BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

NB-TH: 26 câu - VD: 21 câu - VDC: 8 câu

A.LÝ THUYẾT

■ Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạn.

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

■ Điều kiện cần để hàm số đơn điệu: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

- Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.
- Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

■ Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K.
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K.
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K.

■ Chú ý.

- Nếu K là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết " Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó". Chẳng hạn: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in K$ trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số đồng biến trên đoạn $[a;b]$.
- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ (hoặc $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn của K thì hàm số đồng biến trên khoảng K (hoặc nghịch biến trên khoảng K).

B.BÀI TẬP

1.1.1 Chiều biến thiên của hàm số

Câu 1. **[NB-TH]**Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K \subset \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$, $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số tăng trên K.

B. Nếu $f'(x) > 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K.

C. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ thì hàm số tăng trên K.

D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Hướng dẫn giải

Xem phần lý thuyết.

Câu 2. **[NB-TH]**Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{1-x}$. Khẳng định nào sao đây là khẳng đinh đúng?

A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

+) $y'=\dfrac{2}{(1-x)^2}>0 \;,\; \forall x\neq 1$

+) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

Câu 3. **[NB-TH]**Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3x+2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)\,và\,(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$

+) $y'=-3x^2+6x-3=-3(x-1)^2\le 0\,,\;\forall x\in\mathbb{R}$

Câu 4. **[NB-TH]**Cho hàm số $y=-x^4+4x^2+10$ và các khoảng sau:

(I) $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$;(II) $\left(-\sqrt{2};0\right)$;(III)$\left(0;\sqrt{2}\right)$. Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. (I) và (III). B. (I) và (II). C. (II) và (III). D. Chỉ (I).

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $\mathrm{D} = \mathbb{R}$

+) $y' = -4x^3 + 8x = 4x(2 - x^2)$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

+) Trên các khoảng $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right)$ và $\left(0; \sqrt{2}\right)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến.

Câu 5. **[NB-TH]**Cho hàm số $y = \dfrac{3x-1}{-4+2x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.

B. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; 2\right)$và $\left(2; +\infty\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -2\right)$ và$\left(-2; +\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{2\right\}$

+) Ta có $y' = -\dfrac{10}{(-4+2x)^2} < 0, \forall x \in D$.

Câu 6. **[NB-TH]**Hỏi hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $f(x) = -\dfrac{4}{5}x^5 + \dfrac{4}{3}x^3 - x$.

B. $g(x) = x^3 + 3x^2 + 10x + 1$.

C. $h(x) = x^4 - 4x^2 + 4$.

D. $k(x) = x^3 + 10x - \cos^2 x$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = -4x^4 + 4x^2 - 1 = -(2x^2 - 1)^2 \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 7. **[NB-TH]**Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x+1}$. Hỏi hàm số nghịch trên các khoảng nào?

A. $\left(-4; -1\right)$ và $\left(-1; 2\right)$.

B. $\left(-4; 2\right)$.

C. $\left(-\infty; -1\right)$ và $\left(-1; +\infty\right)$.

D. $(-\infty; -4)$và $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-1\right\}$

+) $y' = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2}$.

+) Giải $y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -4 \end{array}\right.$

y' không xác định khi $x = -1$

+) BBT

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-11	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

+) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-4;-1)$ và $(-1;2)$

Câu 8. **[NB-TH]**Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 2$. Hỏi hàm số nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(2;3)$ B. $(1;6)$ C. $(-\infty;1)$ D. $(5;+\infty)$

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right.$

+) lập bảng biến thiên, suy ra hàm số nghịch biến trên $(1;5)$

Câu 9. **[NB-TH]**Cho hàm số $y = \dfrac{3}{5}x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2$. Hỏi hàm số đồng biến trên khoảng nào?

A. $\mathbb{R}$. B. $(-\infty;0)$. C. $(0;2)$. D. $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $\mathrm{D} = \mathbb{R}$

+) $y' = 3x^4 - 12x^3 + 12x^2 = 3x^2(x-2)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Câu 10. **[NB-TH]**Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hỏi hàm số luôn đồng biến trên R khi nào?

