ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A. LÝ THUYẾT:

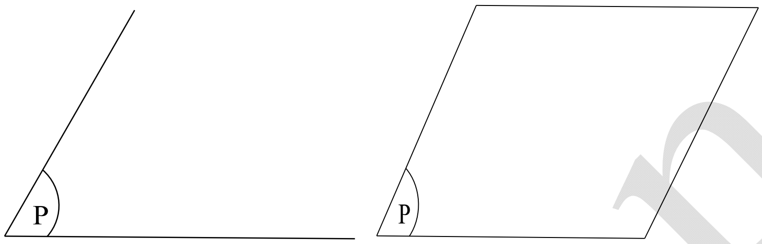
I. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1. Mặt phẳng

Mặt bảng, mặt bàn, mặt nước hồ yên lặng cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.

Để kí hiệu mặt phẳng, ta thường dùng các chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hy Lạp đặt trong dấu ngoặc (). Ví dụ như mặt phẳng $(P),(Q),(\alpha),(\beta)$ …

Để biểu diễn mặt phẳng, ta thường dùng hình bình hành hoặc một miền góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn.



Đường thẳng và mặt phẳng là tập hợp các điểm. Do đó,

- Nếu điểm A thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $A \in a$ và đôi khi còn nói rằng đường thẳng a đi qua điểm A.
- Nếu điểm A thuộc mặt phẳng (α), ta kí hiệu $A \in (\alpha)$ và đôi khi còn nói rằng mặt phẳng (α) đi qua điểm A.
- Nếu đường thẳng a chứa trong mặt phẳng (α), ta kí hiệu $a \subset (\alpha)$ và đôi khi còn nói rằng mặt phẳng (α) đi qua (hoặc chứa) đường thẳng a.

2. Quy tắc để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian

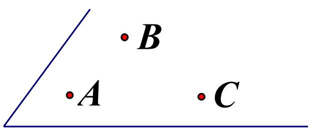
- Hình biểu diễn của một đường thẳng là một đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau. Hai đoạn thẳng song song và bằng nhau thì phải được vẽ song song và bằng nhau. Trung điểm của một đoạn thẳng phải được lấy ngay tại điểm chính giữa của đoạn thẳng đó.
- Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.
- Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy và nét đứt đoạn biểu diễn cho đường bị che khuất.

3. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

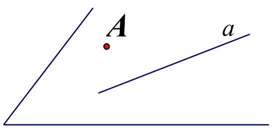
- Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.
- Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Như vậy, một mặt phẳng trong không gian có thể được xác định bởi một trong các cách thức sau:

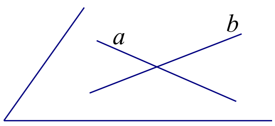
- Mặt phẳng đó đi qua 3 điểm không thẳng hàng A,B,C. Kí hiệu là mp(ABC).
- Mặt phẳng đó đi qua một đường thẳng a và một điểm A không thuộc đường thẳng a. Kí hiệu: ; mp(A,a).



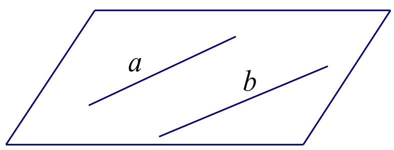
mp(ABC)



mp(A;a)



mp(a,b)

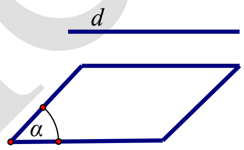


- Mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng cắt nhau a và b . Kí hiệu, mp(a,b).
- Mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng song song a ,b .
- Tính chất 3: Trong không gian có ít nhất bốn điểm không cùng thuộc bất cứ mặt phẳng nào.
- Tính chất 4: Trong không gian, hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.
- Tính chất 5: Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
- Tính chất 6: Trong mỗi mặt phẳng của không gian, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

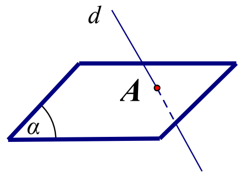
3.Vị trí tương đối của các đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

a) Vị trí tương đối của một đường thẳng và một mặt phẳng

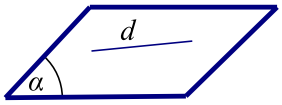
Cho đường thẳng d và một mặt phẳng (α). Có thể xãy ra các khả năng sau:



- Đường thẳng d và mặt phẳng (α) không có điểm chung. Trong trường hợp này ta nói đường thẳng d song song với mặt phẳng (α), kí hiệu $d//(\alpha)$.



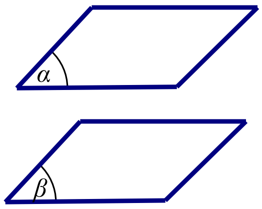
- Đường thẳng d và mặt phẳng (α) có đúng một điểm chung. Trong trường hợp này ta nói ta nói đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) tại A, kí hiệu: $d\cap(\alpha)=\{A\}$



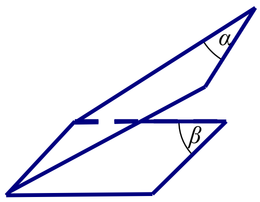
- Đường thẳng d và mặt phẳng (α) có nhiều hơn một điểm chung.Trường hợp này ta nói đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α) ta kí hiệu: $d\subset(\alpha)$ hay $(\alpha)\supset d$.

b) Vị trí tương đối của hai mặt phẳng:

Cho hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) . Có thể xảy ra một trong các khả năng sau:



- Hai mặt phẳng (α) và (β) không có điểm chung. Trong trường hợp này ta nói các mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, kí hiệu $(\alpha)//(\beta)$.

