\pm\sqrt{8+2\sqrt{17}}, \pm i\sqrt{-8+2\sqrt{17}}$

Bài 6: Tìm số phức z mà z^3 = -i. ĐS: Có 3 số phức : i, $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

Bài 7: Tìm số phức z mà z^4 = -1. ĐS: Có 4 số phức : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$ và $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$ 2

Bài 8: Cho z = a + bi có các căn bậc hai là $\pm(m+ni)$. Tìm các căn bậc hai của –a – bi và a – bi

ĐS: $\pm(n-mi)$ và $\pm(m-ni)$

Bài 9: Giải các phương trình bậc hai sau đây trong tập hợp các số phức C:

a) $z^2 - z + 2 = 0$ b) $2z^2 - 5z + 4 = 0$ (Tốt nghiệp THPT 2006)

ĐS: a) $z = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ b) $z = \frac{5 \pm i\sqrt{7}}{4}$

Bài 10: Giải các phương trình :

a) $z^2 + z + 1 = 0$ b) $z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0$ ĐS: a) $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$

Bài 11: Trong C hãy giải các phương trình sau đây:

a) $x^2 - (3 - i)x + 4 - 3i = 0$ b) $3x^2\sqrt{2} - 2x\sqrt{3} + \sqrt{2} = 0$. ĐS: a) 2 + i ; 1 – 2i b) $\frac{\sqrt{6}}{6} \pm i\frac{\sqrt{6}}{6}$

Bài 12: Giải các phương trình sau: a) $x^2 + 3ix + 4 = 0$ b) $2x^2 - (4 + i)x = 1$

ĐS: a) $x_1 = i$; $x_2 = -4i$ b) $x_1 = \frac{1}{4}\left(4 + \sqrt{\frac{\sqrt{593}+23}{2}}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{\frac{\sqrt{593}-23}{2}}\right)i$

$x_2 = \frac{1}{4}\left(4 - \sqrt{\frac{\sqrt{593}+23}{2}}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{\frac{\sqrt{593}-23}{2}}\right)i$

Bài 13: Giải các phương trình $z + \frac{1}{z} = k$ trong các trường hợp sau:

a) k = 1 b) $k = \sqrt{2}$ ĐS: a) $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ b) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$

Bài 14: Giải các phương trình trong C:

a) $z^2 + \bar{z} = 0$ b) $(z^2 + z)^2 + 4(z^2 + z) - 12 = 0$

HD: Đặt z = x + yi dẫn đến hệ phương trình hai ẩn x, y:

Kết quả: $z_1 = 0$; $z_2 = -1$; $z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; z_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) 1, -2 , $\frac{-1+\sqrt{23}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{23}i}{2}$

Bài 15: Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm: $z_1 = 6 - 3i$ và $z_2 = i$. ĐS: $z^2 - (6 - 2i)z + 6i + 3 = 0$

Bài 16: Chứng minh rằng:

Nếu phương trình: $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$ với các hệ số thực có nghiệm là z_0 thì z_0 cũng là nghiệm của phương trình.

Bài 17: Giải các phương trình trong tập C:

a) $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$ b) $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$ ĐS: a) x = $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\pm\frac{i}{2}$ b) x = $\pm 4 \pm i$

Bài 18: Giải phương trình trong C: $x^3 + 8 = 0$

HD: Ta có: $x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x^2-2x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1\pm i\sqrt{3} \end{array}\right.$

Bài 19: Cho phương trình $3z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 4z - 2 = 0$

a) Chứng tỏ rằng 1 + i là nghiệm của phương trình.

b) Tìm các nghiệm còn lại.

ĐS: b) $z_2 = 1 - i$; $z_3 = -\frac{1+\sqrt{13}}{6}; z_4 = \frac{\sqrt{13}-1}{6}$

Bài 20: Giải phương trình $z^4 + 4 = 0$ và biểu diễn tập nghiệm trên mặt phẳng phức.

