CÁC DẠNG BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN KHẢO SÁT HÀM SỐ

Dạng 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ TIẾP XÚC

Cho hàm số $y = f(x)$,đồ thị là (*C*). Có ba loại phương trình tiếp tuyến như sau:

Loại 1: Tiếp tuyến của hàm số tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$.

– Tính đạo hàm và giá trị $f'(x_0)$.

– Phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Chú ý: Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ có hệ số góc $k = f'(x_0)$

Loại 2: Biết hệ số góc của tiếp tuyến là k.

– Giải phương trình: $f'(x) = k$, tìm nghiệm $x_0 \Rightarrow y_0$.

– Phương trình tiếp tuyến dạng: $y = k(x - x_0) + y_0$.

Chú ý: Cho đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$, khi đó:

– Nếu $d // \Delta \Rightarrow (d): y = ax + b \Rightarrow$ hệ số góc $k = a$.

– Nếu $d \perp \Delta \Rightarrow (d): y = ax + b \Rightarrow$ hệ số góc $k = -\dfrac{1}{a}$.

Loại 3: Tiếp tuyến của (*C*) đi qua điểm $A(x_A; y_A) \notin (C)$.

– Gọi *d* là đường thẳng qua *A* và có hệ số góc là *k*, khi đó $(d): y = k(x - x_A) + y_A$

– Điều kiện tiếp xúc của (d) và (C) là hệ phương trình sau phải có nghiệm: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases}$

Tổng quát: Cho hai đường cong $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$. Điều kiện để hai đường cong tiếp xúc với nhau là hệ sau có nghiệm. $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$.

1. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$
   a. khảo sát và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số.
   b. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (*C*):
      i. Tại điểm có hoành độ $x = \sqrt{2}$.
      ii. Tại điểm có tung độ *y* = 3.
      iii. Tiếp tuyến song song với đường thẳng: $d_1: 24x - y + 2009$.
      iv. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng: $d_2: x + 24y + 2009$.
2. Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 - x + 3}{x + 1}$ có đồ thị là (*C*).
   a. Khảo sát và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số trên.

b. Viết phương trình tiếp tuyến của (C):
 i. Tại giao điểm của (C) với trục tung.
 ii. Tại giao điểm của (C) với trụng hoành.
 iii. Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;-1)$.
 iv. Biết hệ số góc của tiếp tuyến $k = -13$.

3. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$ có đồ thị (C).
 a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số trên.
 b. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $x = 0$.
 c. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ $y = 0$.
 d. Tìm tất cả các điểm trên trục tung mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến (C).

4. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 1$ có đồ thị (C_m). Tìm m để (C_m) cắt d: $y = -x + 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B, C sao cho các tiếp tuyến của (C_m) tại B và C vuông góc với nhau.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m) là: $x^3 + mx^2 + 1 = -x + 1 \Leftrightarrow x(x^2 + mx + 1) = 0$ (*)

Đặt $g(x) = x^2 + mx + 1$. d cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta g = m^2-4>0\\ g(0)=1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2\\ m<-2\end{array}\right. .$$

Vì x_B , x_C là nghiệm của $g(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x_B + x_C = -m\\ P = x_B x_C = 1\end{cases}$.

Tiếp tuyến của (C_m) tại B và C vuông góc với nhau nên ta có: $f'(x_C)\,f'(x_B) = -1$

$$\Leftrightarrow x_Bx_C(3x_B+2m)(3x_C+2m)=-1 \Leftrightarrow x_Bx_C\left[9x_Bx_C+6m(x_B+x_C)+4m^2\right]=-1$$

$$\Leftrightarrow 1\left[9+6m(-m)+4m^2\right]=-1 \Leftrightarrow 2m^2=10 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{5}$$ (nhận so với điều kiện)

5. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x}$. Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ để từ đó có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến vuông góc.