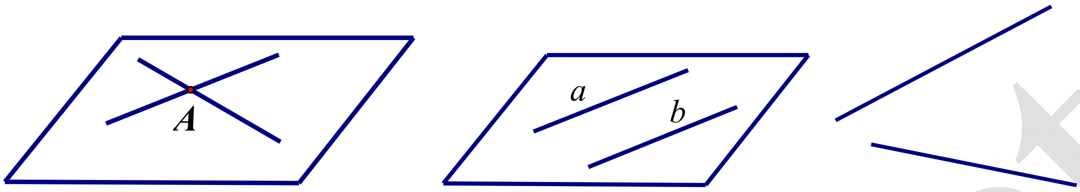


- Hai mặt phẳng (α) và (β) có ít nhất một điểm chung. Trong trường hợp này ta nói các mặt phẳng (α) và (β) có phần chung là một đường thẳng, giả sử đường thẳng đó là d , ta kí hiệu $(\alpha)\cap(\beta)=d$.

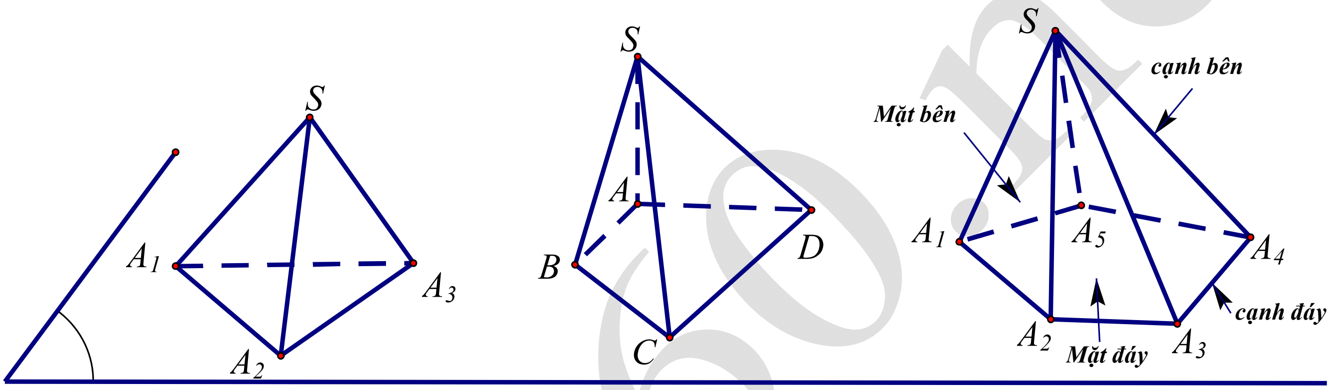
Đường thẳng d được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng. Như vậy, việc xác định giao tuyến của hai mặt phẳng tương ứng với việc xác định hai điểm cùng thuộc đồng thời hai mặt phẳng phân biệt đó. Ngoài ra, nếu biết được rằng ba điểm phân biệt cùng thuộc đồng thời hai mặt phẳng thì ba điểm đó phải nằm trên một được thẳng.

c) Vị trí tương đối của hai đương thẳng: Cho hai đường thẳng phân biệt a và b . Có thể xảy ra một trong các khả năng sau:

- Các đường thẳng a và b cùng thuộc một mặt phẳng. Khi đó a và b hoặc cắt nhau tại một điểm hoạc song song với nhau.
- Các đương thẳng a và b không cùng nằm trong bất kì một mặt phẳng nào. Trong trường hợp này ta nói các đường thẳng a và b chéo nhau.



4. Hình chóp và hình tứ diện



1. Hình chóp:

Trong mặt phẳng (α), cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ .Lấy điểm S nằrm ngoài mặt phẳng(α). Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ để được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ .Hình gồm đa giác $A_1, A_2, ..., A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ và gọi là hình chóp và được kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$

Ta gọi S là đỉnh, đa giác $A_1, A_2, ..., A_n$ là mặt đáy, tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ gọi là một mặt bên của hình chóp, Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ gọi là các cạnh bên, các cạnh của đa giác $A_1A_2...A_n$ là các cạnh đáy của hình chóp.

-Cách gọi tên: Hình chóp + tên đa giác.

- Ví dụ: hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác….

Lưu ý: Hình chóp có đáy là đa giác đều, các cạnh bên bằng nhaulaf hình chóp đa giác đều.

b) tứ diện:

Tứ diện $ABCD$ là hình được thành lập từ bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D .Các điểm A, B, C, D là các đỉnh của tứ diện, các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC được gọi là các mặt của tứ diện đối diện với các đỉnh A, B, C, D và các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các cạnh của tứ diện . Trong đó các cặp cạnh AB và CD, AC và DB, AD và BC thường được gọi là các cặp cạnh đối của tứ diện.

B. CÁC DẠNG BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Phương pháp: Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) ta tiến hành đi tìm hai điểm thuộc cả hai mặt phẳng (α) và (β) .

Lưu ý:

Một điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) thường tìm được bằng cách: Chọn một mặt phẳng (γ) sao cho các giao tuyến Δ_1, Δ_2 của (α) và (β) với (γ) có thể dựng được ngay. Giao điểm I của Δ_1, Δ_2 (trong (γ)) là điểm chung cần tìm.

Ta thường chứng minh ba điểm thẳng hàng bằng cách chứng minh ba điểm đó thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng.

+ Ta cũng có thể chứng minh bà đường thẳng đồng quy bằng cách:

Cách 1: Hai trong ba đường thẳng ấy cắt nhau và lần lượt nằm trong hai mặt phẳng nhận đường thứ ba làm giao tuyến.

Cách 2: Tìm một đoạn thẳng AB trên một đường thẳng nào đó. Chứng minh hai đường thẳng còn lại chia đoạn AB theo cùng một tỉ số đại số.

