

Thời gian làm bài: 120 phút không kể thời gian giao đề

Bài 1. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 + 4x - 5 = 0$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

c) Rút gọn biểu thức: $P = \sqrt{16} - \sqrt[3]{8} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

Bài 2. (1,5 điểm)

Cho parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x + m$ (m là tham số)

a) Vẽ parabol (P).

b) Với những giá trị nào của m thì (P) và (d) chỉ có một điểm chung. Tìm tọa độ điểm chung đó.

Bài 3. (1,5 điểm)

a) Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ thành phố A đến thành phố B cách nhau 450 km với vận tốc không đổi. Vận tốc xe thứ nhất lớn hơn vận tốc xe thứ hai 10km/h nên xe thứ nhất đến trước xe thứ hai 1,5 giờ. Tính vận tốc mỗi xe.

b) Cho phương trình: $x^2 - mx - 1 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa $x_1 < x_2$ và $|x_1| - |x_2| = 6$.

Bài 4. (3,5 điểm) Cho đường tròn (O;R) và điểm A nằm ngoài đường tròn đó. Kẻ cát tuyến AMN không đi qua (O) (M nằm giữa A và N). Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O;R). (B và C là hai tiếp điểm và C thuộc cung nhỏ MN). Đường thẳng BC cắt MN và AO lần lượt tại E và F. Gọi I là trung điểm của MN.

a) Chứng minh rằng tứ giác ABOC nội tiếp được trong đường tròn.

b) Chứng minh $EB \cdot EC = EM \cdot EN$ và IA là phân giác của $\angle BIC$.

c) Tia MF cắt (O;R) tại điểm thứ hai là D. Chứng minh rằng $\triangle AMF \sim \triangle AON$ và $BC \parallel DN$.

d) Giả sử $OA = 2R$. Tính diện tích tam giác ABC theo R.

Bài 5. (1,0 điểm)

a) Giải phương trình $2\sqrt{x} - \sqrt{3x+1} = x-1$.

b) Cho ba số thực dương a, b thỏa $a + b + 3ab = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} + \frac{3ab}{a+b}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI

Bài 1.

a) Ta có $1 + 4 - 5 = 0$, phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -5$

$$b) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 \cdot 2 + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 1)$

$$c) P = \sqrt{16} - \sqrt[3]{8} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 4 - 2 + \sqrt{4} = 4 - 2 + 2 = 4$$

Bài 2.

a) Bảng giá trị của (P)

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$2x^2 = 2x + m \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - m = 0(1).$$

$$\Delta' = 1^2 - 2 \cdot (-m) = 2m + 1$$

(P) và (d) chỉ có một điểm chung khi phương trình (1) có nghiệm kép

$$\Rightarrow \Delta' = 0 \text{ hay } 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Khi $m = -\frac{1}{2}$ phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$.

Vậy tọa độ điểm chung khi đó là $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 3.

a) Gọi vận tốc xe thứ nhất là x (km/h) (điều kiện: $x > 10$)

Thì vận tốc xe thứ hai là $x - 10$ (km/h)

Thời gian xe thứ nhất đi hết quãng đường AB là: $\frac{1}{x}$ (h)

Thời gian xe thứ hai đi hết quãng đường AB là: $\frac{1}{x-10}$ (h)

Vì nên xe thứ nhất đến trước xe thứ hai 1,5 giờ ta có phương trình:

$$\frac{450}{x-10} - \frac{450}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow 900x - 900x + 9000 = 3x^2 - 30x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 30x - 9000 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 3000 = 0$$

$$\Delta = 10^2 + 4.3000 = 12100; \sqrt{\Delta} = 110$$

$$x_1 = \frac{10+110}{2} = 60 \text{ (nhận)}, x_2 = \frac{10-110}{2} = -50 \text{ (loại)}$$

Vậy vận tốc xe thứ nhất là 60 (km/h)

Thì vận tốc xe thứ hai là $60 - 10 = 50$ (km/h)

b) a = 1; b = - m; c = - 1.

Vì a và c khác dấu, phương trình luôn có hai nghiệm $x_1; x_2$ khác dấu.