Lời giải:

Gọi $M(x_0;y_0)$. Phương trình đường thẳng d qua M có hệ số góc k là $y = k(x - x_0) + y_0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: $\dfrac{x^2+1}{x}=k(x-x_0)+y_0,\ (kx\neq 0)$

$$\Leftrightarrow (1-k)x^2-(y_0-kx_0)x+1=0\ (*)$$

d tiếp xúc với (C): $\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 1\\ \Delta=(y_0-kx_0)^2-4(1-k)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 1\\ x_0^2k^2+2(2-x_0y_0)k+y_0^2-4=0\\ y_0\neq kx_0\end{cases}$ (I)

Từ *M* vẽ hai tiếp tuyến đến (*C*) vuông góc với nhau khi (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $\begin{cases} k_1, k_2 \neq 1 \\ k_1 k_2 = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ \dfrac{y_0^2 - 4}{x_0^2} = -1 \\ (y_0 - x_0)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ x_0^2 + y_0^2 = 4 \\ y_0 \neq x_0 \end{cases}.$$

Vậy tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là một đường tròn: $x^2 + y^2 = 4$ loại bỏ bốn giao điểm của đường tròn với hai đường tiệm cận.

6. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+1}$. (ĐH Khối–D 2007)

   a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

   b. Tìm tọa độ điểm *M* thuộc (*C*), biết tiếp tuyến của (*C*) tại *M* cắt *Ox*, *Oy* tại *A*, *B* và diện tích tam giác *OAB* bằng $\dfrac{1}{4}$

ĐS: $M\left(-\dfrac{1}{2}; -2\right)$ và $M(1;1)$.

7. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x+2}$. (ĐH Khối–B 2006)

   a Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số đã cho.

   b. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (*C*) biết tiếp tuyến đó vuông góc với tiệm cận xiên.

ĐS: b. $y = -x \pm 2\sqrt{5} - 5$.

8. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{m}{2}x^2 = \dfrac{1}{3}$ (*) (*m* là tham số). (ĐH Khối–D 2005)

   a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi *m*=2.

   b. Gọi *M* là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng −1. Tìm *m* để tiếp tuyến của (C_m) tại *M* song song với đường thẳng $5x - y = 0$

ĐS: *m*=4.

9. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - x + 3m$ (C_m). Định *m* để (C_m) tiếp xúc với trục hoành.

10. Cho hàm số $y = x^4 + x^3 + (m-1)x^2 - x - m$ (C_m). Định *m* để (C_m) tiếp xúc với trục hoành.

11. Cho đồ thị hàm số $(C): y = \dfrac{x^2 - 4}{x+1}$. Tìm tập hợp các điểm trên trục hoành sao cho từ đó kẻ được một tiếp tuyến đến (*C*).

12. Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 + 4$. Tìm tập hợp các điểm trên trục hoành sao cho từ đó có thể kẻ được 3 tiếp tuyến với (*C*).

13. Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^4 - 2x^2 + 1$. Tìm các điểm *M* nằm trên *Oy* sao cho từ *M* kẻ được 3 tiếp tuyến đến (*C*).

14. Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x + 2$. Tìm các điểm trên đường thẳng *y* = 4 sao cho từ đó có thể kẻ được 3 tiếp tuyến với (*C*).

15. Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ (1) (ĐH Khối–B 2008)

   a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

   b. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm *M*(–1;–9).

Lời giải:

a. $D=R$, $y' = 12x^2 - 12x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 1$.

BBT :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	CĐ 1	↘	CT -1	↗	$+\infty$

b. Tiếp tuyến qua $M(-1;-9)$ có dạng $y = k(x + 1) - 9$. Phương trình hoành độ tiếp điểm qua M có dạng :

$4x^3 - 6x^2 + 1 = (12x^2 - 12x)(x + 1) - 9$.

$\Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 + 10 = (12x^2 - 12x)(x + 1) \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 5 = 6(x^2 - x)(x + 1)$.

$\Leftrightarrow x = -1$ hay $2x^2 - 5x + 5 = 6x^2 - 6x \Leftrightarrow x = -1$ hay $4x^2 - x - 5 = 0$.