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG Δ VÀ MẶT PHẲNG (α) .

Phương pháp:

+ Nếu phát hiện ra một đường thẳng d trong mặt phẳng (α) cắt Δ tại I thì I chính là giao điểm của Δ với mặt phẳng (α) .

+ Nếu chưa phát hiện ra đường thẳng d thì ta dựng d bằng cách: Chọn một mặt phẳng (γ) chứa Δ sao cho giao tuyến của (γ) và (α) có thể dựng được ngay, giao tuyến đó chính là đường thẳng d cần tìm.

Hai định lí quan trọng thường dùng:

Định lí Ceva: Cho tam giác ABC . Các điểm M, N, P khác A, B, C và theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB . Khi đó các đường thẳng AM, BN, CP hoặc đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1$

Định lí Menelaus : Cho tam giác ABC . Các điểm M, N, P khác A, B, C và theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB . Khi đó các điểm M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

DẠNG 3: BÀI TOÁN DỰNG THIẾT DIỆN

Cho trước khối đa diện T và mặt phẳng (α) . Nếu (α) có điểm chung với T thì (α) sẽ cắt một số mặt của T theo các đoạn thẳng. Phần mặt phẳng (α) giới hạn bởi các đoạn đó thường là một đa giác, gọi là mặt cắt (còn gọi là thiết diện) giữa T và (α).

Chú ý:

+ Đỉnh của thiết diện là giao điểm của (α) với các cạnh của T . Cạnh của thiết diện là các đoạn giao tuyến của (α) với các mặt của T . Do đó thực chất của việc dựng thiết diện là bài toán dựng giao điểm giữa đường thẳng và mặt phẳng và dựng giao tuyến giữa hai mặt phẳng.

+ Do mỗi cạnh của thiết diện là đoạn giao tuyến của mặt phẳng (α) với một mặt của T. Do đó số cạnh nhiều nhất mà thiết diện có thể có chính là số mặt của T.
- Đối với hình chóp tam giác (hoặc tứ diện), thiết diện của nó cắt bởi mặt phẳng (α) chỉ có thể là tam giác hoặc tứ giác (ở đay ta quy ước không xét các trường hợp suy biến khi thiết diện là một mặt hoặc một cạnh của hình chóp).
-Đối với hình chóp tứ giác, thiết diện của nó chỉ có thể là tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác.

Các bài toán liên quan đến thiết diện gồm các dạng:

+ Dựng thiết diện.
+ Xác định hình dạng thiết diện.
+ tính diện tích thiết diện.
+ Tính tỉ số thể tích hai phần do thiết diện phân chia khối thể tích đã cho (sẽ được trình bày trong Công phá toán tập 3).

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Gọi (P) là mặt phẳng qua 3 điểm M,N,B.

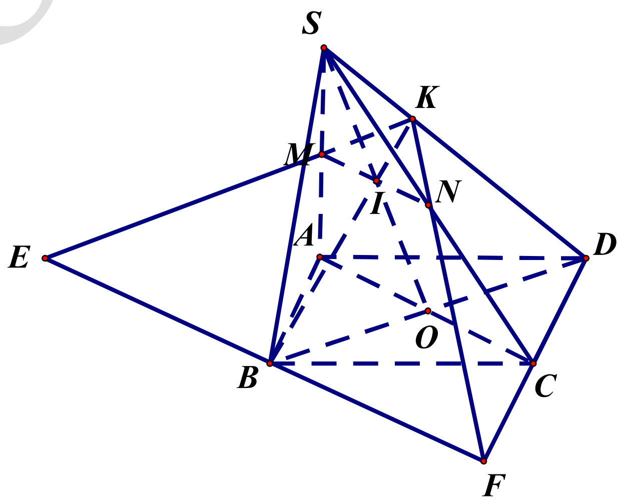
a) Tìm các giao tuyến của (P) và (SAB) ;(P) và (SBC).

b) Tìm giao điểm I của đường thẳng SO với mặt phẳng (P) và giao điểm K của đường thẳng SD với mặt phẳng (P).

c) Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SCD). Từn đó suy ra thiết diện của hình chóp cắt bởi (BMN).

d) Xác định các giao điểm E,F của các đường thẳng DA, DC với (P). Chứng minh rằng E,B,F thẳng hàng.

Lời giải:



a) Ta có:

$M \in SA, SA \subset (SAB) \Rightarrow M \in (SAB)(1)$

Lại có $M \in (BMN)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $M \in (SAB) \cap (BMN)(3)$

Ta có : $B \in (SAB) \cap (BMN)(4)$

Từ (3) và (4) suy ra $BM = (SAB) \cap (BMN)$.

Tương tự ta cũng suy ra $BM = (SAB) \cap (BMN)$.

b) Trong mặt phẳng (SAC), gọi I là giao điểm của SO với MN

Ta có :

$I \in MN, MN \subset (BMN) \Rightarrow I \in (BMN) \Rightarrow I$ là giao điểm của SO với (BMN).

Trong mặt phẳng (SBD), gọi K là giao điểm của BI với SD. Ta có :

$K \in BI, BI \subset (BMN) \Rightarrow K \in (BMN)$. Suy ra K chính là giao điểm của SD với (BMN).

c) Ta có : $\begin{cases} K \in (BMN) \\ K \in (SAD) \end{cases} \Rightarrow K \in (BMN) \cap (SAD)$.

Ta lại có : $M \in (BMN) \cap (SDC)$.

Như vậy tứ giác $BMKN$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (BMN) .

d) Trong mặt phẳng (SAD), gọi $\{E\} = MK \cap AD$. Ta có: $MK \subset (BMN)$ nên $E \in (BMN)$.

Vậy E chính là giao điểm của AD với (BMN) .

