ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA NĂM 2017 – Đề 9

Môn: TOÁN

Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1: Hàm số $y=-x^3+3x^2+9x+4$ đồng biến trên khoảng

A. $(-1;3)$ **B.** $(-3;1)$ **C.** $(-\infty;-3)$ **D.** $(3;+\infty)$

Hướng dẫn giải.

$y=-x^3+3x^2+9x+4, D=\mathbb{R}$

$\Rightarrow y'=-3x^2+6x+9$

$y'=0 \Leftrightarrow -3x^2+6x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow y'>0, \forall x\in(-1;3)$ => Hàm số đồng biến trên $(-1;3)$

Câu 2: Hàm số $\Rightarrow y'=-4x^3-6x=-x\left(4x^2+6\right)$ có:

A. Một cực đại và 2 cực tiểu **B.** Một cực tiểu và 2 cực đại

C. Một cực đại duy nhất **D.** Một cực tiểu duy nhất

Hướng dẫn giải.

$y=-x^4-3x^2+1$

$\Rightarrow y'=-4x^3-6x=-x\left(4x^2+6\right)$

$y'=0 \Leftrightarrow x=0$ và đổi dấu từ + sang – (dựa vào bảng biến thiên).

=> Hàm số có 1 cực đại duy nhất.

Đáp án C.

Câu 3: GTNN của hàm số $y=x-5+\frac{1}{x}$ trên $\left[\frac{1}{2};5\right]$ bằng

A. $-\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** -3 **D.** -2

Hướng dẫn giải.

$y=x-5+\frac{1}{x}\Rightarrow y'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1(L)\\x=1\end{array}\right.$

Ta có: $f(1)=-3;f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2};f(5)=\frac{1}{5}$

Vậy GTNN của hàm số bằng $-3\Rightarrow C$

Cách giải khác: Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $y=x+\frac{1}{x}-5\geq 2\sqrt{x.\frac{1}{x}}-5=-3$

Câu 4: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1\ (1)$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) song song với đường thẳng $y=3x+1$ có phương trình là

A. $y=3x-1$ **B.** $y=3x-\frac{26}{3}$ **C.** $y=3x-2$ **D.** $y=3x-\frac{29}{3}$

Hướng dẫn giải.

$y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1\Rightarrow y'=x^2-4x+3$

Đường thẳng $y=3x+1$ có hệ số góc là 3

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=3x+1$ nên $y'(x)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$

$x=0\Rightarrow y=1$ suy ra phương trình tiếp tuyến: $y=3x+1$

$x=4\Rightarrow y=\frac{7}{3}\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y=3x-\frac{29}{3}$

Thử lại, ta được $y=3x-\frac{29}{3}$ thỏa yêu cầu bài toán

Câu 5: Điểm nào sau đây là điểm uốn của đồ thị hàm số: $y=x^3-3x+5$ là:

A. $(0;5)$ **B.** $(1;3)$ **C.** $(-1;1)$ **D.** Không có điểm uốn

Hướng dẫn giải.

$y=x^3-3x+5\Rightarrow y'=3x^2-3\Rightarrow y''=6x$

$y''=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=5\Rightarrow$ Điểm uốn $I(0;5)$

Câu 6: Với tất cả giá trị nào của m thì hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+1-2m$ chỉ có một cực trị

A. $m \ge 1$ **B.** $m \le 0$ **C.** $0 \le m \le 1$ **D.** $m \le 0 \vee m \ge 1$

Hướng dẫn giải.

$y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m \Rightarrow y' = 4mx^3 + 2(m-1)x = 2x(2mx^2 + m - 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2mx^2 + m - 1 = 0 (2) \end{array}\right.$$

Hàm số chỉ có một cực trị $\Leftrightarrow (2)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta \le 0 \Leftrightarrow -2m(m-1) \le 0 \Leftrightarrow m \le 0 \vee m \ge 1$

Câu 7: Đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 1}$ tại mấy điểm:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Hướng dẫn giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x^2 - 3x}{x - 1} = -x + m \Leftrightarrow 2x^2 - (m+4)x + m = 0$$

$\Delta = (m+4)^2 - 8m = m^2 + 16 > 0, \forall m \Rightarrow 2$ nghiệm phân biệt

Vậy d cắt (C) tại 2 điểm.

Câu 8: Với các giá trị nào của m thì hàm số $y = \dfrac{(m+1)x + 2m + 2}{x + m}$ nghịch biến trên $(-1; +\infty)$

A. $m < 1$ **B.** $m > 2$ **C.** $m < 1 \vee m > 2$ **D.** $1 \le m < 2$

Hướng dẫn giải.

$$y = \frac{(m+1)x + 2m + 2}{x + m} \Rightarrow y' = \frac{(m+1)m - 2m - 2}{(x+m)^2} = \frac{m^2 - m - 2}{(x+m)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên $(-1; +\infty) \Leftrightarrow y' < 0 \forall x \in (-1; +\infty)$

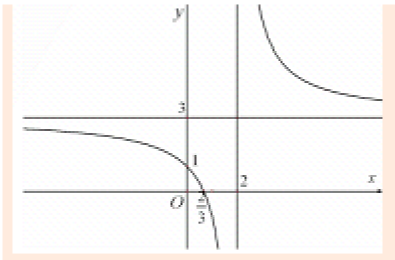
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \le -1 \\ m^2 - m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 1 \\ -1 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le m < 2$$

Câu 9: Cho các phát biểu sau:

(1). Hàm số $y=x^3+3x^2+3x+1$ có đồ thị là (C) không có cực trị.

(2). Hàm số $y=x^3+3x^2+3x+1$ có điểm uốn là $U(-1;0)$

(3). Đồ thị hàm số $y=\frac{3x-2}{x-2}$ có dạng



(4). Có dạng $y=\frac{2x+1}{x+1}$ có lim $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x+1}{x+1}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x+1}{x+1}=+\infty$

Số các phát biểu đúng là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 10: Giá trị của m để đường thẳng $d: x+3y+m=0$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm M, N sao cho tam giác AMN vuông tại điểm $A(1;0)$ là:

A. $m=6$ **B.** $m=4$ **C.** $m=-6$ **D.** $m=-4$

Hướng dẫn giải.

