Cực trị

Câu 1
Cho hàm số y = 4x^3 + mx^2 – 3x
1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) hàm số khi m = 0.
2. Tìm m để hàm số có hai cực trị tại x_1 và x_2 thỏa $x_1 = -4x_2$

2. TXĐ: D = R
- y’ = 12x^2 + 2mx – 3

Ta có: Δ’ = m^2 + 36 > 0 với mọi m, vậy luôn có cực trị

Ta có: $\begin{cases} x_1 = -4x_2 \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{6} \\ x_1x_2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow m = \pm\dfrac{9}{2}$

Câu 2
Cho hàm số $y = f(x) = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$, m là tham số
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số trên khi m = 1.
2. Xác định các giá trị của m để hàm số $y = f(x)$ không có cực trị.

+ Khi m = 0 $\Rightarrow y = x - 1$, nên hàm số không có cực trị.

+ Khi $m \neq 0 \Rightarrow y' = 3mx^2 + 6mx - (m-1)$
Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ không có nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = 9m^2 + 3m(m-1) = 12m^2 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \dfrac{1}{4}$

Câu 3 :**Cho hàm số $y = x^4 + mx^3 - 2x^2 - 3mx + 1 \quad (1)$.**
1). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) khi m = 0.
2). Định m để hàm số (1) có hai cực tiểu.

2) $y = x^4 + mx^3 - 2x^2 - 2mx + 1 \quad (1)$

Đạo hàm $y' = 4x^3 + 3mx^2 - 4x - 3m = (x-1)[4x^2 + (4+3m)x + 3m]$

- $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 4x^2 + (4+3m)x + 3m = 0 \quad (2) \end{array}\right.$
- Hàm số có 2 cực tiểu $\Leftrightarrow$ y có 3 cực trị $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (3m-4)^2 > 0 \\ 4+4+3m+3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq \pm\frac{4}{3}$.

Giả sử: Với $m \neq \pm\frac{4}{3}$, thì $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3

- Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 cực tiểu.

Kết luận: Vậy, hàm số có 2 cực tiểu khi $m \neq \pm\frac{4}{3}$.

$$\begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = -2 \\ \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-2(x_1 + x_2) + 10}{2} = 9 \end{cases}$$

Tọa độ trung điểm CĐ và CT là (-2; 9) không thuộc đường thẳng

$y = \frac{1}{2}x \Rightarrow m = -3$ không thỏa mãn.

Vậy m = 1 thỏa mãn điều kiện đề bài.

***Câu 4:*Cho hàm số** $y = x^3 - 2(m-1)x^2 + 9x + 2 - m$ **(1)**

1) **Với** $m = 4$**. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.**
2) **Tìm m** $(m \in \mathbb{R})$ **để hàm số (1) đạt cực trị tại** x_1, x_2 **thoả mãn** $|x_1 - x_2| = 2$.

Từ (1) và (2) suy ra m=-2;m=4

$\Leftrightarrow (m-1)^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 4 \end{array}\right. (2)$

2)Ta có $y' = 3x^2 - 4(m-1)x + 9$

y' là tam thức bậc hai nên hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 khi và chỉ khi y'có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = 4(m-1)^2 - 27 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ m < 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. (1)$$

Theo viét $x_1 + x_2 = \frac{4(m-1)}{3}; x_1x_2 = 3$.

Khi đó

$|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{16(m-1)^2}{9} - 12 = 4$$

Câu 5: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m$, với m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho ứng với $m = 1$.

2. Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \le 2$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9$.

+) Hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại $x_1,\ x_2$

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm pb là $x_1,\ x_2$

$\Leftrightarrow$ Pt $x^2 - 2(m+1)x + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1,\ x_2$.

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > -1 + \sqrt{3} \\ m < -1 - \sqrt{3} \end{array}\right. \qquad (1)$$

+) Theo định lý Viet ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1);\ x_1x_2 = 3.$ Khi đó

$$|x_1 - x_2| \le 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \le 4 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 12 \le 4$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 \le 4 \Leftrightarrow -3 \le m \le 1 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra giá trị của m là $-3 \le m < -1 - \sqrt{3}$ và $-1 + \sqrt{3} < m \le 1.$

Câu 6: Cho hàm số y = $x^3 + (1 – 2m)x^2 + (2 – m)x + m + 2$ (m là tham số) (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 2.

2) Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

2) YCBT $\Leftrightarrow$ phương trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 < x_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ f(1) = -5m + 7 > 0 \\ \dfrac{S}{2} = \dfrac{2m-1}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5}$$

Câu 7: Cho hàm số y = $x^3 + mx + 2$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = -3.

2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

1. Pt : $x^3 + mx + 2 = 0 \Rightarrow m = -x^2 - \dfrac{2}{x}$ ($x \neq 0$)

Xét f(x) = $-x^2 - \dfrac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = -2x + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{-2x^3 + 2}{x^2}$

Ta có x $-\infty$ 0 1 $+\infty$

f’(x)	+	‖	+	0	-
f(x)	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	-3	$\searrow -\infty$

Đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất $\Leftrightarrow m > -3$.