HD: Ta có : $z^4 + 4 = (z^2 + 2i)(z^2 - 2i) = 0$

Nghiệm của $z^2 + 2i = 0$ là các căn bậc hai của -2i, đó là: $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + i$

Nghiệm của $z^2 - 2i = 0$ là các căn bậc hai của 2i, đó là: $z_3 = 1 + i$, $z_4 = -1 - i$

Vậy $z^4 + 4 = 0$ có 4 nghiệm z_1, z_2, z_3, z_4 .

Phần 3: Dạng lượng giác của số phức

Bài 1: Viết dạng đại số của số phức sau:

a) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i.\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ b) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i.\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

HD: a) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i.\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-i$

b) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i.\sin\frac{3\pi}{4}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

Bài 2: Biểu diễn các số phức sau dưới dạng lượng giác: a) -1 + i b) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ĐS: a) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ b) $8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ c) $\cos\frac{2\pi}{3}+i.\sin\frac{2\pi}{3}$

Bài 3: Tìm số phức z thỏa : (1 – z)(1 + 2i) + (1 – iz)(3 – 4i) = 1 + 7i . Viết số phức z dưới dạng lượng giác.

ĐS: $z = -\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i=\frac{3\sqrt{5}}{5}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ trong đó : $\cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{5}},\sin\varphi=-\frac{2}{\sqrt{5}}(\pi<\varphi<\frac{3\pi}{5}$

Bài 4: Tìm một acgumen của mỗi số phức sau:

a) $-\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}$ b) $1-\sin\varphi+i\cos\varphi(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ ĐS: a) $-\frac{5\pi}{8}$; b) $\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$

Bài 5: Viết dưới dạng lượng giác của các số phức:

a) $1-i\tan\frac{\pi}{5}$ b) $1-\cos\varphi-i\sin\varphi(\varphi\neq k2\pi,k\in z)$

HD: a) Ta có : $1-i\tan\frac{\pi}{5}=1-i\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$

b) $1-\cos\varphi-i\sin\varphi=2\sin^2\frac{\varphi}{2}-2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$

Bài 6: a) Với điều kiện nào thì môđun của tổng hai số phức bằng tổng các môđun của hai số hạng?

b) Khi nào thì môđun của tổng hai số phức bằng hiệu các môđun của hai số hạng ?

ĐS: a) Nếu hiệu hai acgumen bằng 2kπ, k là số nguyên.

b) Nếu hiệu hai acgumen bằng $\pi+2k\pi$, với k nguyên.

Bài 7: Tìm hệ thức liên hệ giữa hai acgumen của 2 số phức z_1, z_2 : Arg z_1 và Arg $z_2$trong từng trường hợp sau:

a) $z_1z_2 = k$, $k < 0$ b) $z_1z_2 = -i$ c) $z_1 = -3z_2$ d) $\frac{\overline{z_1}}{z_2}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ĐS: a) $\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2=\pi+k2\pi$ b) $\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$

c) $\mathrm{Arg}z_1=\pi+\mathrm{Arg}z_2+2k\pi$ d) $\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2=-\frac{\pi}{3}+k2\pi$

Bài 8: Tìm số phức z thỏa : $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|1-z|$

Bài 9: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện : a) $|z+1-i|\leq1$ b) $|z-5i|\leq3$

tìm các số có acgumen dương nhỏ nhất . ĐS: a) z = i b) $\frac{12}{5}+\frac{16}{5}i$

Bài 10: Viết z_1 và z_2 dưới dạng lượng giác rồi tính $z_1.z_2$ và $\frac{z_1}{z_2}$

a) $z_1=1+i\sqrt{3}$ và $z_2 = 1 + i$. Suy ra : $\cos\frac{\pi}{12}$ và $\sin\frac{\pi}{12}$

b) $z_1=\sqrt{3}+i$ và $z_2 = 1 - i$. Suy ra $\cos\frac{5\pi}{12}$ và $\sin\frac{5\pi}{12}$

Bài 11: Tìm vị trí của những điểm biểu diễn các số phức có:

a) Môđun bằng 2; 3. b) Acgumen bằng $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$.

ĐS: a) Các đường tròn tâm O và bán kính R = 2, R = 3.

b) Đó là các tia không kể gốc O , lần lượt là : Oz_1, Oz_2, Oz_3, Oz_4.