Ta có: $d: y=-\frac{1}{3}x-\frac{m}{3}$

Hoành độ giao điểm của d và (H) là nghiệm của phương trình

$\frac{2x-3}{x-1}=-\frac{1}{3}x-\frac{m}{3}\Leftrightarrow x^2+(m+5)x-m-9=0, x\neq 1\ (1)$

Ta có: $\Delta=(m+7)^2+12>0,\forall m. M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(x_1-1;y_1),\overrightarrow{AN}=(x_2-1;y_2)$. Tam giác AMN vuông tại A

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=0$
$\Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=0$
$\Leftrightarrow 10x_1x_2+(m-9)(x_1+x_2)+m^2+9=0.(2)$

Áp dụng định lý Viet, ta có $x_1+x_2=-m-5, x_1x_2=-m-9$

$10(-m-9)+(m-9)(-m-5)+m^2+9=0\Leftrightarrow -6m-36=0\Leftrightarrow m=-6$

Câu 11: Cho $A=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{6}+\log_4 81-\log_2 27+81^{\frac{1}{\log_5 3}}$

Chọn nhận định **đúng.**

A. $\log_A(626)=2$ **B.** $616^{\log_A 9}=3$ **C.** $A=313$ **D.** $\log_2 A=1+\log_2 313$

Hướng dẫn giải.

$$A=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{6}+\log_4 81-\log_2 27+81^{\frac{1}{\log_5 3}}=\log_2 6+\log_2 9-\log_2 27+\left(3^{\log_3 5}\right)^4$$

$$=\log_2\frac{6.9}{27}+5^4=1+625=626$$

$$\Rightarrow \log_2 626=\log_2\left(2.313\right)=1+\log_2 313\Rightarrow D$$

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình: $2\log_3\left(x-1\right)+\log_{\sqrt{3}}\left(2x-1\right)\le 2$ là:

A. $S=\left(1;2\right)$ **B.** $S=\left(-\frac{1}{2};2\right)$ **C.** $S=\left(1;2\right]$ **D.** $S=\left[1;2\right)$

Hướng dẫn giải.

Điều kiện: $x>1$

$$2\log_3\left(x-1\right)+\log_{\sqrt{3}}\left(2x-1\right)\le 2\Leftrightarrow \log_3\left[\left(x-1\right)\left(2x-1\right)\right]\le 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-3x-2\le 0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le x\le 2$$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow S=\left(1;2\right]$

Câu 13: Cho $\log_3 15=a,\log_3 10=b$. Giá trị của biểu thức $P=\log_3 50$ theo a và b là:

A. $P=a+b-1$ **B.** $P=a-b-1$ **C.** $P=2a+b-1$ **D.** $P=a+2b-1$

Hướng dẫn giải.

$$\log_3 50=\log_3\frac{150}{3}=\log_3 15+\log_3 10-1=a+b-1$$

Câu 14: Cho biểu thức $Q=\log_a\left(a\sqrt{b}\right)-\log_{\sqrt{a}}\left(a.\sqrt[4]{b}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}\left(b\right)$, biết rằng a, b là các số thực dương khác 1.

Chọn nhận định **chính xác** nhất.

A. $2^Q=\log_Q 16$ **B.** $2^Q>\log_{\frac{1}{Q}}\frac{1}{16}$ **C.** $2^Q<\log_Q 15$ **D.** $Q=4$

Hướng dẫn giải.

Ta có $Q=\log_a\left(a\sqrt{b}\right)-2\log_a\left(a.\sqrt[4]{b}\right)+3\log_b\left(b\right)$

$$=\log_a\left(a\sqrt{b}\right)-\log_a\left(a^2.\sqrt{b}\right)+3=\log_a\left(\frac{a\sqrt{b}}{a^2\sqrt{b}}\right)+3=\log_a\left(\frac{1}{a}\right)+3=-1+3=2$$

Câu 15: Cho phương trình $3.25^x-2.5^{x+1}+7=0$ và các phát biểu sau:

(1) $x=0$ là nghiệm **duy nhất** của phương trình

(2) Phương trình có nghiệm dương

(3) Cả 2 nghiệm của phương trình đều nhỏ hơn 1.

(4) Phương trình trên có tổng 2 nghiệm là: $-\log_5\left(\frac{3}{7}\right)$

Số phát biểu đúng là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn giải.

Phương trình $\Leftrightarrow 3.25^x-10.5^x+7=0$. Đặt $t=5^x\ (t>0)$

Phương trình có dạng: $3t^2-10t+7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{7}{3}\end{array}\right.$

(*) Với $t=1\Rightarrow 5^x=1\Leftrightarrow x=0$

(*) Với $t=\frac{7}{3}\Rightarrow 5^x=\frac{7}{3}\Leftrightarrow x=\log_5\left(\frac{7}{3}\right)$

Vậy phương trình có tập nghiệm: $S=\left\{0;\log_5\left(\frac{7}{3}\right)\right\}$

Câu 16: Nguyên hàm của $f(x)=\cos(5x-2)$ là:

A. $\frac{1}{5}\sin(5x-2)+C$ **B.** $5\sin(5x-2)+C$

C. $-\frac{1}{5}\sin(5x-2)+C$ **D.** $-5\sin(5x-2)+C$

Hướng dẫn giải.

$f(x)=\cos(5x-2)\Rightarrow$ Nguyên hàm $F(x)=\frac{1}{5}\sin(5x-2)+C$

Câu 17: Tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ bằng

A. 2 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 3

Hướng dẫn giải.