Câu 8: Tìm *m* để hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3+\left(m^2-m+2\right)x^2+\left(3m^2+1\right)x+m-5$ **đạt cực tiểu tại $x=-2$.**

Giải: $y'(x)=x^2+2\left(m^2-m+2\right)x+3m^2+1 \Rightarrow y''(x)=2x+2\left(m^2-m+2\right)$

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$ thì $\begin{cases} y'(-2)=0 \\ y''(-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+4m-3=0 \\ m^2-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m-3)=0 \\ m(m-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=3$

Câu 9 : Tìm *a* để các hàm số $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+ax+1$**;** $g(x)=\frac{x^3}{3}+x^2+3ax+a$ **. có các điểm cực trị nằm xen kẽ nhau.**

Giải: $f'(x)=x^2+2x+3a$; $g'(x)=x^2-x+a$. Ta cần tìm a sao cho $g'(x)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1<x_2$ và $f'(x)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_3<x_4$ sao cho

$$\left[\begin{array}{l} x_1<x_3<x_2<x_4 \\ x_3<x_1<x_4<x_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_1'=1-3a>0\ ;\Delta_2=1-4a>0 \\ f'(x_1)f'(x_2)<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<\frac{1}{4} \\ f'(x_1)f'(x_2)<0 \end{array}\right. \quad (*)$$

Ta có: $f'(x_1)f'(x_2)<0 \Leftrightarrow \left[g'(x_1)+3x_1+2a\right]\left[g'(x_2)+3x_2+2a\right]<0 \Leftrightarrow$

$(3x_1+2a)(3x_2+2a)<0 \Leftrightarrow 9x_1x_2+6a(x_1+x_2)+4a^2=a(4a+15)<0 \Leftrightarrow -\frac{15}{4}<a<0$

Câu 10: Tìm *m* để $f(x)=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$ **có đường thẳng đi qua CĐ, CT song song với đường thẳng $y = ax + b$.**

Giải: $f'(x)=6\left[x^2+(m-1)x+(m-2)\right]=0 \Leftrightarrow g(x)=x^2+(m-1)x+(m-2)=0$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_g=(m-3)^2>0 \Leftrightarrow m\neq 3$

Thực hiện phép chia $f(x)$ cho $g(x)$ ta có: $f(x)=(2x+m-1)g(x)-(m-3)^2x-\left(m^2-3m+3\right)$

Với $m \neq 3$ thì phương trình $g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_1, x_2. Ta có: $g(x_1)=g(x_2)=0$ nên suy ra

$y_1=f(x_1)=-(m-3)^2x_1-\left(m^2-3m+3\right)$; $y_2=f(x_2)=-(m-3)^2x_2-\left(m^2-3m+3\right)$

$\Rightarrow$ Đường thẳng đi qua CĐ, CT là (Δ): $y=-(m-3)^2x-\left(m^2-3m+3\right)$

Ta có (Δ) song song với đường thẳng $y = ax + b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -(m-3)^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3; a < 0 \\ (m-3)^2 = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ m = 3 \pm \sqrt{-a} \end{cases}$

Vậy nếu $a < 0$ thì $m = 3 \pm \sqrt{-a}$; nếu $a \geq 0$ thì không tồn tại m thoả mãn.

Câu 11: **Tìm *m* để $f(x) = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ có CĐ, CT nằm trên đường thẳng (d): $y = -4x$.**

Giải: Ta có: $f'(x) = 6\left[x^2 + (m-1)x + m(1-2m)\right] = 0$

$\Leftrightarrow g(x) = x^2 + (m-1)x + m(1-2m) = 0$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_g = (3m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$

Thực hiện phép chia $f(x)$ cho $g(x)$ ta có: $f(x) = (2x+m-1)g(x) - (3m-1)^2 x + m(m-1)(1-2m)$

Với $m \neq \frac{1}{3}$ thì phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_1, x_2. Ta có: $g(x_1) = g(x_2) = 0$ nên suy ra

$y_1 = f(x_1) = -(m-3)^2 x_1 + m(m-1)(1-2m)$; $y_2 = -(m-3)^2 x_2 + m(m-1)(1-2m)$

$\Rightarrow$ Đường thẳng đi qua CĐ, CT là (Δ): $y = -(3m-1)^2 x + m(m-1)(1-2m)$.

Để cực đại, cực tiểu nằm trên đường thẳng (d): $y = -4x$ thì (Δ) $\equiv$ (d)

$\Leftrightarrow \begin{cases} -(3m-1)^2 = -4 \\ m(m-1)(1-2m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m-1-2)(3m-1+2) = 0 \\ m(m-1)(1-2m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

Câu 12: **Cho** $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + (\cos a - 3\sin a)x^2 - 8(1+\cos 2a)x + 1$

1. CMR: Hàm số luôn có CĐ, CT.

2. Giả sử hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2. CMR: $x_1^2 + x_2^2 \leq 18$

Giải: 1. Xét phương trình: $f'(x) = 2x^2 + 2(\cos a - 3\sin a)x - 8(1+\cos 2a) = 0$

Ta có: $\Delta' = (\cos a - 3\sin a)^2 + 16(1+\cos 2a) = (\cos a - 3\sin a)^2 + 32\cos^2 a \geq 0 \ \forall a$

Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \cos a - 3\sin a = \cos a = 0 \Leftrightarrow \sin a = \cos a \Rightarrow \sin^2 a + \cos^2 a = 0$ (vô lý)

Vậy $\Delta' > 0 \ \forall a \Rightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và hàm số có CĐ, CT.