A. $\left[\begin{array}{l} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} a = b = 0, c > 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} a = b = c = 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac < 0 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{array}\right.$$

Câu 11. **[NB-TH]**Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 15$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-9;-5)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $\mathrm{D} = \mathbb{R}$

+) Do $y' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x-1)(x+3)$ nên hàm số **không** đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 12. **[NB-TH]**Cho hàm số $y = \sqrt{3x^2 - x^3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ $và$ $(2;3)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2);(2;3)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Hướng dẫn giải

+) ĐK: $3x^2 - x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ suy ra $\mathrm{D} = (-\infty;3]$

+) $y' = \dfrac{6x - 3x^2}{2\sqrt{3x^2 - x^3}}$.

Giải $y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

y' không xác định khi $\begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$

+) BBT

x	$-\infty$		0		2		3
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
y	$+\infty \searrow$		0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Hàm số nghịch biến $(-\infty;0)$ và $(2;3)$

Hàm số đồng biến $(0;2)$

Câu 13. **[NB-TH]**Cho hàm số $y=\frac{x}{2}+\sin^2 x, x\in[0;\pi]$. Hỏi hàm số đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$.

B. $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$.

C. $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$.

D. $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$

+) $y'=\frac{1}{2}+\sin 2x$.

Giải $y'=0 \Leftrightarrow \sin 2x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{7\pi}{12}+k\pi \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z})$

Vì $x\in[0;\pi]$ nên có 2 giá trị $x=\frac{7\pi}{12}$ và $x=\frac{11\pi}{12}$ thỏa mãn điều kiện.

+) BBT

x	0		$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
y'	|	+	0	−	0	+	|
y	0	↗		↘		↗	$\frac{\pi}{2}$

Hàm số đồng biến $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$

Câu 14. **[NB-TH]**Cho hàm số $y = x + \cos^2 x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi;+\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi;+\infty\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

D. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D=\mathbb{R}$; $y' = 1 - \sin 2x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

+) Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Câu 15. **[NB-TH]**Cho các hàm số sau:

$y=\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 4$; $y = \frac{x-1}{x+1}$; $y=\sqrt{x^2+4}$; $y = x^3 + 4x - \sin x$ và $y = x^4 + x^2 + 2$.

Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên những khoảng mà nó xác định?

A. 3. B. 4. C. 2. D. 5.

Hướng dẫn giải

+) $y' = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$y' = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0\ ,\quad \forall x \neq -1$$

$$y' = \left(\sqrt{x^2+4}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$y' = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2+1)$$

$$y' = 3x^2 + 4 - \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Câu 16. **[NB-TH]**Hỏi hàm số nào sau đây nghịch biến trên toàn trục số ?

$y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 (I)$

$y = \sin x - 2x (II)$

$y = -\sqrt{x^3+2} (III)$

$y = \dfrac{x-2}{1-x} (IV)$

A. (I), (II). B. (I), (II) và (III). C. (I), (II) và (IV). D. (II), (III).

Hướng dẫn giải

+) $y' = (-x^3 + 3x^2 - 3x + 1)' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0\ ,\quad \forall x \in \mathbb{R};$

+) $y' = (\sin x - 2x)' = \cos x - 2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$

+) $y' = -\left(\sqrt{x^3+2}\right)' = -\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}} \leq 0 \quad \forall x \in \left(-\sqrt[3]{2}; +\infty\right);$

+) $y' = \left(\dfrac{x-2}{1-x}\right)' = \left(\dfrac{x-2}{-x+1}\right)' = -\dfrac{1}{(1-x)^2} < 0 \quad \forall x \neq 1$

Câu 17. **[NB-TH]**Xét các mệnh đề sau.

(I). Hàm số $y = -(x-1)^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(II). Hàm số $y = \ln(x-1) - \dfrac{x}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

(III). Hàm số $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Hướng dẫn giải

+) $y'=\left(-(x-1)^3\right)'=-3(x-1)^2\le 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

+) $y'=\left(\ln(x-1)-\dfrac{x}{x-1}\right)'=\dfrac{x}{(x-1)^2}>0,\forall x>1$

+) $y'=\dfrac{1.\sqrt{x^2+1}-x.\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x.\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Câu 18. **[NB-TH]**Cho hàm số $y=|x+1|(x-2)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;\frac{1}{2})$.

C. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(\frac{1}{2};+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;\frac{1}{2})$ và đồng biến trên khoảng $(\frac{1}{2};+\infty)$.