$\Leftrightarrow x = -1$ hay $x = \dfrac{5}{4}$; $y'(-1) = 24$; $y'\left(\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{15}{4}$.

Vậy phương trình các tiếp tuyến qua M là: $y = 24x + 15$ hay $y = \dfrac{15}{4}x - \dfrac{21}{4}$.

Dạng 2: CÁC BÀI TOÁN VỀ CỰC TRỊ

Cho hàm số $y = f(x)$,đồ thị là (C). Các vấn đề về cực trị cần nhớ:

– Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là hoành độ của điểm cực trị.

– Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại tại $x = x_0$.

– Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_0$.

Một số dạng bài tập về cực trị thường gặp

– Để hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{y'} > 0 \end{cases}$.

– Để hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị nằm về 2 phía đối với trục hoành $\Leftrightarrow y_{CĐ}.y_{CT} < 0$.

– Để hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị nằm về 2 phía đối với trục tung $\Leftrightarrow x_{CĐ}.x_{CT} < 0$.

– Để hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị nằm phía trên trục hoành $\Leftrightarrow \begin{cases} y_{CĐ} + y_{CT} > 0 \\ y_{CĐ}.y_{CT} > 0 \end{cases}$.

– Để hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị nằm phía dưới trục hoành $\Leftrightarrow \begin{cases} y_{CĐ} + y_{CT} < 0 \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \end{cases}$.

– Để hàm số $y = f(x)$ có cực trị tiếp xúc với trục hoành $\Leftrightarrow y_{CĐ}.y_{CT} = 0$.

Cách viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị.

Dạng 1: hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Lấy *y* chia cho *y*', được thương là *q*(*x*) và dư là *r*(*x*). Khi đó *y* = *r*(*x*) là đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị.

Dạng 2: Hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$

Đường thẳng qua hai điểm cực trị có dạng $y = \dfrac{\left(ax^2 + bx + c\right)'}{\left(dx + e\right)'} = \dfrac{2a}{d}x + \dfrac{b}{d}$

1. Chứng minh rằng hàm số y = $\dfrac{x^2 + m\left(m^2 - 1\right)x - m^4 + 1}{x - m}$ luôn có có cực trị với mọi *m*. Tìm *m* sao cho hai cực trị nằm trên đường thẳng *y*=2*x*.
2. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m + 2\right)x - 1$. Định *m* để:
   a. Hàm số luôn có cực trị.
   b. Có cực trị trong khoảng $\left(0; +\infty\right)$.
   c. Có hai cực trị trong khoảng $\left(0; +\infty\right)$.
3. Định *m* để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + \left(m^2 - 1\right)x + 2\sqrt{b^2 - 4ac}$ đạt cực đại tại *x* = 2.
4. Cho hàm số y = $x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4$.
   a. Khảo sát hàm số khi *m* = 0.
   b. Định *m* để hàm số không có cực trị.
   c. Định *m* để hàm só có cực đại và cực tiểu.
5. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x + 3m - 5$. Định *m* để đồ thị hàm số có cực đại cực tiểu, viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy.
6. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + \left(m + 1\right)x - m + 1}{x - m}$. Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn có cực đại, cực tiểu với mọi *m*. Hãy định *m* để hai cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành.
7. Cho hàm số $y = x^3 + \left(1 - 2m\right)x^2 + \left(2 - m\right)x + m + 2$. Định *m* để đồ thị hàm số có hai cực trị đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.
8. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 1 - 3m^2}{x - m}$. Định *m* để đồ thị hàm số có hai cực trị nằm về hai phía đối với trục tung.
9. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(2m - 1\right)x - m + 2 \; \left(C_m\right)$. Định *m* để hàm số có hai điểm cực trị cùng dương.
10. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2\left(m + 1\right)x + m^2 + 4m}{x + 2}$ (1). (ĐH Khối–A năm 2007)
    a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của đồ thị hàm (1) số khi *m*=–1.
    b. Tìm *m* để hàm số (1) có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị cùng với gốc tọa độ *O* tạo thành tam giác vuông tại *O*.