2. Theo Viet ta có: $x_1 + x_2 = 3\sin a - \cos a$; $x_1 x_2 = -4(1+\cos 2a)$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = (3\sin a - \cos a)^2 + 8(1+\cos 2a) = 9 + 8\cos^2 a - 6\sin a\cos a$

$= 9 + 9(\sin^2 a + \cos^2 a) - (3\sin a + \cos a)^2 = 18 - (3\sin a + \cos a)^2 \leq 18$

Câu 13: **Cho hàm số** $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2+4m+3)x$

1. Tìm *m* để hàm số đạt cực trị tại ít nhất 1 điểm > 1.

2. Gọi các điểm cực trị là x_1, x_2. Tìm Max của $A = \left|x_1x_2 - 2(x_1+x_2)\right|$

Giải: Ta có: $f'(x) = 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3$

1. Hàm số đạt cực trị tại ít nhất 1 điểm > 1 $\Leftrightarrow f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn: $x_1 < 1 < x_2 \vee 1 \le x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2f'(1)<0 \\ \begin{cases} \Delta'>0 \\ 2f(1)\ge 0 \\ 1<\frac{S}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2+6m+7<0 \\ \begin{cases} m^2+6m+5<0 \\ m^2+6m+7\ge 0 \\ 1<-(m+1) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\in\left(-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right) \\ \begin{cases} m\in(-5,-1) \\ m\notin\left(-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right) \\ m<-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m\in\left(-5,-3+\sqrt{2}\right)$$

2. Do $\begin{cases} x_1+x_2=-(m+1) \\ x_1x_2=\frac{1}{2}(m^2+4m+3) \end{cases} \Rightarrow A=\left|x_1x_2-2(x_1+x_2)\right| = \left|\frac{m^2+4m+3}{2}+2(m+1)\right|$

$=\frac{1}{2}\left|m^2+8m+7\right| = \frac{1}{2}\left|(m+7)(m+1)\right| = \frac{-1}{2}(m+7)(m+1)$ (do $-5<m<-1$)

$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\left[9-(m^2+8m+16)\right]=\frac{1}{2}\left[9-(m+4)^2\right]\le\frac{9}{2}$. Với $m=-4$ thì Max $A=\frac{9}{2}$

Câu 14: **Tìm *m* để hàm số** $f(x)=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{3}$ **đạt cực trị tại x_1, x_2 thoả mãn** $x_1+2x_2=1$.

Giải: • Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow f'(x)=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} m\ne 0 \\ \Delta'=(m-1)^2-3m(m-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow 1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m\ne 0<1+\frac{\sqrt{6}}{2}$ (*)

Với điều kiện (*) thì $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại x_1, x_2. Theo định lý Viet ta có: $x_1+x_2=\frac{2(m-1)}{m}; x_1x_2=\frac{3(m-2)}{m}$

Ta có: $x_1+2x_2=1 \Leftrightarrow x_2=1-\frac{2(m-1)}{m}=\frac{2-m}{m}; x_1=\frac{2(m-1)}{m}-\frac{2-m}{m}=\frac{3m-4}{m}$

$\Rightarrow \frac{2-m}{m}\cdot\frac{3m-4}{m}=\frac{3(m-2)}{m} \Leftrightarrow (2-m)(3m-4)=3m(m-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\frac{2}{3} \end{array}\right.$

Cả 2 giá trị này đều thoả mãn điều kiện (*). Vậy $x_1+2x_2=1 \Leftrightarrow m=2 \vee m=\frac{2}{3}$

Câu 15: **Tìm *m* để hàm số** $f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx-1$ **đạt cực trị tại x_1, x_2 thoả mãn điều kiện** $|x_1-x_2|\ge 8$.

Giải: HS có CĐ, CT $\Leftrightarrow f'(x)=x^2-2mx+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-m>0 \Leftrightarrow m\in D=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ (*)

Với điều kiện này thì $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại x_1, x_2. Theo định lý Viet ta có: $x_1+x_2=2m; x_1x_2=m$ suy ra:

$|x_1 - x_2| \geq 8 \Leftrightarrow |x_1 - x_2|^2 \geq 64 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \geq 64 \ \Leftrightarrow 4m^2 - 4m \geq 64$

$\Leftrightarrow m^2 - m - 16 \geq 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{65}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{65}}{2}, +\infty\right)$ (thoả mãn (*))

Vậy để $|x_1 - x_2| \geq 8$ thì $m \in \left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{65}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{65}}{2}, +\infty\right)$

Câu 16: **Tìm cực trị của hàm số** $y = f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x - 1$.

Giải: Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 12x - 8 = 4(x+1)^2(x-2)$; $f''(x) = 12(x+1)(x-1)$

Do phương trình $f'(x) = 0$ có 1 nghiệm đơn $x = 2$ và 1 nghiệm kép $x = -1$

nên hàm số có đúng 1 cực trị tại $x = 2$. Mặt khác $f''(2) = 36 > 0$ suy ra $f_{CT} = f(2) = -25$. Vậy hàm số có cực tiểu $f_{CT} = -25$ và không có cực đại.

Câu 17: **Chứng minh rằng: Hàm số** $f(x) = x^4 + mx^3 + mx^2 + mx + 1$ **không thể đồng thời có CĐ và CT** $\forall m \in \mathbb{R}$

Giải. Xét $f'(x) = 4x^3 + 3mx^2 + 2mx + m = 0 \Leftrightarrow m(3x^2 + 2x + 1) = -4x^3$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{-4x^3}{3x^2 + 2x + 1}$. Xét hàm số $g(x) = \dfrac{-4x^3}{3x^2 + 2x + 1}$ có TXĐ: $D_g = \mathbb{R}$

$g'(x) = \dfrac{-4x^2(3x^2 + 4x + 3)}{(3x^2 + 2x + 1)^2} = \dfrac{-4x^2\left[2(x+1)^2 + x^2 + 1\right]}{(3x^2 + 2x + 1)^2} \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

; $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-4x}{3 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = \infty$

x	$-\infty$		x_2		$+\infty$
f'		$-$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$			$-\infty$

Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ cũng là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = m$ với đồ thị $y = g(x)$.