Hướng dẫn giải

+) $y'=\begin{cases}2x-1, x>-1\\ -2x+1, x<-1\end{cases}$

+) $y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		+	$\|$	−	0	+	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Câu 19. **[NB-TH]**Cho hàm số $y = x + 3 + 2\sqrt{2-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(1;2\right)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-2\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-2;2\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-2\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-2;2\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(1;2\right)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \left(-\infty;2\right]$

$y' = \dfrac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{2-x}}$. Giải $y' = 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} = 1 \Rightarrow x = 1$

y' không xác định khi $x = 2$

+) BBT

x	$-\infty$		1		2
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$
y			6		
	$-\infty$				5

Câu 20. **[NB-TH]**Cho hàm số $y = \cos 2x + \sin 2x.\tan x, \forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số không đổi trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

B. Hàm số luôn tăng trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số luôn giảm trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số đơn điệu trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ (vừa tăng, vừa giảm trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$).

Hướng dẫn giải

+) Xét trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$$y=\cos 2x+\sin 2x.\tan x=\frac{\cos 2x.\cos x+\sin 2x.\sin x}{\cos x}=1\Rightarrow y'=0$$

+) Hàm số không đổi trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

1.1.2 Tìm tham số, để hàm số đơn điệu.

Câu 21. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định ?

A. $m<1$. B. $m\le -3$. C. $m\le 1$. D. $m<-3$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

+) $y'=\frac{m-1}{(x+1)^2}$

+) Để hàm số giảm trên các khoảng mà nó xác định $\Leftrightarrow y'<0,\forall x\ne -1\Leftrightarrow m<1$

Câu 22. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-3\le m\le 1$. B. $m\le 1$. C. $-3<m<1$. D. $m\le -3; m\ge 1$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

+) $y'=-x^2-2mx+2m-3$

+) Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'}<0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<0 \ \ (hn) \\ m^2+2m-3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le m \le 1$$

Câu 23. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+1)+2m-1}{x-m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó?

A. $m \le 1$. B. $m>1$. C. $m<1$. D. $m \ge 1$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

+) $y'=\dfrac{x^2-2mx+m^2-m+1}{(x-m)^2}$

+) Để hàm số tăng trên từng khoảng xác định của nó

$\Leftrightarrow y' \ge 0,\ \forall x \in D \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-m+1 \ge 0, \forall x \in D$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \ge 0\,(hn) \\ m-1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 1$$

Câu 24. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=x+m\cos x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $|m| \le 1$. B. $m>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. C. $|m| \ge 1$. D. $m<\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

+) $y'=1-m\sin x$

+) Đặt $t=\sin x, t \in [-1;1] \Rightarrow y'=1-mt=g(t)$

+) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow g(t)=1-mt \ge 0, \forall t \in [-1;1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(-1) \ge 0 \\ g(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -1 \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 1$$

Câu 25. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=(m-3)x-(2m+1)\cos x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m \in \left[-4;\dfrac{2}{3}\right]$. B. $m \ge 2$. C. $\begin{cases} m>3 \\ m \ne 1 \end{cases}$. D. $m \in (-\infty;2]$.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = m - 3 + (2m+1)\sin x$

+) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (2m+1)\sin x \le 3 - m$

Trường hợp 1: $m = -\frac{1}{2}$ ta có $0 \le \frac{7}{2}$ (hn). Vậy hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $m < -\frac{1}{2}$ ta có $\sin x \ge \frac{3-m}{2m+1}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1} \le -1$

$\Leftrightarrow 3 - m \ge -2m - 1 \Leftrightarrow m \ge -4$

Trường hợp 3: $m > -\frac{1}{2}$ ta có $\sin x \le \frac{3-m}{2m+1}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1} \ge 1$

$\Leftrightarrow 3 - m \ge 2m + 1 \Leftrightarrow m \le \frac{2}{3}$

+) Vậy $m \in \left[-4; \frac{2}{3}\right]$

Cách 2:

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = m - 3 + (2m+1)\sin x$

+) Đặt $t = \cos x, t \in \left[-1;1\right] \Rightarrow y' = m - 3 + (2m+1)t = g(t)$

+) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow g(t) = m - 3 + (2m+1)t \le 0, \forall t \in \left[-1;1\right]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(-1) \le 0 \\ g(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -4 \\ m \le \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le m \le \frac{2}{3}$$

Câu 26. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 6(m+1)x - 3m + 5 = 0$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 0. B. -1. C. 2. D. 1.