Trong mặt phẳng (SDC) gọi $\{F\} = NK \cap CD$.

Ta có $NK \subset (BMN)$ nên $F \in (BMN)$,

$\begin{cases} E \in (BMN) \\ E \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (BMN) \cap (ABCD)$, $\begin{cases} B \in (BMN) \\ B \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow B \in (BMN) \cap (ABCD)$

Suy ra ba điểm B, E, F cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (BMN) và $(ABCD)$. Do đó ba điểm B, E, F thẳng hàng.

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho MN không song song với AC . M, N, P, Q đồng phẳng khi :

A. $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ} = 1$

B. $\frac{BM}{AM}.\frac{CN}{BN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ} = 1$

C. $\frac{BM}{AM}.\frac{CN}{BN}.\frac{DP}{CP}.\frac{DQ}{AQ} = 1$

D. $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{DP}{CP}.\frac{AQ}{DQ} = 1$.

Đáp án A.

Lời giải:.

+ Giả sử M, N, P, Q cùng thuộc mặt phẳng (α) .

Nếu MN cắt AC tại K thì K là điểm chung của các mặt phẳng $(\alpha), (ABC)$,(ADC) nên PQ cũng đi qua K.

Áp dụng định lí $Menelaus$ cho các tam giác ABC, ADC ta được :

$\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CK}{AK} = 1$; $\frac{AK}{CK}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ} = 1 \Rightarrow \frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ} = 1$

Nhận xét :

Trường hợp MN song song với AC thì ví dụ trên vẫn đúng.

+ Liệu trường hợp ngược lại, có $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ} = 1$ thì M, N, P, Q có đồng phẳng hay không ?

Câu trả lời là trường hợp ngược là ví dụ vẫn đúng. Ta sẽ cùng chứng minh nhé :

Trong mặt phẳng (ACD), KO cắt AD tại Q' thì các điểm M, N, P, Q' đồng phẳng.

Theo ví dụ 2 ta có: $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{DP}.\frac{AQ'}{DQ'} = 1 \Rightarrow \frac{DQ'}{AQ'} = \frac{DQ}{AQ} \Rightarrow Q \equiv Q'$. Ví dụ được chứng minh.

+ Ví dụ này có thể được mở rộng đối với các điểm M, N, P, Q bất kì trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA như sau :

M,N,P,Q' đồng phẳng khi và chỉ khi $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}.\frac{\overline{BN}}{\overline{CN}}.\frac{\overline{CP}}{\overline{DP}}.\frac{\overline{DQ}}{\overline{AQ}}=1$ (khẳng định này dôi khi còn được gọi là định lí Menelaus mở rộng trong không gian)

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ và E là điểm thuộc mặt bên (SCD) . E,F lần lượt là trung điểm của AB,AD . Thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG) là :

A. Tam giác. **B.** Tứ giác. **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

Đáp án C.

Lời giải: **:**

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I,H lần lượt là giao điểm của FG với BC,CD

Dễ thấy thiết diện là hình lập phương bị cắt bởi mặt phẳng (α) là ngũ giác $MNGFE$.

Vậy đáp án đúng là C.

b) Theo cách dựng ta có E là trung điểm của BB'. Do đó $B'F=BP=\frac{a}{2}=C'Q$

Suy ra : $PE=QF=\text{EF}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow PQ=\frac{3a\sqrt{2}}{2},\frac{MB}{NC}=\frac{PB}{PC}=\frac{1}{3}\Rightarrow CN=\frac{3}{4}CD=\frac{3}{4}a.$

Do $\begin{cases}(ABB'A')//(DCC'D')\\ KE=(\alpha)\cap(ABB'A')\\ NG=(\alpha)\cap(DCC'D')\end{cases}\Rightarrow KE//NG$

Tương tự ta có : $MN//FG$

Do đó : $\frac{S_{PME}}{S_{PQN}}=\left(\frac{PE}{PQ}\right)^2=\frac{1}{9},\frac{S_{QGF}}{S_{QNP}}=\left(\frac{QE}{PQ}\right)^2=\frac{1}{9}$

Diện tích thiết diện là :

$S_{MNGFE}=S_{PNQ}-\left(S_{PEM}+S_{QFG}\right)=\frac{7}{9}S_{PNQ}.$

Do hai tam giác vuông NCP và NCQ bằng nhau (c.g.c) nên $NQ=NP$. Vậy tam giác NPQ cân tại N. Gọi I là trung điểm của PQ

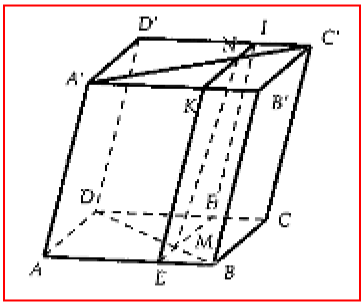
Ta có : $PN=\sqrt{PC^2+CN^2}=\frac{5a\sqrt{5}}{4},NI=\sqrt{PN^2-PI^2}=\sqrt{\frac{45a^2}{16}-\frac{18a^2}{16}}=\frac{3a\sqrt{a}}{4}.$

Diện tích của NPQ bằng :

$S_{NPQ}=\frac{1}{2}NI.PQ=\frac{9a^2\sqrt{6}}{16}\Rightarrow S_{MNGFE}=\frac{7a^2\sqrt{6}}{16}.$

Vậy đáp án đúng là B.

Câu 23. **Đáp án D.**



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, dựng đường thẳng qua M , song song với BC cắt $A'B', C'D'$ theo thứ tự tại E, F .

Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$, dựng đường thẳng qua N song song với $B'C'$ cắt $A'B', C'D'$ theo thứ tự tại K, I. Ta có : $\frac{BM}{BD} = \frac{C'N}{C'A'} \Rightarrow \frac{BM}{BD} = \frac{C'N}{NA'}$.

