2) Chứng minh tia KM là phân giác của $\widehat{AKB}$
3) Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng BK với đường tròn (O). Chứng minh rằng AQ // NP.
4) Gọi H là giao điểm của AB và MO. Chứng minh rằng $MA^2 = MH.MO = MN.MP$
5) Chứng minh rằng 4 điểm N, H, O, P cùng thuộc một đường tròn
6) Gọi E là giao điểm của AB và KO. Chứng minh rằng $AB^2 = 4HE.HF$ (F là giao điểm của AB và NP).
7) Chứng minh rằng KEMH là tứ giác nội tiếp. Từ đó chứng tỏ rằng OK.OE không đổi.
8) Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng MO với đường tròn (O). Chứng minh ằng I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta MAB$
9) Chứng minh $\widehat{NHA} = \widehat{PHA}$
10) Chứng minh rằng KE là phân giác góc ngoài của $\widehat{AKB}$. Từ đó suy ra AE.BF = AF.BE
11) Chứng minh khi cát tuyến MNP thay đổi thì trọng tâm G của $\Delta NAP$ luôn chạy trên một đường tròn cố định.
12) Nếu MO = 2R. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi hai bán kính OA, OB và cung nhỏ AB.

**Bài 2**: Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng MA lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P. Chứng minh:
1) Tứ giác OMNP nội tiếp
2) Tứ giác CMPO là hình bình hành
3) CM.CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M
4) Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì tâm đường tròn nội tiếp $\Delta CND$ di chuyển trên một cung tròn cố định nào.

**Bài 3**: Cho ba điểm A, B, C trên một đường thẳng theo thứ tự ấy và đường thẳng (d) vuông góc với AC tại A. Vẽ đường tròn đường kính BC, trên đó lấy điểm M bất kì. Tia CM cắt đường thẳng d tại D; tia AM cắt đường tròn tại điểm thứ hai N; tia DB cắt đường tròn tại điểm thứ hai P
1) Chứng minh rằng tứ giác ABMD nội tiếp được
2) Tứ giác APND là hình gì? Tại sao?
3) Chứng minh rằng CM.CD không phụ thuộc vị trí của M
4) Chứng minh trọng tâm G của $\Delta MAC$ chạy trên một đường tròn cố định khi M di động.

**Bài 4**: Cho đường tròn (O; R) với dây BC cố định (BC không qua O). Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Điểm E thuộc cung lớn BC. Nối AE cắt BC tại D. Hạ $CH \perp AE$ tại H; CH cắt BE tại M. Gọi I là trung điểm của BC

1) Chứng minh bốn điểm A, I, H, C thuộc một đường tròn
2) Chứng minh khi E chuyển động trên cung lớn BC thì tích AD.AE không đổi
3) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\Delta BED$ tiếp xúc với AB
4) Tìm vị trí của E để diện tích $\Delta MAC$ lớn nhất

**Bài 5**: Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại A và H (O và O' ở hai phía của AH). Vẽ các đường kính AOB và AO'C của hai đường tròn. Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại M, cắt đường tròn (O') tại N.

1) Chứng minh ba điểm B, H, C thẳng hàng
2) Chứng minh rằng khi đường thẳng d thay đổi thì tỉ số $\frac{HM}{HN}$ không đổi
3) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MN và BC. Chứng minh bốn điểm A, H, I, K thuộc một đường tròn
4) Xác định vị trí của đường thẳng d để diện tích $\Delta HMN$ lớn nhất.

**Bài 6**: Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') tiếp xúc ngoài tại A (R = 2R'). Điểm B thuộc đường tròn (O; R) sao cho AB = R. Điểm M thuộc cung lớn AB của đường tròn (O; R) sao cho $MA \leq MB$. Nối MA cắt đường tròn (O'; R') tại N. Từ N kẻ đường thẳng song song với AB cắt đường tròn (O'; R') tại E, cắt MB tại F.