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\frac{4}{\sin^2 2x}dx$$

$$=-2\cot 2\text{x}\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}=-2\cot\frac{3\pi}{4}+2\cot\frac{\pi}{4}=2+2=4$$

Câu 18: Cho $I=\int\limits_0^1\left(\left|2x-1\right|-\left|x\right|\right)dx$. Giá trị của I là:

A. $I=0$ **B.** $I=1$ **C.** $I=2$ **D.** $I=3$

Hướng dẫn giải.

$$I=\int\limits_0^1\left(\left|2x-1\right|-\left|x\right|\right)dx$$

BXD x	0		$\frac{1}{2}$		1
2x − 1		-	0	+	
x		+	|	+	

$$\Rightarrow I=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(-2x+1-x\right)dx+\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\left(2x-1-x\right)dx$$

$$=\left(-\frac{3x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{-3}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=0$$

Câu 19: Thể tích của khối tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường

$y=\frac{4}{x-4},y=0,x=0,x=2$ quay một vòng quanh trục Ox là (theo đơn vị thể tích).

A. 2π (dvtt) **B.** 4π (dvtt) **C.** 6π (dvtt) **D.** 8π (dvtt)

Hướng dẫn giải.

Sử dụng Casio. Nhập vào máy $\pi\int\limits_0^2\frac{16}{\left(x-4\right)^2}dx=4\pi$. Chú ý có dấu trị tuyệt đối trong tích phân!

Câu 20: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi : $y=\sqrt{x},y=x-2,y=0$

A. 3 **B.** 10 **C.** $\frac{10}{3}$ **D.** $\frac{3}{10}$

Hướng dẫn giải.

Bước 1 : Chuyển sang x theo y : $y=\sqrt{x}, y=x-2, y=0 \Rightarrow x=y^3, x=y+2$

Lập phương trình ẩn y: $y^2=y+2 \Rightarrow y=2, y=-1$ (loại)

Bước 2: $S=\int_0^2 \left|y^2-y-2\right| dy=\int_0^2 -\left(y^2-y-2\right) dy=\frac{10}{3}$

Câu 21: Cho số phức z thỏa mãn $(1+i).z=14-2i$. Tính tổng phần thực và phần ảo của $\overline{z}$

A. -4 **B.** 14 **C.** 4 **D.** -14

Hướng dẫn giải.

Ta có: $(1+i).z=14-2i \Leftrightarrow z=\frac{14-2i}{1+i}=6-8i \Rightarrow \overline{z}=6+8i$

Vậy tổng phần thực và phần ảo của $\overline{z}=14$

Câu 22: Cho số phức z thỏa mãn $(1-3i)z+1+i=-z$. Môdun của số phức $\mathrm{w}=13z+2i$ có giá trị bằng:

A. -2 **B.** $\frac{\sqrt{26}}{13}$ **C.** $\sqrt{10}$ **D.** $-\frac{4}{13}$

Hướng dẫn giải.

Ta có: $(1-3i)z+1+i=5-z \Leftrightarrow (2-3i)z=-1-i \Leftrightarrow z=\frac{-1-i}{2-3i}=\frac{(-1-i)(2+3i)}{2^2+(-3)^2}$

$\Leftrightarrow z=\frac{-2-3i-2i-3i^2}{13}=\frac{1-5i}{13} \Rightarrow w=13z+2i=1-3i \Rightarrow |w|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

Câu 23: Cho số phức $z=(1-2i)(4-3i)-2+8i$. Cho các phát biểu sau:

(1). Modun của z là một số nguyên tố

(2). z có phần thực và phần ảo đều âm

(3). z là số thuần thực

(4). Số phức liên hợp của z có phần ảo là 3i.

Số phát biểu sai là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn giải.

Ta có: $z=(1-2i)(4-3i)-2+8i=-4-3i$. Phần thực: –4, phần ảo: –3

$\Rightarrow |z|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$. Ta soi lại các đáp án nhé !

Câu 24: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Cho tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|-2+i(z-1)|=5$. Phát biểu nào sau đây là sai:

A. Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(1;-2)$

B. Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn có bán kính $R=5$

C. Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn ć đường kính bằng 10

D. Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là một hình tròn.

Hướng dẫn giải.

Gọi $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$. Ta có: $|zi-(2+i)|=2 \Leftrightarrow |-y-2+(x-1)i|=5$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=25$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=5$

Câu 25: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z-2\overline{z}=3+4i$. Phát biểu nào sau đây là **sai:**

A. z có phần thực là -3

B. $\overline{z}+\frac{4}{3}i$ có modun là $\frac{\sqrt{97}}{3}$

C. z có phần ảo là $\frac{4}{3}$

D. z có modun là $\frac{\sqrt{97}}{3}$

Hướng dẫn giải.

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow \overline{z}=x-yi\Rightarrow -2\overline{z}=-2x+2yi$

$$x+yi-2x+2yi=3+4i\Leftrightarrow -x+3yi=3+4i\Leftrightarrow \begin{cases}-x=3\\3y=4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\y=\frac{4}{3}\end{cases}$$

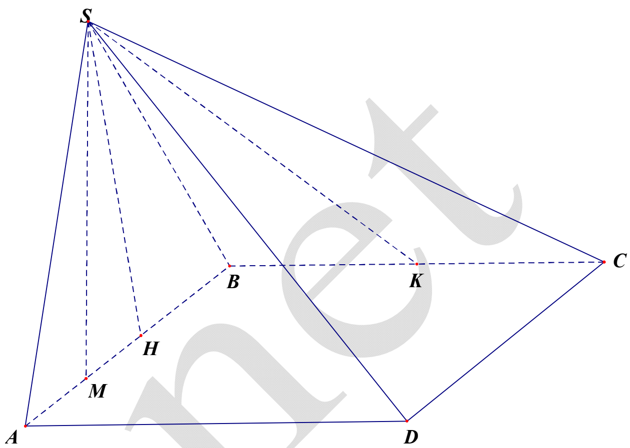
Vậy $z=-3+\frac{4}{3}i\Rightarrow |z|=\sqrt{(-3)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{97}{9}}=\frac{\sqrt{97}}{3}$

Câu 26: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a với $SA=\frac{a}{2}, SB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $BAD=60^0$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, BC. Thể tích tứ diện K.SDC có giá trị là:

A. $V=\frac{a^3}{4}$ **B.** $V=\frac{a^3}{16}$ **C.** $V=\frac{a^3}{8}$ **D.** $V=\frac{a^3}{32}$

Hướng dẫn giải.