Nhìn bảng biến thiên suy ra đường thẳng $y = m$ cắt $y = g(x)$ tại đúng 1 điểm

$\Rightarrow f'(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm.

Vậy hàm số $y = f(x)$ không thể đồng thời có cực đại và cực tiểu.

Câu18: **Chứng minh rằng:** $f(x) = x^4 + px^3 + q \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow 256q \geq 27p^4$

Giải. Ta có: $f'(x) = 4x^3 + 3px^2 = x^2(4x + 3p) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3p}{4}$ và nghiệm kép $x = 0$

Do $f'(x)$ cùng dấu với $(4x + 3p)$ nên lập bảng biến thiên ta có:

$f(x) \geq 0 \ \forall x \in P \ \Leftrightarrow$ Min $f(x) = f\left(\dfrac{-3p}{4}\right) \geq 0 \ \Leftrightarrow \dfrac{256q - 27p^4}{256} \geq 0 \Leftrightarrow 256q \geq 27p^4$

Câu 19: **Cho hàm số** $y = x^3 - (3x-1)m$ ***(C)*** **với *m* là tham số.**

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số *(C)* khi $m = 1$.

2. Tìm các giá trị của *m* để đồ thị của hàm số *(C)* có hai điểm cực trị và chứng tỏ rằng hai điểm cực trị này ở về hai phía của trục tung.

GIẢI

y' = 0 $\leftrightarrow 3x^2 - 3m = 0$; $\Delta' = 9m$.

$m \le 0$: y' không đổi dấu $\to$ hàm số không có cực trị .

$m > 0$: y' đổi dấu qua 2 nghiệm của y'=0 $\to$ hàm số có 2 cực trị.

KL: $m > 0$.

$m > 0 \to P = -m < 0 \to$ đpcm.

Câu 19 **Cho $f(x) = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$. Tìm *m* để *f*(*x*) chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.**

Giải: $f'(x) = 4x^3 + 12mx^2 + 6(m+1)x = 2x\left[2x^2 + 6mx + 3(m+1)\right]$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = 2x^2 + 6mx + 3(m+1) = 0 \end{array}\right.$. Xét các khả năng sau đây:

a) Nếu $\Delta'_g = 3(3m^2 - 2m - 2) \le 0 \Leftrightarrow m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right] = I$ thì

$2g(x) \ge 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow g(x) \ge 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f'(x)$ triệt tiêu và đổi dấu tại $x = 0$ mà $f''(0) = 6(m + 1) > 0 \ \forall m \in I$

$\Rightarrow f_{CT} = f(0) = 1$, tức là hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

b) Nếu $\begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(0) = 3(m+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$ thì

$f'(x) = 2x(2x^2 - 6x) = 4x^2(x-3)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ nghiệm kép, $x = 3$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$			CT	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn bảng biến thiên suy ra:

Hàm số $y = f(x)$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

c) Nếu $\begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(0) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$ thì $f'(x)$ có 3 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3$

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn bảng biến thiên suy ra:

Hàm số $y = f(x)$ có cực đại nên không thoả mãn yêu cầu bài toán.

Kết luận: $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right] \cup \{-1\}$

Câu 20 **Cho hàm số** $y=f(x)=x^4+(m+3)x^3+2(m+1)x^2$

Chứng minh rằng: $\forall m \neq -1$ hàm số luôn có cực đại đồng thời $x_{CĐ} \leq 0$

$f'(x)=4x^3+3(m+3)x^2+4(m+1)x=x\left[4x^2+3(m+3)x+4(m+1)\right]=x.g(x)$

Ta có: $\Delta_g=9(m+3)^2-64(m+1)=9m^2-10m+17>0\ \forall m$ nên $g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Theo định lý Viet ta có: $x_1.x_2=m+1\neq 0\ \forall m\neq -1$

$\Rightarrow$ PT $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt

0, x_1, x_2. Xét 2 khả năng sau:

a) Nếu $m<-1$ thì $x_1.x_2=m+1<0$

$\Rightarrow\ x_1<0<x_2\ \Rightarrow$ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

Nhìn BBT suy ra $x_{CĐ}=0$

b) Nếu $m>-1$ thì $x_1.x_2>0$

và $x_1+x_2=\dfrac{-3(m+3)}{4}<0\ \Rightarrow\ x_1<x_2<0$

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		x_1		x_2		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

Nhìn BBT suy ra $x_{CĐ}=x_2<0$

Kết luận:

Vậy $\forall m\neq -1$ hàm số luôn có $x_{CĐ}\leq 0$

Câu 21:(Đề thi TSĐH khối B 2002)

Tìm m để hàm số $y=mx^4+(m^2-9)x^2+10$ **có 3 điểm cực trị**

Giải. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y'=2x(2mx^2+m^2-9)=2x.g(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \frac{m^2-9}{2m}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ 0<m<3 \end{array}\right.$$

Câu 21: **Tìm m để hàm số** $y=\dfrac{mx^2-1}{x}$ **có 2 điểm cực trị A, B và đoạn AB ngắn nhất.**

G

Ta có: $y'=\dfrac{mx^2+1}{x^2}$.

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm PB khác 0 $\Leftrightarrow m<0$.

$$A\left(-\frac{1}{\sqrt{-m}};2\sqrt{-m}\right),B\left(\frac{1}{\sqrt{-m}};-2\sqrt{-m}\right)\Rightarrow AB^2=\frac{4}{(-m)}+16(-m).$$

$AB^2 \geq 2\sqrt{\frac{4}{(-m)}.16(-m)} = 16$ (không đổi). KL: $m = -\frac{1}{2}(th)$.