Bài 12: Cho A, B, C D là bốn điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số :
$4 + (3 + \sqrt{3})i;2+(3+\sqrt{3})i;1+3i$ và 3 + i

Chứng minh rằng bốn điểm đó cùng nằm trên một đường tròn.
HD: Cách 1: Đưa về bài toán tọa độ; Cách 2: Dự đoán tâm i(3 + 3i)
Cách 3: Chứng minh góc lượng giác:

Bài 13: Dùng công thức Moivre để tính :

a) $\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)^5$ b) $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$ c) $(1 + i)^{16}$. ĐS: a) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) 1 c) 256

Bài 14: Tính gọn:

a) $\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)i^5\left(1+\sqrt{3}i\right)^7$ b) $\frac{(1+i)^{10}}{\left(\sqrt{3}+1\right)^9}$ c) $z^{2000}+\frac{1}{z^{2000}}$ biết rằng $z+\frac{1}{z}=1$

ĐS: a) 128i b) -1/16 c) -1

Bài 15: Tính :

a) $(1 + i)^n$ b) $\varepsilon_1^n+\varepsilon_2^n$ với $\varepsilon_1=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2};\varepsilon_2=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$. ĐS: a) $2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$ b) $2\cos\frac{2n\pi}{3}$

Bài 16: Viết dạng lượng giác các căn bậc hai của số phức: a) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ c) $-\sqrt{3}-i$

ĐS: a) $z_1=\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ và $z_2=-\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

b) $z_1=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ và $z_2=-\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}$

c) $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ và $z_2=-\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

Bài 17: Tìm nghiệm phức của phương trình : $z^4 - 1 = i$

Bài 18: Với n nguyên dương nào thì số phức: $\left(\frac{7+i}{4-3i}\right)^n$ là số thực, số ảo.

HD: $\left(\frac{7+i}{4-3i}\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

Số đó là số thực $\Leftrightarrow \sin\frac{n\pi}{4}=0 \Leftrightarrow n=4k$ (k nguyên dương)

Số đó là số ảo $\Leftrightarrow \cos\frac{n\pi}{4}=0 \Leftrightarrow n=4k+2$ (k là số nguyên không âm)

Bài 19: Biểu diễn $\cos^5x.\cos^6x$ theo coskx.

ĐS: $\cos^5x = \frac{1}{10}\left(\cos5x+5\cos3x+10\cos x\right)$; $\cos^6x = \frac{1}{32}\left(\cos6x+6\cos4x+15\cos2x+10\right)$

Bài 20: Chứng minh :

a) $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + ... = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$; b) $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + ... = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$

Bài 21: Cho số phức dạng lượng giác z = $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Đặt $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Chứng minh :

a) $z = r.e^{i\varphi}$; b) $(r.e^{i\varphi}).(r'.e^{i\varphi'}) = rr'.e^{i(\varphi+\varphi')}; z^n = r^n.e^{in\varphi}$; c) $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \sin^3\varphi = \frac{1}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi)$

Phần 4: Bài tập tổng hợp về số phức

Bài 1: Viết các số phức sau dưới dạng đại số:

a) z = $2i^{10} + i^3$ b) z = $i^{2007} + i^{2008}$ ĐS: a) -2 –i ; b) 1 – i

Bài 2: Viết dưới dạng a + bi các số phức sau:

a) z = $(1 + i)^2 - (1 - i)^2$ b) z = $(2 + i)(-1 + i)(1 + 2i)^2$

c) $z = (1 + i\sqrt{3})^3$ d) $z = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$

ĐS: a) 4i b) 5 – 15i c) -8 d) 1

Bài 3: Tính : a) $(1 + 2i)^6$ b) $(2 + i)^7 + (2 - i)^7$ ĐS: a) 117 + 44i ; b) -556

Bài 4: Giải hệ phương trình với ẩn số thực:

$$\begin{cases} (1+i)x + (1+2i)y + (1+3i)z + (1+4i)t = 1+5i \\ (3-i)x + (4-2i)y + (1+i)z + 4it = 2-i \end{cases}$$

ĐS: x = -2; y = 3/2; z = 2 ; t = -1/2

Bài 5: Cho hai số phức z = a + bi và z' = a' + b'i

Với điều kiện nào giữa a, b, a',b' thì tích z.z' của chúng là số thực ?số ảo?