Áp dụng định lý Thales ta có :

$\frac{B'K}{A'K} = \frac{C'N}{A'N} = \frac{MB}{MD} = \frac{BE}{EA} \Rightarrow KE // BB'$.

Từ đây sauy ra $KE // (BCC'B')$ (1).

Theo cách dựng ta suy ra : $EF // (BCC'B')$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} (EFIK) // (BCC'B') \\ MN // (EFIK) \end{cases} \Rightarrow MN // (BCC'B')$.

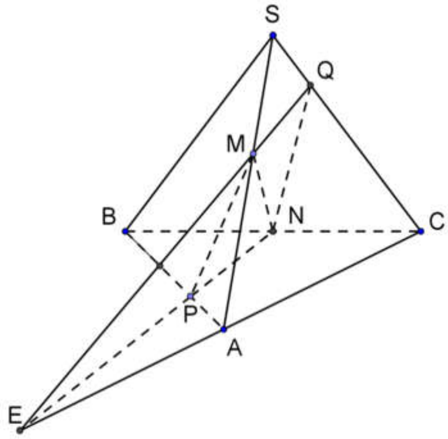
Vậy MN luôn song song với mặt phẳng cố định, mặt phẳng đó là (BCC'B')

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. P là điểm nằm trên cạnh AB sao cho $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$. Gọi Q là giao điểm của SC với mặt phẳng (MNP) . Tính $\frac{SQ}{SC}$

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải:

Đáp án A.



Trong mặt phẳng (ABC) , gọi $E = NP \cap AC$

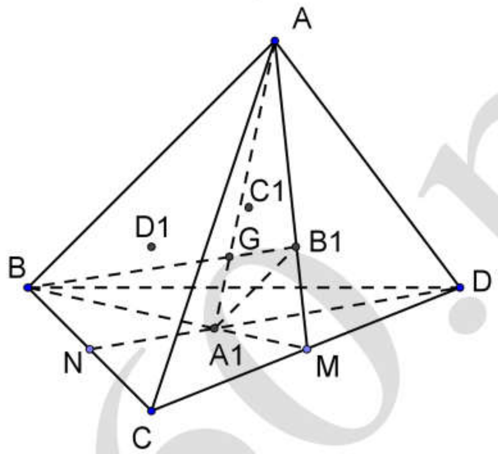
Khi đó Q chính là giao điểm của SC với EM.

Áp dụng địnhlý Menelaus vào tam giác ABC ta có: $\frac{AP}{PB}.\frac{BN}{NC}.\frac{CE}{EA}=1\Rightarrow\frac{CE}{EA}=2$

Áp dụng địnhlý Menelaus vào tam giác SAC ta có: $\frac{AM}{MS}.\frac{SQ}{QC}.\frac{CE}{EA}=1\Rightarrow\frac{SQ}{QC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{SQ}{SC}=\frac{1}{3}$

Ví dụ 5: Cho tứ diện ABCD. Gọi A_1,B_1,C_1,D_1 tương ứng là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD và ABC. Chứng minh rằng AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 đồng quy tại điểm G và ta có: $\frac{AG}{AA_1}=\frac{BG}{BB_1}=\frac{CG}{CC_1}=\frac{DG}{DD_1}=\frac{3}{4}$

Lời giải:



Lưu ý: Điểm G được gọi là trọng tâm tứ diện ABCD

Gọi M là trung điểm CD. Theo tính chất trọng tâm ta có: $\frac{MA_1}{MB}=\frac{MB_1}{MA}=\frac{1}{3}\Rightarrow A_1B_1//AB$ và $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{3}$

Trong mặt phẳng (AMB), gọi G là giao điểm của BB_1, AA_1

Theo định lý Thales ta có: $\frac{A_1G}{GA}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{AG}{AA_1}=\frac{3}{4}\quad(1)$

Tương tự ta có: $\begin{cases} G'=CC_1\cap AA_1,\frac{AG'}{AA_1}=\frac{3}{4} \\ G''=DD'\cap AA_1,\frac{AG''}{AA_1}=\frac{3}{4}\end{cases}\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra G, G', G" trùng nhau, tức là AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 đồng quy tại điểm G và ta có :

$\frac{AG}{AA_1}=\frac{BG}{BB_1}=\frac{CG}{CC_1}=\frac{DG}{DD_1}=\frac{3}{4}$

Bài tập tương tự: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J,E,F,K,H tương ứng là các trung điểm của AB,CD,AC,BD,AD,BC. Chứng minh rằng IJ,EF,KH đòng quy tại một điểm và điểm đồng quy chính là trọng tâm G của tứ diện $ABCD$

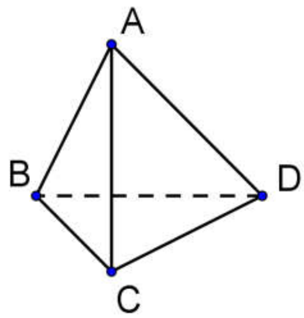
C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

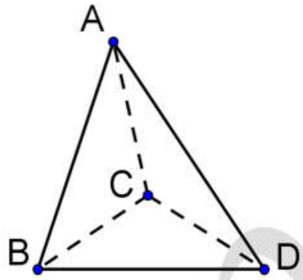
A. Dùng nét đứt biểu diễn cho đường bị che khuất.
B. Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng.
C. Hình biểu diễn phải giữ nguyên qua hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng..