Câu 22: **Cho hàm số** $y = x + m + \frac{m}{x-2}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho với m = 1.
2. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu sao cho hai điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đường thẳng d: x – y + 2 = 0 những khoảng bằng nhau.

Với $x \neq 2$ ta có $y' = 1 - \frac{m}{(x-2)^2}$;

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $(x-2)^2 - m = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow m > 0$

Với m > 0 phương trình (1) có hai nghiệm là: $\begin{array}{l} x_1 = 2 + \sqrt{m} \Rightarrow y_1 = 2 + m + 2\sqrt{m} \\ x_2 = 2 - \sqrt{m} \Rightarrow y_2 = 2 + m - 2\sqrt{m} \end{array}$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là A($2-\sqrt{m}; 2+m-2\sqrt{m}$) ; B($2+\sqrt{m}; 2+m+2\sqrt{m}$)
Khoảng cách từ A và B tới d bằng nhau nên ta có phương trình:

$$|2 - m - \sqrt{m}| = |2 - m + \sqrt{m}|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện thì m = 2 thoả mãn bài toán
Vậy ycbt $\Leftrightarrow$ m = 2.

Câu 23: **Cho hàm số** $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - m^3 + m$ **(1)**

1.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) ứng với m=1
2.Tìm m để hàm số (1) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến góc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến góc tọa độ O.

2. Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

Để hàm số có cực trị thì PT $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ có 2 nhiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = 1 > 0, \forall m$

Cực đại của đồ thị hàm số là A(m-1;2-2m) và cực tiểu của đồ thị hàm số là B(m+1;-2-2m)

Theo giả thiết ta có $OA = \sqrt{2}OB \Leftrightarrow m^2 + 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 + 2\sqrt{2} \\ m = -3 - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy có 2 giá trị của m là $m = -3 - 2\sqrt{2}$ và $m = -3 + 2\sqrt{2}$.

Câu 24: Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ (1).

1) Với m = 1, khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2) Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C và diện tích tam giác ABC bằng 32 (đơn vị diện tích).

+) Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 \end{array}\right.$; ĐK có 3 điểm cực trị : $m \neq 0$

+) Tọa độ ba điểm cực trị : A(0 ; 1), B(- m ; $1 - m^4$), C(m ; $1 - m^4$) ;

+) CM tam giác ABC cân đỉnh A. Tọa độ trung điểm I của BC là I(0 ; $1 - m^4$).

+) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AI.BC = m^4|m| = |m|^5 = 32 \Leftrightarrow m = \pm 2$ (tm)

Câu 25: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2. Tìm điểm M thuộc đường thẳng y=3x-2 sao tổng khoảng cách từ M tới hai điểm cực trị nhỏ nhất.

Gọi tọa độ điểm cực đại là A(0;2), điểm cực tiểu B(2;-2)

Xét biểu thức P=3x-y-2

Thay tọa độ điểm A(0;2)=>P=-4<0, thay tọa độ điểm B(2;-2)=>P=6>0

Vậy 2 điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của đường thẳng y=3x-2, để MA+MB nhỏ nhất => 3 điểm A, M, B thẳng hàng

Phương trình đường thẳng AB: y=-2x+2

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$$

Câu 26: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2. Tìm điểm M thuộc đường thẳng y=3x-2 sao tổng khoảng cách từ M tới hai điểm cực trị nhỏ nhất.

Gọi tọa độ điểm cực đại là A(0;2), điểm cực tiểu B(2;-2)

Xét biểu thức P=3x-y-2

Thay tọa độ điểm A(0;2)=>P=-4<0, thay tọa độ điểm B(2;-2)=>P=6>0

Vậy 2 điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của đường thẳng y=3x-2, để MA+MB nhỏ nhất => 3 điểm A, M, B thẳng hàng

Phương trình đường thẳng AB: y=-2x+2

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{2}{5}\right)$$

Câu 27: **Cho hàm số** $y = x + m + \dfrac{m}{x-2}$

3. **Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho với m = 1.**
4. **Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu sao cho hai điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đường thẳng d: x – y + 2 = 0 những khoảng bằng nhau.**

Với $x \neq 2$ ta có $y' = 1 - \dfrac{m}{(x-2)^2}$;

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $(x-2)^2 - m = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow m > 0$

Với m > 0 phương trình (1) có hai nghiệm là: $\begin{array}{l} x_1 = 2 + \sqrt{m} \Rightarrow y_1 = 2 + m + 2\sqrt{m} \\ x_2 = 2 - \sqrt{m} \Rightarrow y_2 = 2 + m - 2\sqrt{m} \end{array}$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là A($2 - \sqrt{m}; 2 + m - 2\sqrt{m}$) ; B($2 + \sqrt{m}; 2 + m + 2\sqrt{m}$)

Khoảng cách từ A và B tới d bằng nhau nên ta có phương trình:

$$\left|2 - m - \sqrt{m}\right| = \left|2 - m + \sqrt{m}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện thì m = 2 thoả mãn bài toán

Vậy ycbt $\Leftrightarrow$ m = 2.