Hướng dẫn giải

+) Tính nhanh, ta có $f^{'}(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=m+1 \end{array}\right.$

+) Phương trình $f^{'}(x)=0$ có nghiệm kép khi $m=0$, nghĩa là hàm số luôn đồng biến.

+) Trường hợp $m \neq 0$, phương trình $f^{'}(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt (không thỏa yên cầu bài toán).

Câu 27. **[VD]**Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}+mx^2-mx-m$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m=-1$. B. $m=0$. C. $m=-5$. D. $m=-6$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

+) $y'=x^2+2mx-m$

+) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0(hn) \\ m^2+m\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1\leq m\leq 0$

+) Vậy giá trị nhỏ nhất của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $m=-1$

Câu 28. **[VD]**Tìm số nguyên m nhỏ nhất sao cho hàm số $y=\frac{(m+3)x-2}{x+m}$ luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó?

A. Không có m. B. $m=-2$. C. $m=0$. D. $m=-1$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

+) $y'=\frac{m^2+3m+2}{(x+m)^2}$

+) Yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow y'<0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2+3m+2<0 \Leftrightarrow -2<m<-1$

+) Vậy không có số nguyên m nào thuộc khoảng $(-2;-1)$.

Câu 29. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty;1)$?

A. $-2<m\leq -1$. B. $-2\leq m\leq -1$. C. $-2<m<2$. D. $-2\leq m\leq 2$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

+) $y' = \dfrac{m^2 - 4}{(x+m)^2}$

+) Để hàm số giảm trên khoảng $(-\infty;1) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (-\infty;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ 1 \le -m \end{cases}$

$\Leftrightarrow -2 < m \le -1$

Câu 30. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $m \ge 12$. B. $m \le 12$. C. $m \ge 0$. D. $m \le 0$.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = 3x^2 - 12x + m$

Trường hợp 1: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0\ (hn) \\ 36 - 3m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 12$

Trường hợp 2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 \le 0$ (*)

Trường hợp 2.1: $y' = 0$ có nghiệm $x = 0$ suy ra $m = 0$. Nghiệm còn lại của $y' = 0$ là $x = 4$ (không thỏa (*))

Trường hợp 2.2: $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 36 - 3m > 0 \\ 4 < 0 (vl) \\ \dfrac{m}{3} > 0 \end{cases} \Rightarrow$ không có m

+) Vậy $m \ge 12$

Cách 2:

+) Hàm số đồng biến trên $\left(0;+\infty\right) \Leftrightarrow m \geq 12x - 3x^2 = g(x), \forall x \in (0;+\infty)$.

+) Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $\left(0;+\infty\right)$.

x	0		2		$+\infty$
g'		+	0	-	
g			12		
		↗		↘	
	0				$-\infty$

+) Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \geq \max g(x) \Leftrightarrow m \geq 12$

Câu 31. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. $m \in \left(-\infty;2\right]$. B. $m \in \left[-5;2\right)$. C. $m \in \left(2,+\infty\right)$. D. $m \in \left(-\infty;-5\right)$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

+) $y' = 4x^3 - 4(m-1)x$.

+) Hàm số đồng biến trên $(1;3)$

$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1;3) \Leftrightarrow g(x) = x^2 + 1 \geq m, \forall x \in (1;3)$.

+) Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;3)$.

x	1		3
g'		+	0
g			10
		↗	
	2		

+) Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \le \min g(x) \Leftrightarrow m \le 2$.

Câu 32. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

A. $m = -1; m = 9$. B. $m = -1$. C. $m = 9$. D. $m = 1; m = -9$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = x^2 - mx + 2m$

+) Ta không xét trường hợp $y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$ vì $a = 1 > 0$

+) Hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3 $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 8 \ hay \ m < 0 \\ m^2 - 8m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1 \ hay \ m = 9$$

Câu 33. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\sin x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$?

A. $m \le 0; \frac{1}{2} \le m < 1$. B. $m \le 0; \frac{1}{2} \le m \le 1$. C. $m < 1$. D. $m \le 1$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sin x, t \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(t) = \frac{1-t}{t-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

+) Hàm số nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f'(t) = \frac{m-1}{(t-m)^2} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge \frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0 \text{ hoặc } \frac{1}{2} \le m < 1$$

Câu 34. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$?