Từ giả thiết ta có $AB=a, SA=\frac{a}{2}, SB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$



Nên ΔASB vuông tại $S \Rightarrow SH=\frac{AB}{2} \Rightarrow \Delta SAH$ đều

Gọi M là trung điểm của AH thì $SM \perp AB$

Do $(SAB)\perp(ABCD) \Rightarrow SM \perp (ABCD)$

Vậy $V_{KSDC}=V_{S.KCD}=\frac{1}{3}.SM.S_{\Delta KCD}=\frac{1}{3}.SM.\frac{1}{2}S_{\Delta BAD}$

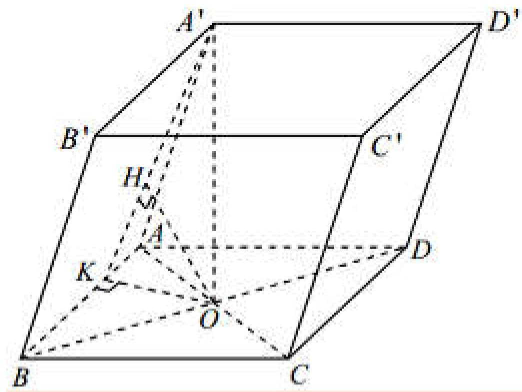
$=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{1}{2}.\frac{a.a\sqrt{3}}{2.2}=\frac{a^3}{32}$ (đvtt)

Câu 27: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $BCD=120^0$ và $AA'=\frac{7a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng ABCD trùng với giao điểm của AC và BD. Tính theo a thể tích khối chóp ABCD.A'B'C'D'.

A. $V=12a^3$ **B.** $V=3a^3$ **C.** $V=9a^3$ **D.** $V=6a^3$

Hướng dẫn giải.

Gọi $O=AC\cap BD$



Từ giả thuyết suy ra $A'O\perp(ABCD)$

$S_{ABCD}=BC.CD.\sin 120^0=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Vì $\widehat{BCD}=120^0$ nên $\widehat{ABC}=60^0 \Rightarrow \Delta ABC$ đều

$\Rightarrow AC=a \Rightarrow A'O=\sqrt{A'A^2-AO^2}=\sqrt{\frac{49a^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=2\sqrt{3}a$

Suy ra $V_{ABCD.A'B'C'D'}=3a^3$

Câu 28: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh bằng a, góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình chiếu H của điểm A lên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ thuộc đường thẳng B_1C_1. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA_1 và BC_1 theo a là:

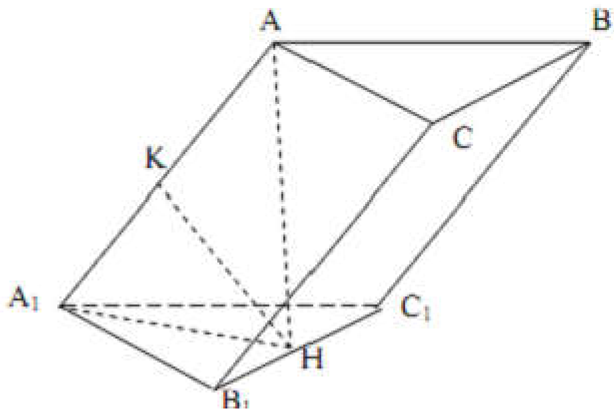
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ **D.** $\frac{4a}{\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải.

Do $AH \perp (A_1B_1C_1)$ nên góc AA_1H là góc giữa AA_1 và $(A_1B_1C_1)$ theo giả thiết thì góc AA_1H bằng 30^0.

Xét tam giác vuông AHA_1 có $AA_1 = a, AA_1H = 30^0 \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$

Xét AHA_1 có $AA_1 = a$ góc $AA_1H = 30^0 \Rightarrow A_1H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



Do $A_1B_1C_1$ đều cạnh a, H thuộc B_1C_1 và $A_1H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra A_1H vuông góc B_1C_1.

$AH \perp B_1C_1$ nên $B_1C_1 \perp (AA_1H)$

HK chính là khoảng cách giữa AA_1 và B_1C_1 . Ta có

$$AA_1.HK = A_1H.AH \Rightarrow HK = \frac{A_1H.AH}{AA_1} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Câu 29: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh bằng a, góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Biết hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) trùng với trung điểm cạnh BC. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện A'.ABC

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{9}$ **B.** $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Hướng dẫn giải.

Tìm bán kính mặt cầu : Ngoại tiếp tứ diện $A'.ABC$

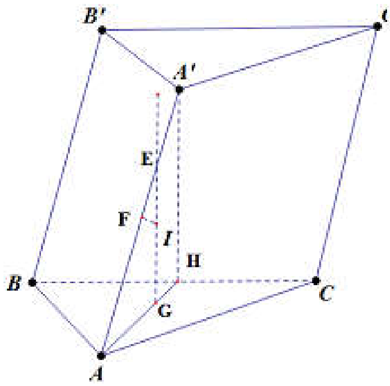
* Gọi G là tâm của tam giác ABC, qua G kẻ đường thẳng $d \parallel A'H$ cắt AA' tại E.

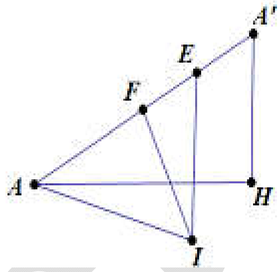
* Gọi F là trung điểm AA', trong mặt phẳng (AA'H) kẻ đường thẳng trung trực của AA' cắt (d) tại I => I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện A'ABC và bán kính $R = IA$

Ta có: Góc AEI bằng 60^0, $EF = \frac{1}{6}AA' = \frac{a}{6}$

$$IF = EF.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R = \sqrt{AF^2 + FI^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$





Câu 30: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $(SAB) \perp (ABCD)$. H là trung điểm của AB, $SH = HC, SA = AB$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD). Giá trị của $\tan\alpha$ là:

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** $\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải.