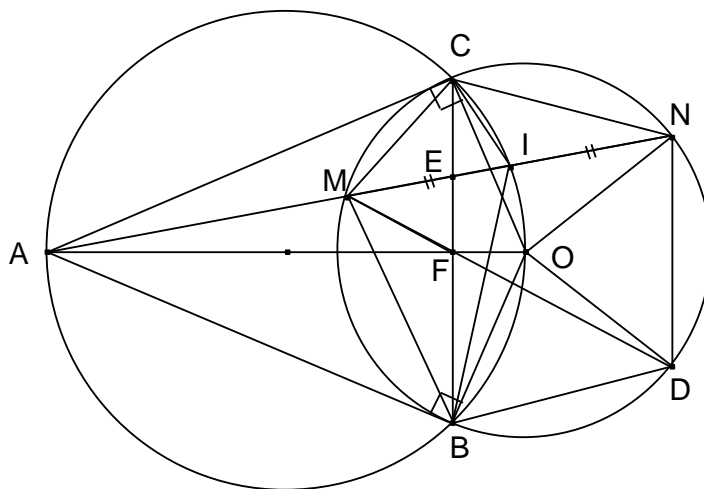
Theo hệ thức Viete ta có: $x_1 + x_2 = m$ (1)

Vì $x_1; x_2$ khác dấu mà $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow |x_1| = -x_1; |x_2| = x_2$.

Ta có: $|x_1| - |x_2| = 6 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = 6 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -6$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $m = -6$.

Bài 4.



a) Vì AB là tiếp tuyến của (O) tại tiếp điểm B $\Rightarrow AB \perp OB$ hay $\angle ABO = 90^\circ$

Vì AC là tiếp tuyến của (O) tại tiếp điểm $C \Rightarrow AC \perp OC$ hay $ACO = 90^\circ$.

Tứ giác $ABOC$ có $ACO = ABO = 90^\circ$ nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn đường kính AO .

b) Xét $\triangle EMB$ và $\triangle ECN$ có:

$$\angle EMB = \angle ECN \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } NB)$$

$$\angle EBM = \angle ENC \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } MC)$$

$$\Rightarrow \triangle EMB \sim \triangle ECN (gg)$$

$$\Rightarrow \frac{EM}{EC} = \frac{EB}{EN} \Rightarrow EB \cdot EC = EM \cdot EN.$$

Vì AB, AC là tiếp tuyến của (O) lần lượt tại các tiếp điểm B và C nên $AOB = AOC$ và $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Vì I là trung điểm $MN \Rightarrow OI \perp MN$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

$$\Rightarrow \angle AIO = 90^\circ \Rightarrow I \text{ nằm trên đường tròn đường kính } OA.$$

Xét đường tròn đường kính OA ta có:

$$\angle AIC = \angle AOC; \angle AIB = \angle AOB \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)}$$

$$\text{Mà } \angle AOB = \angle AOC$$

$$\Rightarrow \angle AIC = \angle AIB \text{ hay } IA \text{ là phân giác của } \angle BIC.$$

c) Vì $AB = AC$ và $OB = OC$ nên AO là đường trung trực của $BC \Rightarrow AO$ vuông góc với BC tại F .

Xét $\triangle AOC$ vuông tại C , đường cao CF ta có $AF \cdot AO = AC^2$ và $FC^2 = FA \cdot FO$.

Xét $\triangle ACM$ và $\triangle ANC$ có: $\angle ACM = \angle ANC$ và A chung

$$\Rightarrow \triangle ACM \sim \triangle ANC (gg) \Rightarrow \frac{AC}{AN} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow AC^2 = AM \cdot AN$$

$$\Rightarrow AF \cdot AO = AM \cdot AN \Rightarrow \frac{AF}{AN} = \frac{AM}{AO}$$

Xét $\triangle AMF$ và $\triangle AON$ có:

$$A \text{ chung}; \frac{AF}{AN} = \frac{AM}{AO} \Rightarrow \triangle AMF \sim \triangle AON (cgc)$$