D. Hình biểu diễn của hai đường cắt nhau có thể là hai đường song song.

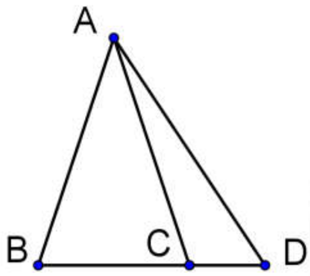
Câu 2. Trong các hình vẽ sau hình nào có thể là hình biểu diễn của một hình tứ diện? (Chọn câu đúng nhất)



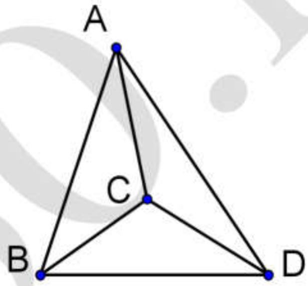
(I)



(II)



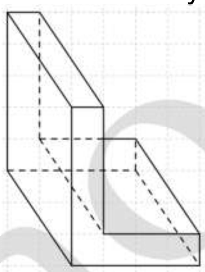
(III)

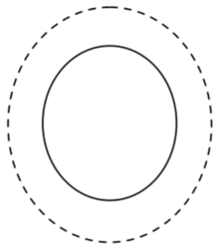


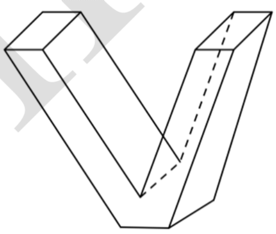
(IV)

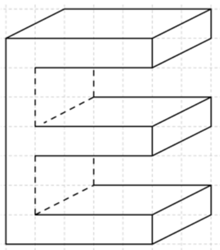
A. $(I),(II)$. .
B. $(I),(II),(III),(IV)$.
C. $(I),(II),(III)$.
D. (I).

Câu 3. Hình nào sau đây vẽ đúng quy tắc?

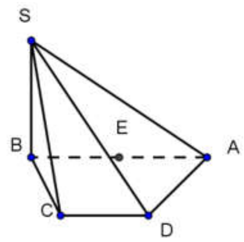

A. .

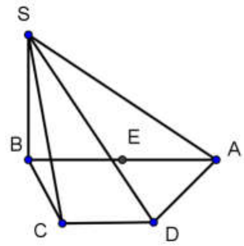

B. .

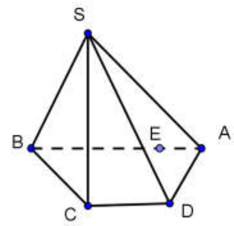

C. .

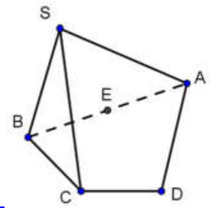

D.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB gấp đôi đáy nhỏ CD , E là trung điểm của đoạn AB . Hình vẽ nào sau đây vẽ đúng quy tắc?

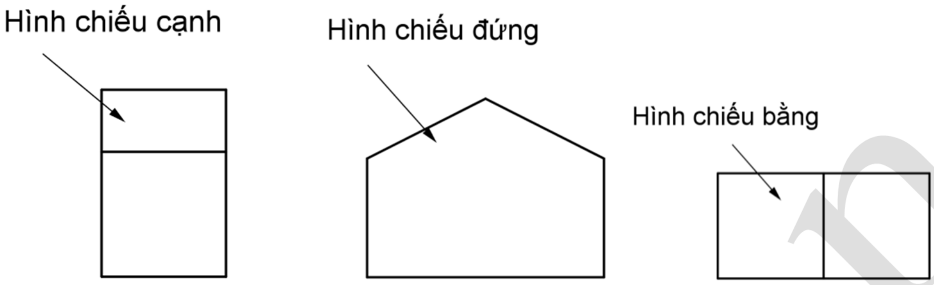
A. 

. **B.** 

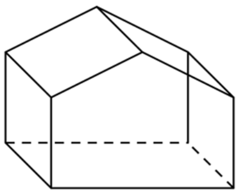
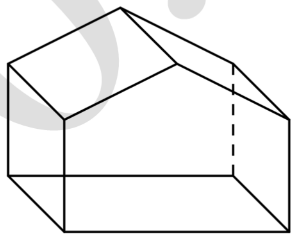
. **C.** 

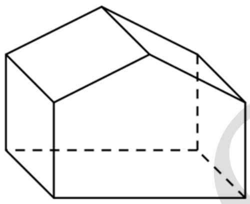
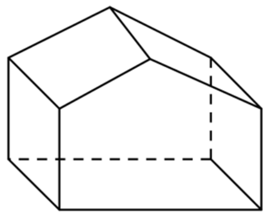
. **D.** 

Câu 5. Một hình không gian có hình chiếu đứng (nhìn từ trước vào (có thể nhìn từ sau) để từ hình 3D chuyển sang hình 2D) hình chiếu bằng (nhìn từ trên xuống) có thể nhìn từ dưới lên)), hình chiếu cạnh (từ trái sang (có thể nhìn từ phải sang)) lần lượt được thể hiện như sau:



Hãy vẽ hình biểu diễn của hình đó?

A.  . **B.**  .

C.  . **D.** 

Câu 6. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Qua ba điểm xác định một và chỉ một mặt phẳng.

B. Qua ba điểm phân biệt xác định một và chỉ một mặt phẳng.

C. Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng xác định hai mặt phẳng phân biệt.

D. Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng xác định một và chỉ một mặt phẳng.

Câu 7. Xét các mệnh đề sau đây:

(I) Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

(II) Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt.

(III) Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

(IV) Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có duy nhất một điểm chung khác nữa.

Số mệnh đề sai trong các mệnh đề trên là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 8. Cho n điểm phân biệt trong không gian $(n>4)$ .Biết rằng bốn điểm bất kỳ trong n điểm đã cho cùng thuộc một mặt phẳng. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. Tất cả n điểm thuộc cùng một mặt phẳng.
B. Có đúng $n-1$ điểm thuộc cùng một mặt phẳng.
C. Có đúng $n-2$ điểm thuộc cùng một mặt phẳng.
D. Không tồn tại mặt phẳng nào chứa tất cả n điểm.