Ta có $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$

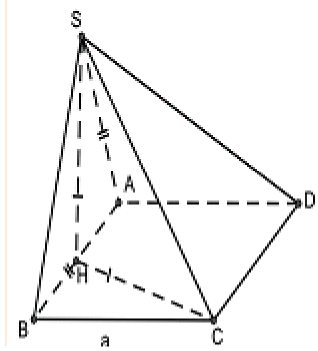
$SA = AB = a$

$SH = HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Có $SA^2 + AH^2 = \frac{5a^2}{4} = AH^2 \Rightarrow \Delta SAH \Rightarrow SA \perp AB \Rightarrow SA \perp (ABCD)$ và

$AC = hc(SC;(ABCD))$

Ta có: $(SC;(ABCD)) = SCA, \tan SCA = \frac{1}{\sqrt{2}}$



Câu 31: Đội tuyển học sinh giỏi của thầy Quang gồm 18 em, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 học sinh trong đội đi thi quốc gia sao cho mỗi khối có ít nhất một em được chọn:

A. 48118 **B.** 41181 **C.** 41811 **D.** 41818

Hướng dẫn giải.

Số cách chọn 8 học sinh từ 18 học sinh của đội tuyển là: $C_{18}^8 = 43758$ cách

- Số cách chọn 8 học sinh khối 12 và 11 là C_{13}^8

- Số cách chọn 8 học sinh khối 11 và 10 là C_{11}^{8}
- Số cách chọn 8 học sinh khối 12 và 10 là C_{12}^{8}

Suy ra số cách chọn theo yêu cầu bài toán là: $43758 - C_{13}^{8} - C_{11}^{8} - C_{12}^{8} = 41811$ cách

Câu 32: Hưng và Hoàng cùng tham gia kì thi THPT Quốc gia, trong đó có hai môn trắc nghiệm là Vật lí và Hóa học. Đề thi của mỗi môn gồm 6 mã khác nhau và các môn khác nhau có mã khác nhau. Đề thi được sắp xếp và phát cho thí sinh một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất để trong hai môn thi đó Hưng và Hoàng có chung đúng một mã đề thi.

A. $\frac{1}{9}$ **B.** $\frac{1}{18}$ **C.** $\frac{5}{18}$ **D.** $\frac{5}{36}$

Hướng dẫn giải.

- Số cách nhận mã đề hai môn Hưng là 6.6 = 36
- Số cách nhận mã đề hai môn Hoàng là 6.6 = 36

Số phần tử của không gian mẫu $|\Omega| = 36.36 = 1296$

Gọi A là biến cố"Hưng và Hoàng có chung đúng một mã đề thi"

- Khả năng 1: có cùng mã đề Vật lí

Điệp có 6.6 cách nhận mã đề hai môn, khi đó Hoàng có 1.5 cách nhận mã đề

Do đó có 36.5=180 cách

- Khả năng 2: Tương tự có cùng mã đề Hóa học có 180 cách

$\Rightarrow |\Omega_A| = 360$. Vậy $P(A) = \frac{360}{1296} = \frac{5}{18}$

Câu 33: Hệ số của x^{10} trong khai triển của biểu thức: $\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^5$

A. -162 **B.** -810 **C.** 810 **D.** 162

Hướng dẫn giải.

Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển của biểu thức: $\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^5$

$$\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k \left(3x^3\right)^{5-k} . \left(-\frac{2}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{5} C_5^k (-1)^k 3^{5-k} . 2^k . x^{15-5k}$$

Hệ số của của số hạng chứa x^{10} là $C_5^k (-1)^k 3^{5-k} 2^k$, với $15 - 5k = 10 \Leftrightarrow k = 1$

Vậy hệ số của x^{10} là: $C_5^1 (-1)^1 3^4 2^1 = -810$

Câu 34: Số nguyên n thỏa mãn biểu thức $A_n^2 - 3C_n^2 = 15 - 5n$ là:

A. 5 **B.** 6 **C.** A và B **D.** Không có giá trị thỏa mãn

Hướng dẫn giải.

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$A_n^2 - 3C_n^2 = 15 - 5n \Leftrightarrow n(n-1) - \frac{3.n!}{2!(n-1)!} = 15 - 5n$

$\Leftrightarrow n^2 - 11n + 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 5 \\ n = 6 \end{array}\right.$

Vậy có 2 đáp án thỏa mãn là A và B. Suy ra đáp án C.

Câu 35: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d đi qua hai điểm $M(0;-1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;0)$; điểm $A(-1;2;3)$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a;b;c)\left(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0\right)$

A. $a = 2b$ **B.** $a = -3b$ **C.** $a = 3b$ **D.** $a = -2b$

Hướng dẫn giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;-1;1)$ và có vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;0)$

Gọi $\vec{n} = (a;b;c)\left(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0\right)$ là vectơ pháp tuyến của (P).

Do (P) chứa d nên $\vec{u}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow a + 2b = 0 \Leftrightarrow a = -2b$

Câu 36: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) vuông góc với (P) và cách điểm $M(1;2;-1)$ một khoảng bằng $\sqrt{2}$ có dạng: $Ax + By + Cz = 0 \left(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\right)$

A. $B = 0$ hay $3B + 8C = 0$ **B.** $B = 0$ hay $8B + 3C = 0$

C. $B = 0$ hay $3B - 8C = 0$ **D.** $B = 0$ hay $3B - 8C = 0$

Hướng dẫn giải.