Xét $\triangle FCM$ và $\triangle FDB$ có:

$$\angle FCM = \angle FDB \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } MB)$$

$$CFM = DFB \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle FCM \sim \triangle FDB \Rightarrow \frac{FM}{FB} = \frac{FC}{FD}$$

$$\Rightarrow FM \cdot FD = FB \cdot FC = FC^2$$

$$\Rightarrow FM \cdot FD = FA \cdot FO \Rightarrow \frac{FM}{FO} = \frac{FA}{FD}$$

Xét $\triangle FMA$ và $\triangle FOD$ có:

$$MFA = OFD \text{ và } \frac{FM}{FO} = \frac{FA}{FD}$$

$$\Rightarrow \triangle FMA \sim \triangle FOD (cgc) \Rightarrow FMA = FOD$$

$$\text{Mà } FMA = FON$$

$$\Rightarrow FON = FOD.$$

$\triangle FON$ và $\triangle FOD$ có: FO cạnh chung, $FON = FOD$, $ON = OD$

$$\Rightarrow \triangle FON = \triangle FOD (cgc) \Rightarrow FN = FD$$

Vì $FN = FD$ và $ON = OD \Rightarrow FO$ là đường trung trực của $ND \Rightarrow FO \perp ND$ mà $FO \perp BC \Rightarrow ND \parallel BC$.

d) Xét $\triangle AOC$ vuông tại C ta có:

$$OA^2 = AC^2 + OC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = OA^2 - OC^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$$

$$\Rightarrow AC = R\sqrt{3}.$$

Xét $\triangle AOC$ vuông tại C ta có: $\sin CAO = \frac{OC}{OA} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow CAO = 30^\circ \Rightarrow CAB = 60^\circ$$

$\triangle ABC$ có $AB = AC$ và $CAB = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ là tam giác đều.

$$\Rightarrow \text{đường cao } h = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{2}$$

$$S_{BCA} = \frac{1}{2} h \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{3R}{2} \cdot R\sqrt{3} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} (dvd)$$

Bài 5.

a) Điều kiện: $x \geq 0$. Với $x \geq 0$ ta có:

$$2\sqrt{x} - \sqrt{3x+1} = x-1$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{x} - \sqrt{3x+1})(2\sqrt{x} + \sqrt{3x+1}) = (x-1)(2\sqrt{x} + \sqrt{3x+1})$$

$$\Leftrightarrow x-1 = (x-1)(2\sqrt{x} + \sqrt{3x+1})$$

$$\Leftrightarrow x-1 - (x-1)(2\sqrt{x} + \sqrt{3x+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(1 - 2\sqrt{x} - \sqrt{3x+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 1-2\sqrt{x}-\sqrt{3x+1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2\sqrt{x}+\sqrt{3x+1}=1 \end{cases} (*)$$

Giải (*) $2\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} = 1$.

$$\text{Với } x \geq 0 \text{ ta có: } \left. \begin{array}{l} 2\sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{3x+1} \geq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} \geq 1.$$

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$. Vậy (*) có nghiệm $x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $\{0; 1\}$.

b) Đặt $t = a+b \Rightarrow t^2 = (a+b)^2 \geq 4ab$

$$\text{Ta có: } 1 = a+b+3ab \leq t + \frac{3}{4}t^2 \Rightarrow 3t^2 + 4t - 4 \geq 0$$

$$\Rightarrow (t+2)(3t-2) \geq 0 \Rightarrow 3t-2 \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ta có: } (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \geq \frac{4}{9} \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{2}{9}$$

Để dàng chứng minh $\sqrt{A} + \sqrt{B} \leq \sqrt{2(A+B)}$

$$\Rightarrow \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq \sqrt{2(2-a^2-b^2)}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq \sqrt{2\left(2-\frac{2}{9}\right)} = \frac{4\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

Ta có: $\frac{3ab}{a+b} = \frac{a+b+3ab}{a+b} - 1 = \frac{1}{a+b} - 1 \leq \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $P = \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} + \frac{3ab}{a+b} \leq \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = \frac{1}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$ đạt được khi $a = b = \frac{1}{3}$.