Câu 9. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?
A. Có đúng hai mặt phẳng cắt nhau theo một đường thẳng cho trước..
B. Hai mặt phẳng có một điểm chung duy nhất.
C. Hai mặt phẳng cùng chứa hai cạnh của một tam giác thì trùng nhau..
D. Có đúng hai mặt phẳng phân biệt đi qua ba điểm phân biệt..

Câu 10. Cho tứ giác lồi $ABCD$ và điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Có bao nhiêu mặt phẳng qua S và hai trong số bốn điểm A,B,C,D?
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 11. Cho năm điểm A,B,C,D,E phân biệt trong đó không có bốn điểm nào cùng nằm trên một mặt phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi ba trong năm điểm đã cho ?
A. 6. **B.** 10. **C.** 60. **D.** 8.

Câu 12. Cho $n\ (n\ge 3, n\in\mathbb{N})$ đường thẳng phân biệt đồng quy tại O trong đó không có ba đường thẳng nào cùng năm trên một mặt phẳng. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua hai trong số n đường thẳng trên?
A. $\dfrac{n!}{2(n-2)!}$. **B.** $\dfrac{n!}{(n-2)!}$. **C.** $\dfrac{n!}{2}$. **D.** $n!$.

Câu 13. Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng a,b cắt nhau cùng nằm trong mặt phẳng (α) . Gọi A là một điểm thuộc đường thẳng a nhưng không thuộc đường thẳng b và P là một điểm nằm ngoài (α). Khẳng định nào sau đây đúng:
A. PA và b chéo nhau. **B.** PA và b song song .
C. PA và b cắt nhau. **D.** PA và b trùng nhau.

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD, I, J$ lần lượt là trung điểm của AD và BC . Khẳng định nào sau đây đúng?
A. AJ, BI song song . **B.** AJ, BI trùng nhau. **C.** AJ, BI cắt nhau **D.** AJ, BI chéo nhau

Câu 15. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác (AB không song song CD). Gọi M là trung điểm của SD , N là điểm nằm trên cạnh SB sao cho $SN=2NB, O$ là giao điểm của AC và BD . Cặp đường thẳng nào sau đây cắt nhau:
A. SO và AD. **B.** MN và SO. **C.** MN và SC **D.** SA và BC.

Câu 16. Cho bốn điểm A,B,C,D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên AB, AD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho MN cắt BD tại I . Điểm I không thuộc mặt phẳng nào sau đây:
A. (ACD). **B.** (BCD). **C.** (CMN) . **D.** (ABD).

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của CD, AB . Khi đó BC và MN là hai đường thẳng:
A. Chéo nhau. **B.** Có hai điểm chung. **C.** Song song **D.** Cắt nhau

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh AC,N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN=2ND.O$ là một điểm thuộc miền trong của tam giác BCD . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Mặt phẳng (OMN) chứa đường thẳng AB

B. Mặt phẳng (OMN) đi qua giao điểm của hai đường thẳng MN và CD.

C. Mặt phẳng (OMN) đi qua điểm A .

D. Mặt phẳng (OMN)chứa đường thẳng CD .

Câu 19. Ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì :

A. Cùng thuộc một đường tròn

B. Cùng thuộc một đường thẳng

C. Cùng thuộc một eliP

D. Cùng thuộc một tam giác.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ (AB là đáy lớn, CD là đáy nhỏ). Khẳng định nào sau đây sai:

A. Hình chóp $S.ABCD$ có bốn mặt bên..

B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là SK trong đó K là một điểm thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO trong đó O là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI trong đó I là giao điểm của AD và BC .

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác (AB không song song CD). Gọi M là trung điểm của SD,N là điểm nằm trên cạnh SB sao cho $SN=2NB,O$ là giao điểm của AC và BD . Giả sử đường thẳng d là giao tuyến của (SAB) và (SCD) . Nhận xét nào sau đây là sai:N

A. d cắt CD.

B. d cắt MN.

C. d cắt AB.

D. d cắt SO.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành $(BC//AD)$ .Mặt phẳng (P) di động chứa đường thẳng AB và cắt các đoạn SC,SD lần lượt tại E,F . Mặt phẳng (Q) di động chứa đường thẳng CD và cắt SA,SB lần lượt tại $G,H.I$ là giao điểm của $AE,BF;J$ là giao điểm của CG,DH . Xét các mệnh đề sau:

(1) Đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định..

(2) Đường thẳng GH luôn đi qua một điểm cố định.

(3) Đường thẳng IJ luôn đi qua một điểm cố dịnh.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 0.

B. 1.

C. 2 .

D. 3.

Câu 23. Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a . Gọi E là trung điểm AB , F là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BF=2FC,G$ là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CG=2GD$. Tính độ dài đoạn giao tuyến của mặt phẳng (EFG) với mặt phẳng (ACD) của hình chóp $ABCD$ theo a .