ĐS: ab' + a'b = 0 và aa' – bb' = 0 ; ab' + a'b $\neq 0$

Bài 6: Tính: a) $(\sqrt{3}+i)^2 - (\sqrt{3}-i)^2$ b) $(\sqrt{3}+i)^2 + (\sqrt{3}-i)^2$

c) $(\sqrt{3}+i)^3 - (\sqrt{3}-i)^3$ d) $\frac{(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)^2}$

HD: a) $4\sqrt{3}i$ b) $2(3 + i^2) = 4$ c) 2i.8 = 16i d) $\frac{(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)^2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

Bài 7: Tìm phần thực và phần ảo của số phức: z = $(x + iy)^2 - 2(x + iy) + 5$ (x, y $\in$ R)

Với x, y nào thì số phức đó là số thực?

Bài 8: Cho các số phức: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - 2i$. Hãy tính: $z_1^2.z_1z_2; 2z_1 - z_2; z_1\overline{z_2}$ và $\frac{z_2}{z_1}$

Bài 9: Thực hiện phép tính: a) $\frac{3}{1+2i}$ b) $\frac{1+i}{1-i}$ c) $\frac{m}{i\sqrt{m}}$ d) $\frac{a+i\sqrt{a}}{a-i\sqrt{a}}$ e) $\frac{a+i\sqrt{b}}{i\sqrt{a}}$

Bài 10: Phân tích ra thừa số phức : a) $a^2 + 1$ b) $2a^2 + 3$ c) $4a^2 + 9b^2$ d) $3a^2 + 5b^2$

<u>Bài 11:</u> Tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn các điều kiện :
a) $|z+1+2i|\le 0$ b) $(1-i)\bar{z}=(1+i)z$ c) $\lg|z+i|\le 1$ d) $|z-2|^2+|z+2|^2=26$

<u>Bài 12:</u> Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z : $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|1-z|$

<u>Bài 13:</u> Cho số phức z = a + bi . Một hình vuông tâm là gốc tọa độ O, các cạnh song song với các trục tọa độ có độ dài bằng 4. Hãy xác định điều kiện của a và b để điểm biểu diễn của z:
a) Nằm trong hình vuông b) Nằm trên đường chéo hình vuông.

<u>Bài 14:</u> X/định tập hợp các điểm M trên mphẳng phức biểu diễn các số phức $\left(1+i\sqrt{3}\right)z+2$, trong đó $|z-1|\le 2$.

<u>Bài 15:</u> Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn từng điều kiện sau: a) $|2i-2\bar{z}|=|2z-1|$ b) $|2iz-1|=2|z+3|$

<u>Bài 16</u>: Tìm các căn bậc hai của số phức : a) 6 b) -2 ĐS: a) $\pm\sqrt{6}$ b) $\pm\sqrt{2}i$
<u>Bài 17:</u> Tìm các căn bậc hai của số phức : a) -5 + 12i b) $-17-20\sqrt{2}i$
<u>Bài 18:</u> Giải các phương trình trong tập số phức: a) $x^2 + 81 = 0$ b) $x^2 - x + 2 = 0$
<u>Bài 19:</u> Giải các phương trình: a) $z^2 - (3 - i)z + (4 - 3i) = 0$ b) $3ix^2 - 2x - 4 + i = 0$
<u>Bài 20:</u> Tìm số phức B để pt bậc hai $z^2 + Bz + 3i = 0$ có tổng bình phương hai nghiệm bằng 8.
<u>Bài 21:</u> Lập phương trình có ẩn số x mà x phải thỏa mãn: Nếu số phức z = x + iy là một nghiệm của phương trình $z^2 + pz + q = 0$, trong đó p, q là những số thực.