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ d(M;(Q)) = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \\ \dfrac{|A + 2B - C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \sqrt{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} A = -B - C \\ \dfrac{|B-2C|}{\sqrt{2B^2+2C^2+2BC}} = \sqrt{2}\,(*) \end{cases}$$

$(*) \Leftrightarrow B = 0$ hoặc $3B + 8C = 0$

Câu 37: Trong không gian Oxyz cho 3 điểm $M(3;1;1), \mathrm{N}(4;8;-3), P(2;9;-7)$ và mặt phẳng $(Q): x + 2y - z - 6 = 0$. Đường thẳng d đi qua G, vuông góc với (Q). Tìm giao điểm A của mặt phẳng (Q) và đường thẳng d. Biết G là trọng tâm của tam giác MNP.

A. $A(1;2;1)$ **B.** $A(1;-2;-1)$ **C.** $A(-1;-2;-1)$ **D.** $A(1;2;-1)$

Hướng dẫn giải.

- Tam giác MNP có trọng tâm $G(3;6;-3)$
- Đường thẳng d qua G, vuông góc với $(Q): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 6 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$
- Đường thẳng d cắt (Q) tại $A: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 6 + 2t \\ z = -3 - t \\ x + 2y - z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;2;-1)$

Câu 38: Trong không gian Oxyz, cho hình thoi ABCD với điểm $A(-1;2;1), B(2;3;2)$. Tâm I của hình thoi thuộc đường thẳng $(d): \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$. Tọa độ của đỉnh D là:

A. $D(-2;-1;0)$ **B.** $D(0;1;2)$ **C.** $D(0;-1;-2)$ **D.** $D(2;1;0)$

Hướng dẫn giải.

Gọi $I(-1-t;-t+2;2+t) \in d$. Ta có $\overrightarrow{IA} = (t;t+2;-t-1), \overrightarrow{IB} = (t+3;\mathrm{t}+3;-\mathrm{t})$

Do ABCD là hình thoi nên $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 9t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1; t = -2$

Do C đối xứng với A qua I và D đối xứng với B qua I nên

- $t = -1 \Rightarrow I(0;1;1) \Rightarrow C(1;0;1), D(-2;-1;0)$
- $t = -2 \Rightarrow I(1;2;0) \Rightarrow C(3;2;-1), D(0;1;-2)$

Câu 39: Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(1;4;2), B(-1;2;4)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. Điểm M trên Δ sao cho: $MA^2 + MB^2 = 28$ là:

A. $M(-1;0;4)$ **B.** $M(1;0;4)$ **C.** $M(-1;0;-4)$ **D.** $M(1;0;-4)$

Hướng dẫn giải.

Phương trình tham số đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1-t \\ y = -2+t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow M(1-t;-2+t;2t)$

Ta có: $MA^2 + MB^2 = 28 \Leftrightarrow 12t^2 - 48t + 48 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Từ đó suy ra: $M(-1;0;4)$

Câu 40: Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác MNP với $M(1;-1), N(3;1), P(5;-5)$. Tọa độ tâm I đường thẳng ngoại tiếp tam giác MNP là:

A. $I(4;2)$ **B.** $I(-4;2)$ **C.** $I(4;-4)$ **D.** $I(4;-2)$

Hướng dẫn giải.

$I(x;y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMNP

$$\Leftrightarrow \begin{cases} MI^2 = NI^2 \\ MI^2 = PI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-5)^2 + (y+5)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow I(4;-2)$$

Câu 41: Trong mặt phẳng Oxy cho đường $(C_m): x^2 + y^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$. Với các giátrị nào của m sau đây thì (C_m) là một đường tròn ?

A. $1 < m < 2$ **B.** $m < 1$ và $m > 2$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = 2$

Hướng dẫn giải.

$(C_m): x^2 + y^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$

$\Rightarrow a = m+2; b = -2m; c = 19m - 6$

Để (C_m) là đường tròn $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c > 0$

$\Leftrightarrow (m+2)^2 + 4m^2 - 19m + 6 > 0$

$\Rightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow m < 1 \vee m > 2$

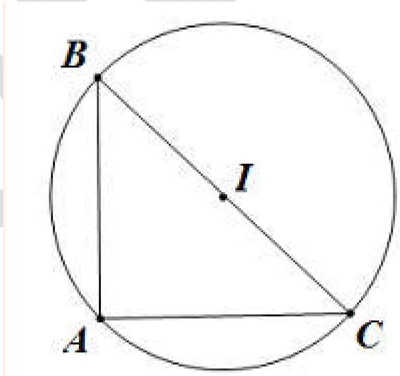
Câu 42: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại $A(3;2)$ có tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(2;-1)$ và điểm B nằm trên đường thẳng $d: x - y - 7 = 0$. Tọa độ đỉnh $C(a;b)$. Giá trị của $S = 2a + 3b$ là:

A. $S = -8$ **B.** $S = 28$ **C.** $S = 18$ **D.** $S = 8$

Hướng dẫn giải.

Ta có: $\overrightarrow{IA} = (1;3) \Rightarrow IA = \sqrt{10}$

Giả sử $\cos HPN = \left|\cos\left(\vec{u}, \overrightarrow{PH}\right)\right| \Leftrightarrow \dfrac{|-4a + 3b|}{5\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{3}{5}$



I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC $\Rightarrow IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2$

$\Leftrightarrow 10 = 2b^2 - 16b + 40 \Leftrightarrow b^2 - 8b + 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 5 \Rightarrow B(5;-2) \\ b = 3 \Rightarrow B(3;4) \end{array}\right.$

Do tam giác ABC vuông tại A $\Rightarrow I(2;-1)$ là trung điểm của BC

(*) Với $B(5;-2) \Rightarrow C(-1;0)$

(*) Với $B(3;-4) \Rightarrow C(1;2)$

Vậy tọa độ đỉnh B, C là: $B(5;2), C(-1;0)$ và $B(3;-4), C(1;2)$. Chỉ có đáp án D thỏa mãn.