A. $m\le 0;1\le m<2$. B. $1\le m<2$. C. $m\ge 2$. D. $m\le 0$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t=\tan x, t\in(0;1)\Rightarrow f(t)=\dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

+) Hàm số đồng biến trên $(0;1)\Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{-m+2}{(t-m)^2}>0,\forall t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-m+2>0\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\le 0 \text{ hoặc } 1\le m<2$$

Câu 35. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{mx^3}{3}+7mx^2+14x-m+2$ giảm trên nửa khoảng $[1;+\infty)$?

A. $\left(-\infty;-\frac{14}{15}\right]$. B. $\left(-\infty;-\frac{14}{15}\right)$. C. $\left[-2;-\frac{14}{15}\right]$. D. $\left[-\frac{14}{15};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D=\mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$mx^2+14mx+14\le 0,\forall x\ge 1$, tương đương với $g(x)=\dfrac{-14}{x^2+14x}\ge m$ (1)

+) Dễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x\in[1;+\infty)$

suy ra $\min\limits_{x\ge 1} g(x)=g(1)=-\dfrac{14}{15}$

+) Kết luận: (1) $\Leftrightarrow \min\limits_{x\ge 1} g(x)\ge m\Leftrightarrow -\dfrac{14}{15}\ge m$

Câu 36. **[VD]**Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty;\frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\dfrac{p}{q}$ tối giản và $q>0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 7. B. 9. C. 5. D. 3.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

+) $y'=-4x^3+2(2m-3)x$.

+) Hàm số nghịch biến trên $(1;2)$

$$\Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow m \le x^2 + \frac{3}{2} = g(x), \forall x \in (1;2).$$

+) Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;2)$.

+) $g'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

+) BBT

x	1		2
g'		$+$	0
g	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$\frac{11}{2}$

+) Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \le \min g(x) \Leftrightarrow m \le \frac{5}{2}$

+) Vậy $p + q = 5 + 2 = 7$.

Câu 37. **[VD]**Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + m + 2}{x - m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. Vô số. B. Bốn. C. Hai. D. Không có.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

+) $y' = \dfrac{x^2 - 2mx + 2m^2 - m - 2}{(x-m)^2} = \dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$.

+) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $g(x) \ge 0, \forall x \in D$.

+) Điều kiện tương đương là $\Delta_{g(x)} = -m^2 + m + 2 \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 2 \end{array}\right.$

+) Kết luận: Có vô số giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 38. **[VD]**Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

+) $y'=\dfrac{2x^2-4mx+m^2-2m-1}{(x-m)^2}=\dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$

+) Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x)\ge 0,\forall x>1$ và $m\le 1$ (1)

Vì $\Delta_g^{'}=2(m+1)^2\ge 0,\forall m$ nên (1)

$\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm thỏa $x_1\le x_2\le 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases}2g(1)=2(m^2-6m+1)\ge 0\\ \dfrac{S}{2}=m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow m\le 3-2\sqrt{2}\approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 39. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số α và β sao cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{-x^3}{3}+\dfrac{1}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)x^2-\dfrac{3}{2}x\sin\alpha\cos\alpha-\sqrt{\beta-2}$ luôn giảm trên $\mathbb{R}$?

A. $\dfrac{\pi}{12}+k\pi\le\alpha\le\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$. B. $\dfrac{\pi}{12}+k\pi\le\alpha\le\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$.

C. $\alpha\le\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$. D. $\alpha\ge\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện xác định: $\beta\ge 2$

+) Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình $\dfrac{1}{2}\le\sin 2\alpha\le 1$

+) Kết luận: $\dfrac{\pi}{12}+k\pi\le\alpha\le\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$.

Câu 40. **[VDC]**Tìm mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số $y=f(x)=2x+a\sin x+b\cos x$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$?

A. $a^2+b^2\le 4$.　B. $a+2b=2\sqrt{3}$.　C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$.　D. $a+2b\ge\frac{1+\sqrt{2}}{3}$

.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D=\mathbb{R}$

+) $y'=2+a\cos x-b\sin x$

+) Áp dụng bất đẳng thức Schwartz ta có $2-\sqrt{a^2+b^2}\le y'\le 2+\sqrt{a^2+b^2}$

+) Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$y'\ge 0,\forall x\Leftrightarrow 2-\sqrt{a^2+b^2}\ge 0\Leftrightarrow a^2+b^2\le 4$.