ĐS: $m = -4 \pm 2\sqrt{6}$.

11. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - 3m^2 - 1$ (1), *m* là tham số. (ĐH Khối–B năm 2007)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của đồ thị hàm (1) số khi m=1.

b. Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) cách đều gốc tọa độ.

ĐS : b $m = \pm\frac{1}{2}$.

12. Cho hàm số $y = mx^4 + \left(m^2 - 9\right)x^2 + 10$ (1) (m là tham số).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của đồ thị hàm số khi m=1.

b. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị. (ĐH Khối–B năm 2002)

a.

b. ĐS : $\left[\begin{array}{l} m < -3 \\ 0 < m < 3 \end{array}\right.$

13. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x+1}$ (*) (m là tham số)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của đồ thị hàm số khi m=1.

b. Chứng minh rằng với m bất kỳ, đồ thị (C_m) luôn có hai điểm cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$.

a.

b. CĐ(−2;m−3), CT(0;m+1)⇒ $MN = \cdots = \sqrt{20}$

Dạng 3: CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐỒNG BIẾN–NGHỊCH BIẾN

Cho hàm sô $y = f(x)$ có tập xác định là miền *D*.

– *f*(*x*) đồng biến trên *D* $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in D$.
– *f*(*x*) nghịch biến trên *D* $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in D$.
(chỉ xét trường hợp *f*(*x*) = 0 tại một số hữu hạn điểm trên miền *D*)

Thường dùng các kiến thức về xét dấu tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Nếu $\Delta < 0$ thì *f*(*x*) luôn cùng dấu với *a*.
2. Nếu $\Delta = 0$ thì *f*(*x*) có nghiệm $x = -\dfrac{b}{2a}$ và *f*(*x*) luôn cùng dấu với *a* khi $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.
3. Nếu $\Delta > 0$ thì *f*(*x*) có hai nghiệm, trong khoảng 2 nghiệm *f*(*x*) trái dấu với *a*, ngoài khoảng 2 nghiệm *f*(*x*) cùng dấu với *a*.

So sánh nghiệm của tam thức với số 0

* $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ * $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ * $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$

1. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(m+1)x + 1$. Định *m* để:
   a. Hàm số luôn đồng biến trên *R*.
   b. Hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

2. Xác định *m* để hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{mx^2}{2} - 2x + 1$.
   a. Đồng biến trên *R*.
   b. Đồng biến trên $(1; +\infty)$.

3. Cho hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$.
   a. Định *m* để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
   b. Định *m* để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

4. Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$. Định *m* để hàm số nghịch biến trên $[1; +\infty)$.

Dạng 4: CÁC BÀI TOÁN VỀ GIAO ĐIỂM CỦA 2 ĐƯỜNG CONG

Quan hệ giữa số nghiệm và số giao điểm

Cho hai hàm số *y*=*f*(*x*) có đồ thị (C_1) và *y*=*g*(*x*) có đồ thị (C_2). Khảo sát sự tương giao giữa hai đồ thị (C_1) và (C_2) tương đương với khảo sát số nghiệm của phương trình: *f*(*x*) = *g*(*x*) (1). Số giao điểm của (C_1) và (C_2) đúng bằng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm (1).

(1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (C_1) và (C_2) không có điểm chung.

(1) có ***n*** nghiệm $\Leftrightarrow$ (C_1) và (C_2) có ***n*** điểm chung.

(1) có ***nghiệm đơn*** x_1 $\Leftrightarrow$ (C_1) và (C_2) ***cắt*** nhau tại $N(x_1;y_1)$. (1) có ***nghiệm kép*** x_0 $\Leftrightarrow$ (C_1) ***tiếp xúc*** (C_2) tại $M(x_0;y_0)$.