<u>Bài 22:</u> Giải phương trình: a) $z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = 0$

b) $(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) - 3z^2 = 0$

<u>Bài 23:</u> Tìm điều kiện cần và đủ về các số thực p,q để phương trình: $z^4 + pz^2 + q = 0$
a) Chỉ có nghiệm thực. b) Không có nghiệm thực. c) Có cả nghiệm thực và nghiệm không thực.
<u>Bài 24:</u> Gọi j là số phức có hệ số ảo dương và thỏa mãn $j^3 = 1$.Chứng minh rằng mọi số phức z = a + bi đều viết được dưới dạng z = x + yj với x và y thực. Nêu qui tắc cộng và nhân hai số phức dưới dạng đó.Viết số $\frac{1}{z}$ dưới dạng đó.

<u>Bài 25:</u> Định a để phươnh trình $z^3 - az^2 + 3az + 37 = 0$ có một nghiệm bằng -1. Tính các nghiệm z_1 và z_2 còn lại trong C. Vẽ ảnh A, M, N của -1, z_1,z_2. Tính chất của tam giác AMN?
<u>Bài 26:</u> Viết dạng đại số của số phức:

a) $\cos\pi + i\sin\pi$ b) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ c) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi\pi}{3}\right)$

Bài 27: Cho $z_1 = 5\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{7} + i\sin\frac{3\pi}{7}\right)$. Tính z_1, z_2; $|z_1.z_2|$ và arg($z_1.z_2$).

Bài 28: Viết dạng lượng giác của số phức: $-\sqrt{3}-i; \sqrt{3}+i; 4; -3i$

Bài 29: Cho số phức z_1, z_2 có một acgumen tương ứng là φ_1, φ_2. Tìm quan hệ φ_1, φ_2 để:

a) $z_1z_2 = k$, $k > 0$ b) $z_1z_2 = 2i$ c) $z_1 = 3.\overline{z_2}$

Bài 30: Viết các số sau đây dưới dạng lượng giác: a) $z = \dfrac{1}{1+i\tan\varphi}$ b) $z = 1+\cos\varphi+i\sin\varphi$

Bài 31: Chứng minh mọi số phức $z \neq -1$ mà môđun bằng 1, đều có thể đặt dưới dạng : $z = \dfrac{1+ti}{1-ti}$, trong đó t là một số thực nào đó.

Bài 32: Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z biết rằng một acgumen của $\dfrac{z+i}{z-i}$ bằng $\dfrac{\pi}{3}$.

Bài 33: a) Xét các điểm trong mặt phẳng biểu diễn các số 2 + i, 3 + i để chứng minh rằng nếu $\tan a = \frac{1}{2}$,

$\tan b = \frac{1}{5}$ với a, b $\in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì $a + b = \frac{\pi}{4}$.

b) Xét các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số 2 + i, 5 + i, 8 + i để chứng minh rằng nếu

$\tan a = \frac{1}{2}$, $\tan b = \frac{1}{3}$, $\tan c = \frac{1}{8}$ với a, b, c $\in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì $a + b + c = \frac{\pi}{4}$.

Bài 34: Tính gọn : a) $(1 + i)^{25}$ b) $\left(\sqrt{3}-i\right)^n$ c) $\left(1+\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^6$

Bài 35: Tính gọn: a) $\left(\dfrac{1+2\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ b) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$ c) $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{20}} + \dfrac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$

Bài 36: Viết dạng lượng giác các căn bậc hai của số phức: a) $1 + i\sqrt{3}$ b) $\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$

Bài 37: Tìm nghiệm phức của phương trình: a) $x^3 + 2i = 2$ b) $(x + 2)^5 + 1 = 0$.

Bài 38: Cho $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$. Tìm $n \in N^*$ để : a) z^n là số thực. b) z^n là số ảo.

Bài 39: Tìm tổng hữu hạn: a) $C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \frac{1}{27}C_n^7 + -...$ b) $C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + -...$

Bài 40: Biểu thị: a) sin 7x theo sinx, cosx. b) tan 6x theo tan x

Bài 41 :(Đại học KA 2010) Tìm phần ảo của số phức z biết :

Bài 41: (Đại học KA 2010) Tìm modun của số phức $\bar{z}+iz$ Biết số phức z thỏa mãn

$$z=\left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right)$$

$$\bar{z}=\frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$$

Bài 42: :(Đại học KB 2010) Trong mp tọa độ Oxy tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn : $|z-i|=|(1+i)z|$