1.1.3 Ứng dụng tính đơn điệu của hàm số.

Câu 41. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^3-3x^2-9x-m=0$ có đúng 1 nghiệm?

A. $m<-27$ hoặc $m>5$.　B. $m<-5$ hoặc $m>27$.

C. $-27\le m\le 5$.　D. $-5\le m\le 27$.

Hướng dẫn giải

+) $(1)\Leftrightarrow m=x^3-3x^2-9x=f(x)$.

+) Bảng biến thiên của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f(x)′		+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	5	↘	-27	↗	$+\infty$

+) Từ đó suy ra pt có đúng 1 nghiệm khi $m<-27$ hoặc $m>5$

Câu 42. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1}=x+m$ có nghiệm?

A. $m\le 2$.　B. $m\ge 2$.　C. $m\ge 3$.　D. $m\le 3$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t=\sqrt{x+1}, t\ge 0$.

+) Phương trình thành: $2t=t^2-1+m\Leftrightarrow m=-t^2+2t+1$

+) Xét hàm số $f(t)=-t^2+2t+1, t\ge 0; f'(t)=-2t+2$

+) Bảng biến thiên của *f(t)*

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$			2		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	1				$-\infty$

+) Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi $m \le 2$.

Câu 43. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2-4x+5}=m+4x-x^2$ có đúng 2 nghiệm dương?

A. $-3<m<\sqrt{5}$.   B. $1 \le m \le 3$.   C. $-\sqrt{5}<m<3$.   D. $-3 \le m<3$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t=f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$.

+) $f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

+) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

+) Xét $x>0$ ta có bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{5}$				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$	
			1		

+) Khi đó phương trình đã cho trở thành $m=t^2+t-5 \Leftrightarrow t^2+t-5-m=0$ *(1).*

Nếu phương trình *(1)* có nghiệm t_2,t_2 thì $t_1+t_2=-1$. (1) có nhiều nhất 1 nghiệm $t \ge 1$.

+) Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t \in \left(1;\sqrt{5}\right)$.

+) Đặt $g(t)=t^2+t-5$. Ta đi tìm m để phương trình $g(t)=m$ có đúng 1 nghiệm $t\in\left(1;\sqrt{5}\right)$.

$g'(t)=2t+1>0,\forall t\in\left(1;\sqrt{5}\right)$.

Ta có bảng biến thiên sau

t	1	$\sqrt{5}$
g'(t)	+	
g(t)	-3 ↗	$\sqrt{5}$

+) Từ BBT suy ra $-3<m<\sqrt{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 44. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình: $x^2-3x+2\le 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2+\left(m+1\right)x+m+1\ge 0$?

A. $m\ge -\dfrac{4}{7}$. B. $m\le -\dfrac{4}{7}$. C. $m\le -1$. D. $m\ge -1$.

Hướng dẫn giải

+) Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow 1\le x\le 2$

+) Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow m(x^2+x+1)\ge -x-2\Leftrightarrow m\ge \dfrac{-x-2}{x^2+x+1}$

+) Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-x-2}{x^2+x+1}$ với $1\le x\le 2$

Có $f'(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}>0,\forall x\in[1;2]$

+) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{[1;2]} f(x)\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{4}{7}$

Câu 45. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình: $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có ít nhất một nghiệm trên đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$?

A. $0 \le m \le 2$. B. $-1 \le m \le 3$. C. $0 \le m \le 3$. D. $-1 \le m \le 2$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}$.

Điều kiện : $t \ge 1$.

+) Phương trình thành: $t^2 + t - 2m - 2 = 0$ (*)

Khi $x \in \left[1;3^{\sqrt{3}}\right] \Rightarrow t \in [1;2]$

$(*) \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{t^2 + t - 2}{2} = m$

+) Bảng biến thiên $f(t)$

t	1	2
$f'(t)$	+	
$f(t)$	0	2

+) Từ bảng biến thiên ta có : $0 \le m \le 2$

Câu 46. **[VDC]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có hai nghiệm thực?