1. Cho hàm số $y=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$ có đồ thị là (C).
   a. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.
   b. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^2-(m+2)x-m+1=0$.
2. Cho hàm số $y=(x+1)^2(x-1)^2$ có đồ thị là (C).
   a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên.
   b. Dùng đồ thị (C) biện luận theo m số nghiệm của phương trình $(x^2-1)^2-2m+1=0$.
3. Cho hàm số $y=x^3+kx^2-4$.
   a. Khảo sát hàm số trên khi $k=3$.
   b. Tìm các giá trị của k để phương trình $x^3+kx^2-4=0$ có nghiệm duy nhất.
4. Cho hàm số $y=x^3-3x+2$. (ĐH Khối–D 2006)
   a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
   b. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A(3;20) có hệ số góc m. Tìm m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

ĐS: b. $m>\dfrac{15}{4}$, $m\neq 24$.

5. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-3}{2(x-1)}$ (1) (ĐH Khối–A 2004)
   a. Khảo sát hàm số (1).
   b. Tìm m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm A, B sao cho AB=1.

ĐS: b. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

6. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+x+m}{x-1}$ (*) (m là tham số) (ĐH Khối–A 2003)
   a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của đồ thị hàm số khi $m=-1$.
   b. Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và hai điểm đó có hoành độ dương.

ĐS: b. $-\dfrac{1}{2}<m<0$.

7. a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$ (1). (ĐH Khối–D 2003)
   b. Tìm m để đường thẳng $d_m: y=mx+2-2m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt.

ĐS: m>1.

8. Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2+3(1-m^2)x+m^3-m^2$ (1) (m là tham số) (ĐH Khối–A 2002)
   a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=1$.
   b. Tìm k để phương trình $-x^3+3x^2+k^3-3k^2=0$ có 3 nghiệm phân biệt.
   c. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

ĐS: b. $\begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0 \wedge k \neq 2 \end{cases}$, c. $y = 2x - m^2 + m$.

Dạng 5: CÁC BÀI TOÁN VỀ KHOẢNG CÁCH

Các công thức về khoảng cách:

Khoảng cách giữa hai điểm (độ dài đoạn thẳng): $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng: Cho đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ và điểm $M(x_0;y_0)$ khi đó $d(M,.\Delta) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

1. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2\ (C_m)$. Định m để (C_m) có cực đại cực tiểu đồng thời khoảng cách giữa chúng là bé nhất.
2. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{2x+2}{x-1}$. Tìm tọa độ các điểm M nằm trên (C) có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.
3. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x-1}$. Tìm các điểm M thuộc (C) có tổng khoảng cách đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất.
4. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{2x+2}{x-1}$. Tìm hai điểm M, N thuộc hai nhánh khác nhau của (C) sao cho đoạn MN nhỏ nhất.
5. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x+1}$. Tìm hai điểm M, N thuộc 2 nhánh khác nhau của (C) sao cho đoạn MN nhỏ nhất.
6. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x-1}$.
   a. Tìm các điểm thuộc đồ thị (C) có tổng khoảng cách đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất.
   b. Tìm hai điểm M, N thuộc hai nhánh khác nhau của (C) sao cho đoạn MN nhỏ nhất.
7. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số: $y = mx + \dfrac{1}{x}$ (*) (m là tham số) (ĐH Khối–A 2005)

   a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi $m = \dfrac{1}{4}$.

   b. Tìm m để đồ thị hàm số (*) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến tiệm cận xiên bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. ĐS: $m=1$.

Dạng 6: CÁC ĐIỂM CỐ ĐỊNH

Phương pháp:

Từ hàm số $y=f\left(x,m\right)$ ta đưa về dạng $F\left(x,y\right)=mG\left(x,y\right)$. Khi đó tọa độ điểm cố định nếu có là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}F\left(x,y\right)=0\\G\left(x,y\right)=0\end{cases}$.