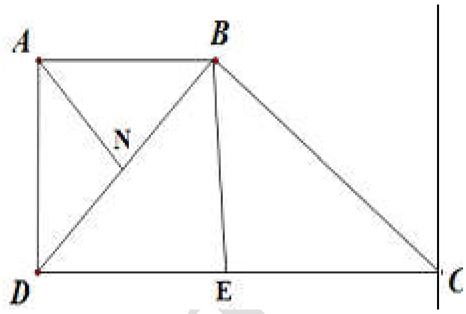
Câu 43: Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Biết $AB = AD = 2; CD = 4$, phương trình BD là $x - y = 0$, C thuộc đường thẳng $x - 4y - 1 = 0$. Tọa độ của $A(a;b)$ biết điểm C có hoành độ dương. Tính $S = a - b$

A. $S = 3$ **B.** $S = 1$ **C.** $S = 2$ **D.** $S = 6$

Hướng dẫn giải.

Từ giả thiết chứng minh được DB vuông góc với BC và suy ra $CB = 2\sqrt{2} = d\left[C,(BD)\right]$

$$C(4c+1;c) \Rightarrow \frac{|4c + 1 - c|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |3c+1| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3c + 1 = 4 \\ 3c + 1 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 1 \\ c = -\frac{5}{3}(L) \end{array}\right. \Rightarrow C(5;1)$$



B là hình chiếu của C lên đường thẳng $BD \Rightarrow B(3;3)$

Mà $AB = 2$ nên A thuộc đường tròn có PT $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4(1)$

Tam giác ABD vuông cân tại A

=> Góc $ABD = 45^0 \Rightarrow PT$ của AB là $x = 3$ hoặc $y = 3$

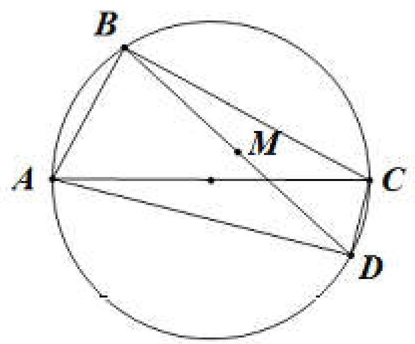
* Với $x = 3$ thế vào (1) giải ra $y = 1$ hoặc $y = 5 \Rightarrow A(3;1)$ thử lại không thỏa; $A(3;5)$ **thỏa**

* Với $y = 3$ thế vào (1) giải ra $x = 1$ hoặc $x = 5 \Rightarrow A(1;3)$ thử lại thỏa; $A(5;3)$ **không thỏa**

Câu 44: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AC. Biết $M(3;-1)$ là trung điểm của cạnh BD, điểm C có tọa độ $C(4;-2)$. Điểm $N(-1;-3)$ nằm trên đường thẳng đi qua B và vuông góc với AD. Đường thẳng AD đi qua $P(1;3)$. Phương trình $AB: ax - y + b = 0$. Giá trị của biểu thức $S = a + 2b$ là:

A. $S = -5$ **B.** $S = -4$ **C.** $S = -6$ **D.** $S = -3$

Hướng dẫn giải.



Giả sử $D(a;b)$. Vì M là trung điểm của BD nên $B(6-a;2-b)$

$AD \perp DC \Rightarrow BN//CD \Rightarrow \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CD}$ cùng phương

$\overrightarrow{BN} = (a-7;b-1), \overrightarrow{CD} = (a-4;b+2)$

$\Rightarrow (a-7)(b+2) = (a-4)(b-1) \Leftrightarrow b = a-6\ (1)$

$\overrightarrow{PD} = (a-1;b-3), \overrightarrow{CD} = (a-4;b+2)$

$\overrightarrow{PD} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow (a-1)(a-4) + (b-3)(b+2) = 0(2)$

Thế (1) vào (2) ta được $2a^2 - 18a + 40 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a = 4 \end{array}\right.$

- Với $a = 4 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow D(4;-2)$ loại vì D trùng C.
- Với $a = 5 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow D(5;-1)$ và $B(1;-1)$

Đường thẳng AD qua $P(1;3), D(5;-1) \Rightarrow AD: x + y - 4 = 0$

$AB \perp BC$ và đi qua $B(1;-1) \Rightarrow AB: 3x - y - 4 = 0 \Rightarrow S = a + 2b = 3 - 8 = -5 \Rightarrow A$

Câu 45: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A, biết rằng cạnh huyền nằm trên đường thẳng $x+7y-31=0$. Điểm $N(7;7)$ thuộc đường thẳng AC, điểm $M(2;-3)$ thuộc đường thẳng AB. $A(a;b), B(c;d), C(e;f)$

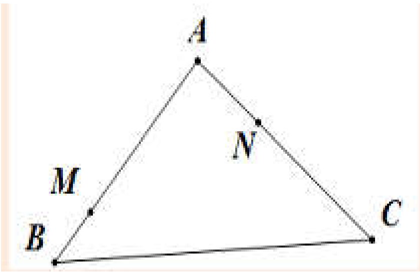
Cho các mệnh đề sau:

$(I)\, a+b+c=-2$ $(II)\, d-f=1$ $(III)\, a=c+e$ $(IV)\, b+d=5$

Số mệnh đề **đúng** là:

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

Hướng dẫn giải.



- Đường thẳng AB có phương trình $a(x-2)+b(y+3)=0\left(a^2+b^2>0\right)$

  Do góc ABC bằng 45^0 nên ta có:

  $$\cos 45^0=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|a+7b|}{\sqrt{50}.\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow 12a^2-7ab-12b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3a=4b\\4a=-3b\end{array}\right.$$

- Với $3a=4b$, ta chọn $a=4$ suy ra $b=3$. Vì AC vuông AB nên $AC: 3x-4y+7=0$

  $\Rightarrow A(-1;1) \Rightarrow B(-4;5) \Rightarrow C(3;4)$

- Với $4a=-3b$, ta chọn $a=3; b=-4$, loại do hệ số góc dương

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $A(-1;1), B(-4;5), C(3;4)$

Câu 46: Cho hình thoi ABCD có $BAC=60^0$ và E là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi F là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Cho tam giác AEF có điện tích là $S=30\sqrt{3}$, điểm A thuộc đường thẳng $d: 3x-y+8=0$ có $G(0;2)$ là trực tâm. Phương trình $EF: ax-3y+b=0$.