Câu 28: **Cho hàm số:** $y = \dfrac{x-2}{x-1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

2. Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ **và cắt (C) tại hai điểm M,N sao cho A thuộc đoạn MN và AN = 2AM**

b) Gọi $M\left(x_1, 1 - \dfrac{1}{x_1 - 1}\right), N\left(x_2, 1 - \dfrac{1}{x_2 - 1}\right)$

$ycdb \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AM}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 - 2x_1 \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{x_2 - 1} = -2\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{x_1 - 1}\right) \end{cases}$$

$M(0,2), N(2,0)$
$d: y = 2 - x$

Câu 29: **Tìm *m* để hàm số** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$ **có khoảng cách giữa các điểm CĐ và CT là nhỏ nhất.**

Giải: Do $f'(x) = x^2 - 2mx - 1 = 0$ có $\Delta' = m^2 + 1 > 0$ nên $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 với các điểm cực trị là $A(x_1, y_2)$; $B(x_2, y_2)$. Thực hiện phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta có:

$f(x) = \frac{1}{3}(x - m)f'(x) - \frac{2}{3}(m^2 + 1)x + \left(\frac{2}{3}m + 1\right)$. Do $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ nên

$y_1 = f(x_1) = -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x_1 + \left(\frac{2}{3}m + 1\right); y_2 = f(x_2) = -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x_2 + \left(\frac{2}{3}m + 1\right)$

Ta có: $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + \frac{4}{9}(m^2 + 1)^2 (x_2 - x_1)^2$

$= \left[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2\right]\left[1 + \frac{4}{9}(m^2 + 1)^2\right] = (4m^2 + 4)\left[1 + \frac{4}{9}(m^2 + 1)^2\right] \geq 4\left(1 + \frac{4}{9}\right)$

$\Rightarrow AB \geq \frac{2\sqrt{13}}{3}$. Vậy Min $AB = \frac{2\sqrt{13}}{3}$ xảy ra $\Leftrightarrow m = 0$.

Câu 30: **Cho hàm số** $y = f(x) = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số với m = 1

2/ Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành 1 tam giác vuông cân.

hd

Tìm các giá trị của m để **(C)** có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành 1 tam giác vuông cân.

* Ta có $f'(x) = 4x^3 + 4(m-2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{array}\right.$

* Hàm số có CĐ, CT khi f'(x)=0 có 3 nghiệm phân biệt và đổi dấu :
$m < 2$ (1) . Toạ độ các điểm cực trị là:

$$A(0; m^2 - 5m + 5), B(\sqrt{2-m}; 1-m), C(-\sqrt{2-m}; 1-m)$$

* Do tam giác ABC luôn cân tại A, nên bài toán thoả mãn khi vuông tại A:
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (m-2)^3 = -1 \Leftrightarrow m = 1$ vỡ đk (1)

Trong đó $\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right), \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right)$

Vậy giá trị cần tìm của m là m = 1.

Câu 31: **Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ (1) , với m là tham số thực.**
1.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$.
2.Xác định m để hàm số (1) có ba điểm cực trị, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

GIẢI

2. (1 điểm) $y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ pt $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua các nghiệm đó $\Leftrightarrow m > 0$

- Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$A(0; m-1), B\left(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right), C\left(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right)$

- $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|y_B - y_A|.|x_C - x_B| = m^2\sqrt{m}$; $AB = AC = \sqrt{m^4 + m}, BC = 2\sqrt{m}$
- $R = \frac{AB.AC.BC}{4S_{\triangle ABC}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\left(m^4 + m\right)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}} = 1 \Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{array}\right.$

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ **(C)**

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 1

2/ Tìm các giá trị thực của m để (C) có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành 1 tam giác vuông cân.

* Ta có $f'(x) = 4x^3 + 4(m-2)x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x^2 = 2 - m$
* Hàm số có CĐ, CT khi f’(x)=0 có 3 nghiệm phân biệt và đổi dấu :
m < 2 (1) . Toạ độ các điểm cực trị là:

$$A(0; m^2 - 5m + 5), B(\sqrt{2-m}; 1-m), C(-\sqrt{2-m}; 1-m)$$

* Do tam giác ABC luôn cân tại A, nên bài toán thoả mãn khi vuông tại A:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (m-2)^3 = -1 \Leftrightarrow m = 1$ vì đk (1)

Trong đó $\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right), \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right)$

Vậy giá trị cần tìm của m là m = 1.

Câu 33: Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ **(C_m)**

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với m = 1

2) Tìm m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành 1 tam giác vuông cân.

Câu I: 2) Hàm số có CĐ, CT khi m < 2 . Toạ độ các điểm cực trị là:

$$A(0; m^2 - 5m + 5),\ B(\sqrt{2-m}; 1-m),\ C(-\sqrt{2-m}; 1-m)$$

Tam giác ABC luôn cân tại A ⇒ ΔABC vuông tại A khi m = 1.

Câu 34: **Cho hàm số** $y = x^3 + 3x^2 + m$ **(1)**

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi *m* = –4.

2) Tìm *m* để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị *A*, *B* sao cho $AOB = 120^0$.

Hướng dẫn

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = m+4 \\ x = 0 \Rightarrow y = m \end{array}\right.$

Vậy hàm số có hai điểm cực trị $A(0\,;\,m)$ và $B(-2\,;\,m+4)$

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (0;m),\ \overrightarrow{OB} = (-2;m+4)$. Để $AOB = 120^0$ thì $\cos AOB = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{m(m+4)}{\sqrt{m^2\left(4+(m+4)^2\right)}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 0 \\ m = \dfrac{-12 \pm 2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{-12+2\sqrt{3}}{3}$$

Câu 35: **Cho hàm số** $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ **(1).**

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi m = –2.

2) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác có một góc bằng 120^0**.**

2) Ta có $y' = 4x^3 + 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2+m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m} \end{array}\right.$ (m<0)

Gọi A(0; m^2+m); B($\sqrt{-m}$; m); C($-\sqrt{-m}$; m) là các điểm cực trị.