1) Chứng minh $\Delta AOM$ đồng dạng với $\Delta AO'N$
2) Chứng minh rằng độ dài đoạn NF không đổi khi M chuyển động trên cung lớn AB của đường tròn (O; R).
3) Chứng minh ABFE là hình thang cân
4) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác ABFN lớn nhất.

**Bài 7**: Cho đường tròn (O; R), đường kính AB cố định. Gọi M là trung điểm của đoạn OB. Dây CD vuông góc với AB tại M. Điểm E chuyển động trên cung lớn CD (E khác A). Nối AE cắt CD tại K. Nối BE cắt CD tại H.

1) Chứng minh bốn điểm B, M, E, K thuộc một đường tròn
2) Chứng minh AE.AK không đổi
3) Tính theo R diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi OB, OC và cung nhỏ BC
4) Chứng minh tâm I của đường tròn ngoại tiếp $\Delta BHK$ luôn thuộc một đường thẳng cố định khi điểm E chuyển động trên cung lớn CD.

**Bài 8**: Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Điểm M thuộc nửa đường tròn. Gọi H là điểm chính giữa cung AM. Tia BH cắt AM tại I. Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại A cắt BH tại K. Nối AH cắt BM tại E.

1) Chứng minh $\Delta BAE$ là tam giác cân. Chứng minh $KH.KB = KE^2$
2) Đường tròn tâm B, bán kính BA cắt AM tại N. Chứng minh tứ giác BIEN nội tiếp
3) Tìm vị trí của M để $\widehat{MKA} = 90^o$

**Bài 9**: Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Điểm H thuộc đoạn OB, H khác O và B. Dây CD vuông góc với AB tại H. Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn tại A. Nối CO và DO cắt đường thẳng d tại M và N. Các đường thẳng CM và DN cắt đường tròn (O) tại E và F. $(E \neq C, F \neq D)$

1) Chứng minh MNFE là tứ giác nội tiếp
2) Chứng minh ME.MC = NF.ND
3) Tìm vị trí của H để AEOF là hình thoi
4) Lấy K đối xứng với C qua A. Gọi G là trọng tâm $\Delta KAB$. Chứng minh rằng khi H chuyển động trên đoạn OB thì G thuộc một đường tròn cố định.

**Bài 10**: Cho $\Delta ABC$ có hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi E' là điểm đối xứng với H qua AC, F' là điểm đối xứng với H qua AB. Chứng minh

1) Tứ giác BCE'F' nội tiếp đường tròn (O)
2) Năm điểm A, F', B, C, E' cùng thuộc một đường tròn
3) AO và EF vuông góc với nhau
4) Khi A chạy tên (O) thì bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta AEF$ không đổi.

## DẠNG 7: Một số bài nâng cao

**Bài 1**: Giải các phương trình sau

**Bài 2**: Giải các hệ phương trình sau

**Bài 3**: Cho đường thẳng $y = (m-1)x + 2$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O tới đường thẳng đó lớn nhất.

**Bài 4**: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 2$. Gọi A và B là hai giao điểm của (d) và (P). Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB của (P) để diện tích $\Delta ABC$ đạt giá trị lớn nhất.

**Bài 5**: Cho 4 số a, b, c, d bất kỳ. Chứng minh rằng

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$$

**Bài 6**: Cho a, b, c > 0. Chứng minh $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$

**Bài 7**: Cho c > 0 và $a, b \geq c$. Chứng minh $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$

**Bài 8**: Cho $a, b \geq 0$ và $a^2 + b^2 \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a\sqrt{3a\left(a+2b\right)} + b\sqrt{3b\left(b+2a\right)}$$

**Bài 9**: Cho $a, b \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a+b}{\sqrt{a\left(3a+b\right)} + \sqrt{b\left(3b+a\right)}}$

**Bài 10**: Giả sử n là một số tự nhiên khác không, chứng minh

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2$$