1. Cho hàm số $y=x^3-3(m-1)x^2-3mx+2\ \left(C_m\right)$. Chứng minh rằng $\left(C_m\right)$ luôn đi qua hai điểm cố định khi *m* thay đổi.
2. Cho hàm số $\left(C_m\right): y=\dfrac{2x^2+\left(6-m\right)x+4}{mx+2}$. Chứng minh rằng đồ thị $\left(C_m\right)$ luôn đi qua một điểm cố định khi *m* thay đổi.
3. Cho hàm số $\left(C_m\right): y=(1-2m)x^4+3mx^2-(m+1)$. Tìm các điểm cố định của họ đồ thị trên.
4. Chứng minh rằng đồ thị của hàm số $y=(m+3)x^3-3(m+3)x^2-(6m+1)x+m+1\ \left(C_m\right)$ luôn đi qua ba điểm cố định.

Dạng 7: <u>ĐỒ THỊ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI</u>

$y = f(x)$ có đồ thị (C)	$y=\left\|f\left(x\right)\right\|$ có đồ thị (C')	$y=f\left(\left\|x\right\|\right)$ có đồ thị (C'')
	$y=\left\|f\left(x\right)\right\|\ge 0,\ \forall x\in D$. Do đó ta phải giữ nguyên phần phía trên trục *Ox* và lấy đối xứng phần phía dưới trục *Ox* lên trên.	$y=f\left(\left\|x\right\|\right)$ có $f\left(\left\|-x\right\|\right)=f\left(\left\|x\right\|\right)$, $\forall x\in D$ nên đây là hàm số chẵn do đó có đồ thị đối xứng qua trục tung *Oy*.

Chú ý: Đối với hàm hữu tỷ

1. Cho hàm số $\left(C\right): y=\dfrac{x^2+x}{2x-2}$.

   a. Khảo sát hàm số.

   b. Định *k* để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt. $\dfrac{x^2+|x|}{2|x|-2}=k$.

2. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$.
   a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.
   b. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $\dfrac{x^2 + 3x + 3}{|x + 1|} = m$.

3. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{4x - x^2}{x - 1}$.
   a. Khảo sát hàm số.
   b. Định m để phương trình $x^2 + (m - 4)|x| - m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

4. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x + 2}$.
1. Khảo sát hàm số.
2. Định m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt: $x^2 + (1-m)|x| - 2m - 1 = 0$.
5. a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

   b. Tìm m để phương trình sau có sáu nghiệm phân biệt: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$. (ĐH Khối A–2006)

ĐS: b. 4<m<5.

Dạng 8: CÁC CẶP ĐIỂM ĐỐI XỨNG

Điểm $I(x_0; y_0)$ là tâm đối xứng của đồ thị $(C): y = f(x)$ $\Leftrightarrow$ Tồn tại hai điểm $M(x;y)$ và $M'(x';y')$ thuộc (C) thỏa: $\begin{cases} x + x' = 2x_0 \\ f(x) + f(x') = 2y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ f(x) + f(2x_0 - x) = 2y_0 \end{cases}$

Vậy $I(x_0; y_0)$ là tâm đối xứng của (C) $\Leftrightarrow$ $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$.

1. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 + 2x + 2 + m}{2x + 3}$ có đồ thị (C_m).

   Tìm giá trị của m để (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ O.
2. Cho hàm số $(C_m): y = \dfrac{x^2 + 2m^2x + m^2}{x + 1}$.

   Định m để (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ O.
3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ (1) (m là tham số).

   a. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm phân biệt đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.

   b. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m=2. (ĐH Khối B–2003)

ĐS: a. $f(x_0) = -f(-x_0),\ \forall x_0 \neq 0 \Rightarrow \ldots$ m>0.

4. Cho hàm số $y = -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \dfrac{11}{3}$ có đồ thị (C). Tìm trên (C) hai điểm M, N đối xứng nhau qua trục tung.
5. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ (1). Xác định a, b, c để đồ thị hàm số (1) có tâm đối xứng là I(0;1) và đi qua điểm M(1;–1).
6. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (1) (ĐH Khối D–2008)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

b. Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua điểm $I(1;2)$ với hệ số góc k ($k > -3$) đều cắt đồ thị của hàm số (1) tại ba điểm phân biệt I, A, B đồng thời I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Lời giải:

a. D = R.