$\overrightarrow{AB} = (\sqrt{-m};-m^2)$; $\overrightarrow{AC} = (-\sqrt{-m};-m^2)$. ΔABC cân tại A nên góc 120^0 chính là A.

$$A = 120^\circ \Leftrightarrow \cos A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{-m}.\sqrt{-m}+m^4}{m^4-m} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m+m^4}{m^4-m} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2m+2m^4 = m-m^4 \Leftrightarrow 3m^4+m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \quad (loai) \\ m = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{array}\right.$$

Vậy m=$-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ thoả mãn bài toán.

***Câu36*. Tìm *m* để** $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ **có CĐ, CT lập thành tam giác đều.**

Giải. $f'(x) = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2-m\right)$. Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = m$.

Để hàm số có CĐ, CT ⇔ $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt ⇔ m > 0

⇒ 3 nghiệm là: $x_1 = -\sqrt{m}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \sqrt{m}$ ⇒ 3 điểm CĐ, CT là:

$A\left(-\sqrt{m}, m^4 - m^2 + 2m\right); B\left(0, m^4 + 2m\right); C\left(\sqrt{m}, m^4 - m^2 + 2m\right)$

$\Rightarrow\ AB = BC = \sqrt{m + m^4}\ ;\ AC = 2\sqrt{m}$.

Để A, B, C lập thành tam giác đều

thì $AB = BC = AC\ \Leftrightarrow\ \sqrt{m+m^4} = 2\sqrt{m}$

$\Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow m^4 = 3m \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}$

x	$-\infty$		x_1		0		x_3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	A CT	$\nearrow$	B CĐ	$\searrow$	C CT	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 37 **Tìm *m* để hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân**

Giải. Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 4x\left(x^2 - m^2\right) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$, khi đó đồ thị có 3 điểm cực trị là $A(0,1); B\left(-m, 1-m^4\right), C\left(m, 1-m^4\right)$. Do y là hàm chẵn nên YCBT $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Câu 38: **Cho hàm số: $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x + m - 2$ (1) có đồ thị là (C_m)**

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1) với m=1.

2) Xác định m để (C_m) có cực đại, cực tiểu và hai điểm cực đại cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = \frac{1}{2}x$.

GIẢI

$y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu:

$\Delta' = 9(m+1)^2 - 3.9 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1-\sqrt{3}) \cup (-1+\sqrt{3}; +\infty)$

Ta có $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{m+1}{3}\right)\left(3x^2 - 6(m+1)x + 9\right) - 2(m^2 + 2m - 2)x + 4m + 1$

Vậy đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $y = -2(m^2 + 2m - 2)x + 4m + 1$

Vì hai điểm cực đại và cực tiểu đối xứng qua đt $y = \frac{1}{2}x$ ta có điều kiện cần là

$\left[-2(m^2 + 2m - 2)\right]\frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$

Khi m = 1 $\Rightarrow$ptđt đi qua hai điểm CĐ và CT là:y = - 2x + 5. Tọa độ trung điểm CĐ và CT là:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{-2(x_1 + x_2) + 10}{2} = 1 \end{cases}$$

Tọa độ trung điểm CĐ và CT là (2; 1) thuộc đường thẳng $y = \frac{1}{2}x \Rightarrow m = 1$ tm .

Khi m = -3 $\Rightarrow$ptđt đi qua hai điểm CĐ và CT là: y = -2x – 11.
$\Rightarrow m=-3$ không thỏa mãn.
Vậy m = 1 thỏa mãn điều kiện đề bài.

***Câu 39:*Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m)**

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 1.

2. Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng *y* = *x*.

Giải

2/. Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$

Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m \neq 0$.

Giả sử hàm số có hai điểm cực trị là: $A(0; 4m^3)$, $B(2m; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2m;-4m^3)$

Trung điểm của đoạn *AB* là $I(m; 2m^3)$

Điều kiện để *AB* đối xứng nhau qua đường thẳng *y* = *x* là *AB* vuông góc với đường thẳng *y* = *x* và *I* thuộc đường thẳng *y* = *x*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-4m^3=0 \\ 2m^3=m \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có: $m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Giải ra ta có: $m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $m = 0$

***Câu40:*) Cho hàm số: $y=x^3-3(m+1)x^2+9x+m-2$ (1) có đồ thị là (C_m)**

3) **Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1) với m =1.**
4) **Xác định m để (C_m) có cực đại, cực tiểu và hai điểm cực đại cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=\frac{1}{2}x$.**

b) $y'=3x^2-6(m+1)x+9$
Để hàm số có cực đại, cực tiểu:
$\Delta'=9(m+1)^2-3.9>0$
$=(m+1)^2-3>0$

$\Leftrightarrow m \in (-\infty; -1-\sqrt{3}) \cup (-1+\sqrt{3}; +\infty)$

Ta có $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{m+1}{3}\right)\left(3x^2 - 6(m+1)x + 9\right) - 2(m^2+2m-2)x + 4m + 1$

Gọi tọa độ điểm cực đại và cực tiểu là $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$

$\Rightarrow y_1 = -2(m^2+2m-2)x_1 + 4m + 1$

$y_2 = -2(m^2+2m-2)x_2 + 4m + 1$

Vậy đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $y = -2(m^2+2m-2)x + 4m + 1$

Vì hai điểm cực đại và cực tiểu đối xứng qua đt $y = \frac{1}{2}x$ ta có điều kiện cần là

$\left[-2(m^2+2m-2)\right]\frac{1}{2} = -1$

$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 2 = 1$

$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$

Theo định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1.x_2 = 3 \end{cases}$

Khi m = 1 $\Rightarrow$ptđt đi qua hai điểm CĐ và CT là:

y = - 2x + 5. Tọa độ trung điểm CĐ và CT là: $\begin{cases} \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{-2(x_1+x_2)+10}{2} = 1 \end{cases}$

Tọa độ trung điểm CĐ và CT là (2; 1) thuộc đường thẳng $y = \frac{1}{2}x \Rightarrow m = 1$ thỏa mãn.