Biết A có tung độ nguyên dương. Giá trị của biểu thức $S=\frac{a}{b}$

A. $S=\frac{1}{4}$ **B.** $S=\frac{1}{3}$ **C.** $S=-\frac{1}{4}$ **D.** $S=-\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải.

Ta có: $\begin{cases} FBA = 180^0 - ABC = 60^0 \\ ABE = 60^0 \end{cases} \Rightarrow AB$ là phân giác của FBE. Do $FA \perp BF, AE \perp BE$

Nên $AF = AE \to \Delta AEF$ cân tại A. Lại có: $FAE = BAE + FAB = 60^0 \to \Delta AEF$ đều

Xét tam giác AEF: $S = 30\sqrt{3}$ nên độ dài cạnh tam giác đều: $a = 2\sqrt{30}; R = 2\sqrt{10}$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF : $x^2 + (y-2)^2 = 40$

A là giao của đường tròn và đường thẳng $3x - y + 8 = 0 \Rightarrow A(-2;8)$

Phương trình EF , đi qua M là trung điểm của EF , điểm M được tìm từ tỉ lệ vecto :

$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \Rightarrow M(1;-1)$. Phương trình EF khi đó: $x - 3y - 4 = 0 \Rightarrow S = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{-4}$

Câu 47: Cho phương trình $2\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} = 3x - 3$ có nghiệm vô tỉ $x = \dfrac{a+3\sqrt{b}}{8}$. Tính tổng $S = a + b$

A. 20 **B.** 26 **C.** 42 **D.** 24

Hướng dẫn giải.

Điều kiện: $x \geq 1$

Phương trình đã cho tương đương

$$2\sqrt{x-1} + \sqrt{(x-1)(x+1)} = 3(x-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ 2 + \sqrt{x+1} = 3\sqrt{x-1}\,(*) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) tương đương

$$4 + 4\sqrt{x+1} + x + 1 = 9(x-1) \Leftrightarrow 4\sqrt{x+1} = 8x - 14$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{11}{8} \\ 4(x+1) = (8x-11)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{7}{4} \\ 16(x+1) = (8x-14)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{7}{4} \\ x \in \left\{\dfrac{15+3\sqrt{5}}{8}; \dfrac{15-3\sqrt{5}}{8}\right\} \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{15+3\sqrt{5}}{8}$$

Từ đó suy ra: $\begin{cases} a = 15 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow S = a + b = 20$

Câu 48: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y \\ 3y\left(2 + \sqrt{9x^2+3}\right) + (4y+2)\left(\sqrt{1+x+x^2} + 1\right) = 0 \end{cases}$. Với x, y là nghiệm của hệ phương trình trên. Tính giá trị biểu thức $5x - 10y$:

A. -1 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 5

Hướng dẫn giải.

Phương trình $(1) \Leftrightarrow (x-y)(x^2-y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=x^2+1 \end{array}\right.$

* Thế vào PT (2) ta được: $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow (2x+1)\left(\sqrt{(2x+1)^2+3}+2\right)=(-3x)\left(2+\sqrt{(-3x)^2+3}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x)$$

Xét $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+2\right)$ có $f'(t)>0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra f(t) là hàm số đồng biến nên: $2x+1=-3x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{5} \Rightarrow y=-\frac{1}{5}$

Đến đây coi như ta đã tìm được đáp án ! Nhưng ta cũng nên xét đến trường hợp còn lại.

* Trường hợp $y=x^2+1$ thế vào phương trình (2) ta được :

$$3(x^2+1)\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x^2+1+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$$

Vế trái luôn dương => phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $\left(-\frac{1}{5};-\frac{1}{5}\right)$

Từ đó suy ra $S=5a-10b=-1+2=1$

Câu 49: Số giá trị **nguyên** của m để phương trình $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=m\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}\right)$ có nghiệm là:

A. 10 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13

Hướng dẫn giải.

Điều kiện: $x \in [0;4]$. Khi đó phương trình tương đương với:

$$\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\right)=m$$

Xét hàm số $f(x)=\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\right)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$

Ta xét riêng như sau:

$$g_1(x)=x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\Rightarrow g_1'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}+\frac{1}{2\sqrt{x+12}}>0$$

Suy ra hàm số $g_1(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;4]$

$$g_2(x)=\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\Rightarrow g_2'(x)=\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}}{2\sqrt{5-x}\sqrt{4-x}}$$

Với $x\in[0;4]\Rightarrow\sqrt{5-x}>\sqrt{4-x}\Rightarrow g_2'(x)=\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}}{2\sqrt{5-x}\sqrt{4-x}}>0$

Suy ra hàm số $g_2(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;4]$

Từ đó suy ra $f(x)=g_1(x).g_2(x)$ luôn đồng biến trên đoạn $[0;4]$

Suy ra phương trình có nghiệm khi chỉ khi $f(0)\le m\le f(4)\Rightarrow 2\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-2\right)\le m\le 12$

Từ đó suy ra **có 12 giá trị nguyên** của m thỏa mãn

Câu 50: Cho a, b, c là các số thực

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{3(b+c)}{2a}+\dfrac{4a+3c}{3b}+\dfrac{12(b-c)}{2a+3c}$ là:

A. $\dfrac{2}{3}$ **B.** 5 **C.** $\dfrac{2}{5}$ **D.** $\dfrac{3}{2}$

Hướng dẫn giải.

Ta có: $P+11=2+\dfrac{3(b+c)}{2a}+1+\dfrac{4a+3c}{3b}+\dfrac{12(b-c)}{2a+3c}=(4a+3b+3c)\left(\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{3b}+\dfrac{4}{2a+3c}\right)$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$P+11\ge(4a+3b+3c)\frac{16}{4a+3b+3c}=16\Rightarrow P\ge 15$$

Đẳng thức xảy ra khi $b=c=\dfrac{2}{3}a$