$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$.

$y'' = 6x - 6$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	|	−	0	+	
y''		−		−	0	+		+	
y	$-\infty$	↗	4 CĐ	↘	2 U	↘	0 CT	↗	$+\infty$

2. $d: y - 2 = k(x-1) \Leftrightarrow y = kx - k + 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 + 4 = kx - k + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - kx + k + 2 = 0$.

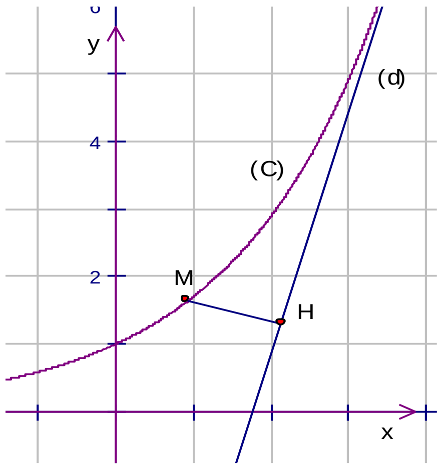
$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - k - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee g(x) = x^2 - 2x - k - 2 = 0$.

Vì $\Delta' > 0$ và $g(1) \neq 0$ (do $k > -3$) và $x_1 + x_2 = 2x_I$ nên có đpcm!.

Dạng 9: MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TIỆM CẬN

1. Định nghĩa:

(d) là tiệm cận của (C) $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{M\to\infty \\ (M\in(C))}} MH = 0$



2. Cách xác định tiệm cận

a. Tiệm cận đứng: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \Rightarrow (d): x = x_0$.

b. Tiệm cận ngang: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y_0 \Rightarrow (d): y = y_0$.

c. Tiệm cận xiên: TCX có phương trình: $y = \lambda x + \mu$ trong đó:

$\lambda = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $\mu = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - \lambda x\right]$.

Các trường hợp đặc biệt:

*Hàm số bậc nhất trên bậc nhất (hàm nhất biến)	* Hàm số bậc hai trên bậc nhất (hàm hữu tỷ)
$y=\dfrac{ax+b}{mx+n}$ +TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$ +TCĐ: $\lim\limits_{x\to-\frac{n}{m}} y=\infty \Rightarrow (d): x=-\dfrac{n}{m}$ +TCN: $\lim\limits_{x\to\infty} y=\dfrac{a}{m} \Rightarrow (d): y=\dfrac{a}{m}$	$y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}=(\lambda x+\mu)+\dfrac{A}{mx+n}$ +TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$ +TCĐ: $\lim\limits_{x\to-\frac{n}{m}} y=\infty \Rightarrow (d): x=-\dfrac{n}{m}$ +TCX: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{A}{mx+n}=0 \Rightarrow$ TCX: $y=\lambda x+\mu$

1. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+(3m^2-2)x-2}{x+3m}$ (1), với m là tham số thực.

   a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m=1$.

   b. Tìm các giá trị của m để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0.

(ĐH Khối A–2008)

Lời giải:

a. Khi $m=1$: $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+3}=x-2+\dfrac{4}{x+3}$.

TXĐ: $D=R\setminus\{-3\}$

$y'=\dfrac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}$. $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow y(-1)=-1 \\ x=-5\Rightarrow y(-5)=-9\end{array}\right.$

Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to-3} y=\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng: $x=-3$. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x+3}=0\Rightarrow$ tiệm cận xiên: $y=x-2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-3^-} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-3^+} y=+\infty$.

Bảng biến thiên

Đồ thị:

x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
y'			0		‖		0		
y	$-\infty$	↗	-9 CĐ	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	CT **-1**	↗	$+\infty$

b. $y=\dfrac{mx^2+\left(3m^2-2\right)x-2}{x+3m}=mx-2+\dfrac{6m-2}{x+3m}$

Gọi (C_m) là đồ thị hàm số. (C_m) có tiệm cận đứng $d_1: x+3m=0$ và tiệm cận xiên $d_2:\ mx-y-2=0$ $\left(m\neq\dfrac{1}{3}\wedge m\neq 0\right)$.