Khi m = -3 $\Rightarrow$ptđt đi qua hai điểm CĐ và CT là: y = -2x – 11. Tọa độ trung điểm CĐ và CT là:

__Câu 41:__ Cho hàm số: $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x + m - 2$ (1) có đồ thị là (C_m)

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1) với m =1.

2) Xác định m để (C_m) có cực đại, cực tiểu và hai điểm cực đại cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = \frac{1}{2}x$.

b) $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu:

$\Delta' = 9(m+1)^2 - 3.9 > 0$

$= (m+1)^2 - 3 > 0$

$\Leftrightarrow m \in (-\infty; -1-\sqrt{3}) \cup (-1+\sqrt{3}; +\infty)$

Ta có $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{m+1}{3}\right)\left(3x^2-6(m+1)x+9\right)-2(m^2+2m-2)x+4m+1$

Gọi tọa độ điểm cực đại và cực tiểu là (x_1; y_1) và (x_2; y_2)

$\Rightarrow y_1=-2(m^2+2m-2)x_1+4m+1$

$y_2=-2(m^2+2m-2)x_2+4m+1$

Vậy đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $y=-2(m^2+2m-2)x+4m+1$

Vì hai điểm cực đại và cực tiểu đối xứng qua đt $y=\frac{1}{2}x$ ta có điều kiện cần là

$\left[-2(m^2+2m-2)\right]\frac{1}{2}=-1$

$\Leftrightarrow m^2+2m-2=1$

$\Leftrightarrow m^2+2m-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-3\end{array}\right.$

Theo định lí Viet ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2(m+1)\\x_1.x_2=3\end{cases}$

Khi m = 1 $\Rightarrow$ptđt đi qua hai điểm CĐ và CT là:

y = - 2x + 5. Tọa độ trung điểm CĐ và CT là: $\begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4}{2}=2\\\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-2(x_1+x_2)+10}{2}=1\end{cases}$

Tọa độ trung điểm CĐ và CT là (2; 1) thuộc đường thẳng $y=\frac{1}{2}x\Rightarrow m=1$ thỏa mãn.

Khi m = -3 $\Rightarrow$ptđt đi qua hai điểm CĐ và CT là: y = -2x – 11. Tọa độ trung điểm CĐ và CT là:

$\begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}=-2\\\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-2(x_1+x_2)+10}{2}=9\end{cases}$

Tọa độ trung điểm CĐ và CT là (-2; 9) không thuộc đường thẳng $y=\frac{1}{2}x\Rightarrow m=-3$ không thỏa mãn.

Vậy m = 1 thỏa mãn điều kiện đề bài.

***<u>Câu 42 :</u>*Tìm *m* để $f(x)=x^3+mx^2+7x+3$ có đường thẳng đi qua CĐ, CT vuông góc với $y = 3x – 7$.**

Giải: Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ $f'(x)=3x^2+2mx+7=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $\Delta'=m^2-21>0\Leftrightarrow|m|>\sqrt{21}$. Thực hiện phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta có:

$f(x)=\frac{1}{9}(3x+m)f'(x)+\frac{2}{9}(21-m^2)x+3-\frac{7m}{9}$

Với $|m|>\sqrt{21}$ thì phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_1, x_2. Ta có: $f'(x_1)=f'(x_2)=0$ suy ra

$y_1=f(x_1)=\frac{2}{9}(21-m^2)x_1+3-\frac{7m}{9}$; $y_2=f(x_2)=\frac{2}{9}(21-m^2)x_2+3-\frac{7m}{9}$

$\Rightarrow$ Đường thẳng đi qua CĐ, CT là (Δ): $y=\frac{2}{9}(21-m^2)x+3-\frac{7m}{9}$

Ta có (Δ) $\perp$ $y=3x-7 \Leftrightarrow \frac{2}{9}(21-m^2).3=-1 \Leftrightarrow m^2=\frac{45}{2}>21 \Leftrightarrow m=\pm\frac{3\sqrt{10}}{2}$

Câu 43: **Tìm *m* để hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m^2x+m$ có cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua (Δ):** $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

Giải: Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ $f'(x)=3x^2-6x+m^2=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $\Delta'=9-3m^2>0 \Leftrightarrow |m|<\sqrt{3}$. Thực hiện phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta có:

$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)f'(x)+\frac{2}{3}(m^2-3)x+\frac{m^2}{3}+m$

Với $|m|<\sqrt{3}$ thì phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_1, x_2. Ta có: $f'(x_1)=f'(x_2)=0$ nên

$y_1=f(x_1)=\frac{2}{3}(m^2-3)x_1+\frac{m^2}{3}+m; y_2=f(x_2)=\frac{2}{3}(m^2-3)x_2+\frac{m^2}{3}+m$

$\Rightarrow$ Đường thẳng đi qua CĐ, CT là (d): $y=\frac{2}{3}(m^2-3)x+\frac{m^2}{3}+m$.

Các điểm cực trị $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ đối xứng nhau qua $(\Delta): y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow$ (d) $\perp$ (Δ) tại trung điểm I của AB (*) . Ta có $x_I=\frac{x_1+x_2}{2}=1$ suy ra

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}(m^2-3)\cdot\frac{1}{2}=-1 \\ \frac{2}{3}(m^2-3)\cdot 1+\frac{m^2}{3}+m=\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m(m+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=0$$