A. $m \ge \dfrac{9}{2}$. B. $m \ge \dfrac{3}{2}$. C. $m \ge -\dfrac{7}{2}$. D. $\forall m \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện : $x \ge -\dfrac{1}{2}$

+) Vì $x = 0$ không là nghiệm nên $(*) \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 1 = mx$

$$\Leftrightarrow m = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x}$$

+) Xét $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 1}{x}$

Ta có $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x} > 0\ \forall x \ge -\dfrac{1}{2}; x \ne 0$

+) Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$			0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		||	$+$	
$f(x)$			$+\infty$	||		$+\infty$
	$\frac{9}{2}$			|| $-\infty$		

+) Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm thì $m \ge \frac{9}{2}$

Câu 47. **[VDC]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$ có hai nghiệm thực?

A. $0 \le m < \frac{1}{3}$. B. $-1 \le m \le \frac{1}{4}$. C. $-2 < m \le \frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{3} \le m < 1$.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện : $x \ge 1$

+) Pt $\Leftrightarrow 3\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} + m = 2\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x+1)^2}}$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$$

+) $t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$ với $x \ge 1$ ta có $0 \le t < 1$

Thay vào phương trình ta được $m = 2t - 3t^2 = f(t)$

+) Ta có : $f'(t) = 2 - 6t$ ta có : $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

+) BBT

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$		$+$	0	--	

f(t)		$\frac{1}{3}$	
	0		-1

+) Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm khi $0 \le m < \frac{1}{3}$

Câu 48. **[VDC]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{(1+2x)(3-x)} > m + 2x^2 - 5x + 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left[-\frac{1}{2};3\right]$?

A. $m < 0$. B. $m > 0$. C. $m < 1$. D. $m > 1$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sqrt{(1+2x)(3-x)}$ khi $x \in \left[-\frac{1}{2};3\right] \Rightarrow t \in \left[0;\frac{7\sqrt{2}}{4}\right]$

+) Thay vào bất phương trình ta được $f(t) = t^2 + t > m$

+) BBT

t	0	$\frac{7\sqrt{2}}{4}$
f'(t)	+	
f(t)		$\frac{49+14\sqrt{2}}{8}$
	0	

+) Từ bảng biến thiên ta có : $m < 0$

Câu 49. **[VDC]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $3\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}\right) - 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \ge m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;3]$?

A. $m \le 6\sqrt{2} - 4$. B. $m \ge 6$. C. $m \ge 6\sqrt{2} - 4$. D. $m \le 6$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \Leftrightarrow 2\sqrt{(1+x)(3-x)} = t^2 - 4$

+) Với $x \in [-1;3] => t \in [2;2\sqrt{2}]$ Thay vào bất phương trình ta được : $m \le -t^2 + 3t - 4$

+) Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 3t + 4; f'(t) = -2t + 3$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} < 2$$

t	2	$2\sqrt{2}$
f′(t)	--	
f(t)	6 ↘	$6\sqrt{2}-4$

+) Từ bảng biến thiên ta có $m \le 6\sqrt{2} - 4$ thỏa đề bài

Câu 50. **[VDC]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \le m^2 - m + 1$ nghiệm đúng $\forall x \in [-3,6]$?

A. $m \le -1$ hoặc $\mathrm{m} \ge 2$.

B. $-1 \le m \le 0$.

C. $0 \le m \le 2$.

D. $m \ge -1$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} > 0 \Rightarrow t^2 = \left(\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}\right)^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)}$

$\Rightarrow 9 \le t^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \le 9 + (3+x) + (6-x) = 18$

$\Rightarrow \sqrt{18+3x-x^2} = \sqrt{(3+x)(6-x)} = \frac{1}{2}(t^2 - 9); t \in [3;3\sqrt{2}]$

+) Xét $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{9}{2}$; $f'(t) = 1 - t < 0; \forall t \in [3;3\sqrt{2}] \Rightarrow \max\limits_{[3;3\sqrt{2}]} f(t) = f(3) = 3$

+) ycbt $\Leftrightarrow \max\limits_{[3;3\sqrt{2}]} f(t) = 3 \le m^2 - m + 1 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \ge 0 \Leftrightarrow m \le -1 \text{ v } \mathrm{m} \ge 2$

Câu 51. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m.4^x + (m-1).2^{x+2} + m - 1 > 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

A. $m \ge 1$.

B. $m \le 3$.

C. $-1 \le m \le 4$.

D. $m \ge 0$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = 2^x > 0$ thì $m.4^x + (m-1).2^{x+2} + m - 1 > 0$ đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m.t^2 + 4(m-1).t + (m-1) > 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow m(t^2 + 4t + 1) > 4t + 1, \forall t > 0$

$\Leftrightarrow g(t) = \dfrac{4t+1}{t^2+4t+1} < m, \forall t > 0$.