Theo giả thuyết ta có: $\cos 45^0=\dfrac{|m|}{\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{|m|}{\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow m^2=1 \Leftrightarrow m=\pm 1$ (nhận).

2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{mx^2+\left(m^2-1\right)x+1-m}{x}$. Tìm m sao cho đồ thị của hàm số f có tiệm cận xiên đi qua gốc tọa độ.
3. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+(2a-1).x+a+3}{x-2}$ $\left(a\neq -1,\ a\neq 0\right)$ có đồ thị (C). Chứng minh rằng đồ thị của hàm số này có tiệm cận xiên luôn đi qua một điểm cố định.
4. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$ có đồ thị (C).

   a. Chứng minh rằng tích khoảng cách từ một điểm M bất kỳ trên (C) đến hai đường đường tiệm cận là một số không đổi.

   b. Tìm tọa độ điểm N thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ N đến hai tiệm cận nhỏ nhất.
5. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x^2+mx-2}{x-1}$ có đồ thị (C_m). Tìm m để đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

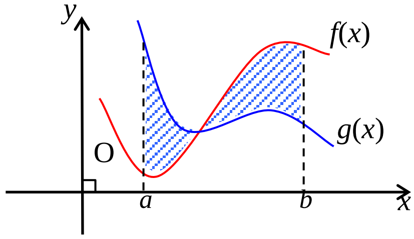
Dạng 10: DIỆN TÍCH–THỂ TÍCH

Ứng dụng tích phân (*Dạng này thường xuất hiện trong các đề thi tốt nghệp*)

a. Diện tích

Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị (C_1), (C_2). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_1), (C_2) và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi công thức:

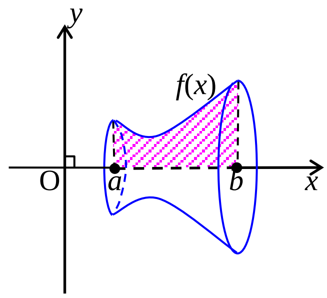
$$\boxed{S=\int_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx}$$

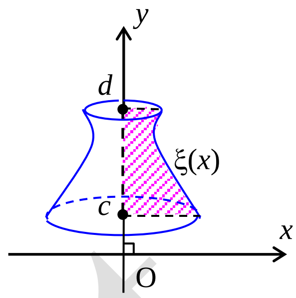


Chú ý:

Nếu diện tích thiếu các đường thẳng $x=a$, $x=b$ ta phải giải phương trình $f(x)=g(x)$ để tìm a, b.

b. Thể tích





Thể tích do hình phẳng giới hạn bởi $\{(C): y=f(x), y=0, x=a, x=b\}$ quay quanh Ox được tính bởi công thức: $\boxed{V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$

Thể tích do hình phẳng giới hạn bởi $\{(C): x=\xi(y), x=0, y=c, y=d\}$ quay quanh Oy được tính bởi công thức: $\boxed{V=\pi\int_c^d [\xi(y)]^2\,dy}$

Thể tích tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f(x)$, $y=g(x)$ quay quanh Ox ($f(x)\geq g(x)$, $\forall x\in[a;b]$) được tính bởi công thức: $\boxed{V=\pi\int_a^b \left\{[f(x)]^2-[g(x)]^2\right\}dx}$.

*

* *

1. Cho hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x-m^2}{x-1}$ (1) (m là tham số). (ĐH Khối–D 2002)

   a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) ứng với $m=-1$.
   b. Tính diện tích hình phẳng giới hạm bởi đường cong (C) và hai trục tọa độ.
   c. Tìm m để đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng $y=x$.

ĐS: b. $S=-1+4\ln\dfrac{4}{3}$, c $m\neq 1$.

———————————————