Ta có $g'(t) = \dfrac{-4t^2-2t}{\left(t^2+4t+1\right)^2} < 0$ nên $g(t)$ nghịch biến trên $[0;+\infty)$

+) ycbt $\Leftrightarrow \underset{t\ge 0}{Max}\, g(t) = g(0) = 1 \le m$

Câu 52. **[VDC]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $-x^3+3mx-2 < -\dfrac{1}{x^3}$ nghiệm đúng $\forall x \ge 1$?

A. $m < \dfrac{2}{3}$. B. $m \ge \dfrac{2}{3}$. C. $m \ge \dfrac{3}{2}$. D. $-\dfrac{1}{3} \le m \le \dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

+) Bpt $\Leftrightarrow 3mx < x^3 - \dfrac{1}{x^3} + 2, \forall x \ge 1 \Leftrightarrow 3m < x^2 - \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{2}{x} = f(x), \forall x \ge 1$.

+) Ta có $f'(x) = 2x + \dfrac{4}{x^5} - \dfrac{2}{x^2} \ge 2\sqrt{2x\left(\dfrac{4}{x^5}\right)} - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{4\sqrt{2}-2}{x^2} > 0$ suy ra $f(x)$ tăng.

+) Ycbt $\Leftrightarrow f(x) > 3m, \forall x \ge 1 \Leftrightarrow \min\limits_{x\ge 1} f(x) = f(1) = 2 > 3m \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} > m$

Câu 53. **[VDC]**Tìm giá trị lớn nhất của tham số m sao cho bất phương trình $2^{\cos^2 x} + 3^{\sin^2 x} \ge m.3^{\cos^2 x}$ có nghiệm?

A. $m = 4$. B. $m = 8$. C. $m = 12$. D. $m = 16$.

Hướng dẫn giải

+) (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\cos^2 x} + 3\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\cos^2 x} \ge m$.

+) Đặt $t = \cos^2 x, 0 \le t \le 1$

+) (1) trở thành $\left(\dfrac{2}{3}\right)^t + 3\left(\dfrac{1}{9}\right)^t \ge m$ (2). Đặt $f(t) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t + 3\left(\dfrac{1}{9}\right)^t$.

+) Ta có (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \in [0;1] \Leftrightarrow \mathrm{m} \le \underset{t\in[0;1]}{\mathrm{Max}}\, f(t) \Leftrightarrow m \le 4$

Câu 54. **[VD]**Bất phương trình $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x} \ge 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a;b]$. Hỏi tổng $a+b$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 5. B. 4.

C. -2. D. 3.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện: $-2 \le x \le 4$

+) Xét $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x}$ trên đoạn $[-2;4]$.

+) Có $f'(x) = \dfrac{3(x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \dfrac{1}{2\sqrt{4 - x}} > 0, \forall x \in (-2;4)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[-2;4]$

+) Bpt $\Leftrightarrow f(x) \ge f(1) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \ge 1$.

+) So với điều kiện, tập nghiệm của bpt là $S = [1;4]$

Câu 55. **[VD]**Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 6x + 11} > \sqrt{3 - x} - \sqrt{x - 1}$ có tập nghiệm $(a;b]$. Hỏi hiệu $b - a$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1. B. 2.

C. 3. D. -1.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện: $1 \le x \le 3$; bpt $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 2} + \sqrt{x - 1} > \sqrt{(3 - x)^2 + 2} + \sqrt{3 - x}$

+) Xét $f(t) = \sqrt{t^2 + 2} + \sqrt{t}$ với $t \ge 0$

+) Có $f'(t) = \dfrac{t}{2\sqrt{t^2 + 2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$

+) (1) ⇔ $\Leftrightarrow f(x-1) > f(3-x) \Leftrightarrow x - 1 > 3 \Leftrightarrow x > 2$

+) So với điều kiện, bpt có tập nghiệm là $S = (2;3]$