A. $\frac{\sqrt{19}}{15}a$.

B. $\frac{a\sqrt{141}}{30}$.

C. $\frac{a\sqrt{34+15\sqrt{3}}}{15}$.

D. $\frac{a\sqrt{34-15\sqrt{3}}}{15}$.

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD, E$ nằm trên đoạn BC sao cho $BC = 3EC, F$ là điểm nằm trên BD sao cho $CD = 3DF$. Gọi G là giao điểm của BF và DE . Giao tuyến của hai mặt phẳng (ACG) và (ABD) là:

A. AH trong đó H thuộc BD sao cho $\overrightarrow{BH} = -4\overrightarrow{HD}$

B. AH trong đó H thuộc BD sao cho $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HD}$

C. AH trong đó H thuộc BD sao cho $\overrightarrow{BH} = 4\overrightarrow{HD}$

D. AH trong đó H thuộc BD sao cho $\overrightarrow{BH} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{HD}$

Câu 25. Cho tứ diện $SABC$ có $AB = c, BC = a, AC = b.$ AD, BE, CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SBE) và (SCF) là:

A. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{b+c}{a}\overrightarrow{ID}$

B. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI} = -\frac{b+c}{a}\overrightarrow{ID}$

C. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{a}{b+c}\overrightarrow{ID}$

D. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{-a}{b+c}\overrightarrow{ID}$

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SO . Gọi H là giao điểm của SC với (MNP) . Tính $\frac{SH}{SC}$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và CD . Trên đường thẳng DS lấy điểm P sao cho D là trung điểm SP . Gọi R là giao điểm của SB với mặt phẳng (MNP) . Tính $\frac{SR}{SB}$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Câu 28. Cho tứ diện $SABC, E, F$ lần lượt thuộc đoạn AC, AB. Gọi K là giao điểm của BE và CF . Gọi D là giao điểm của (SAK) với BC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{AK}{KD} + \frac{BK}{KE} + \frac{CK}{KF} \geq 6$. **B.** $\frac{AK}{KD} + \frac{BK}{KE} + \frac{CK}{KF} \leq 6$.

C. $\frac{AK}{KD} + \frac{BK}{KE} + \frac{CK}{KF} > 6$. **D.** $\frac{AK}{KD} + \frac{BK}{KE} + \frac{CK}{KF} < 6$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$, D, M lần lượt là trung điểm của BC, AD . Gọi E là giao điểm của (SBM) với AC, F là giao điểm của (SCM) với AB . Tính $\frac{MF}{CM - ME} + \frac{ME}{BM - ME}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tương ứng tại các điểm E, F, G, H . Gọi $I = AC \cap BD, J = EG \cap SI$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{SA}{SE}+\frac{SC}{SG}=\frac{SB}{SF}+\frac{SD}{SH}$.
B. $\frac{SA}{SE}+\frac{SC}{SG}\ge 2\frac{SI}{SJ}$.
C. $\frac{SA}{SE}+\frac{SC}{SG}>\frac{SB}{SF}+\frac{SD}{SH}$.
D. $\frac{SB}{SF}+\frac{SD}{SH}\ge 2\frac{SI}{SJ}$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là các điểm nằm trên cạnh AB, AD sao cho $\frac{BM}{MA}=\frac{2}{3}, \frac{NC}{BN}=\frac{1}{2}$. Gọi P là điểm trên cạnh SD sao cho $\frac{PD}{PS}=\frac{1}{5}$. J là giao điểm của SO với (MNP) . Tính $\frac{SJ}{SO}$?

A. $\frac{10}{11}$. **B.** $\frac{1}{11}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$. E là điểm thuộc đoạn AB sao cho $EA = 2EB$. F, G là các đei63m thuộc đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{FC}=5\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{GC}=-5\overrightarrow{GB}$. H, I là các điểm thuộc đường thẳng CD sao cho $\overrightarrow{HC}=-5\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{ID}=-5\overrightarrow{IC}, J$ thuộc tia đối của tia DA sao cho D là trung điểm của AJ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Bốn điểm E, F, H, J đồng phẳng
B. Bốn điểm E, F, I, J đồng phẳng.
C. Bốn điểm E, G, H, I đồng phẳng.
D. Bốn điểm E, G, I, J đồng phẳng.

Câu 33. Cho tứ diện $ABCD, E, U$ là điểm thuộc đường thẳng AB sao cho $\overrightarrow{EA}=-2\overrightarrow{EB}$, $5\overrightarrow{UA}=4\overrightarrow{UB}$. F, G là các điểm thuộc đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{FC}=5\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GB}$. H, I là các điểm thuộc đường thẳng CD sao cho $\overrightarrow{HC}=-5\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{ID}=5\overrightarrow{IC}. J, K$ là các điểm nằm trên đường thẳng DA sao cho $\overrightarrow{JA}=2\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{KD}=5\overrightarrow{KA}$. Bốn điểm nào dưới đây lập nên một tứ diện?

A. E, F, H, J . **B.** E, G, I, K . **C.** U, G, H, J . **D.** U, F, I, K .

Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và P là điểm thuộc cạnh BC (P không là trung điểm BC).

a) Thiết diện của tứ diện bị cắt bởi (MNP) là:

A. Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

b) Gọi Q là giao điểm của (MNP) với AD, I là giao điểm của MN với PQ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_{MNPQ}=2S_{MPN}$. **B.** $S_{MNPQ}=2S_{MPQ}$. **C.** . $S_{MNPQ}=4S_{MPI}$ **D.** $S_{MNPQ}=4S_{PIN}$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, E là trung điểm của SA, F, G lần lượt là các điểm thuộc cạnh BC, CD . Thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP) là:

A. Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, E là trung điểm của cạnh SA, F, G là các điểm thuộc cạnh SC, AB (F không là trung điểm của SC). Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:

A. Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

Câu 37. Cho hình chóp $SA_1A_2...A_n$ với đáy là đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3, n \in \mathbb{N})$. Trên tia đối của tia A_1S lấy điểm $B_1, B_2,...B_n$ là các điểm nằm trên cạnh SA_2, SA_n . Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng $(B_1B_2B_n)$ là:

A. Đa giác $n-2$ cạnh. **B.** Đa giác $n-1$ cạnh. **C.** Đa giác n cạnh. **D.** Đa giác $n+1$ cạnh.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, E là điểm thuộc cạnh bên SD sao cho $SD = 3SE$. F là trọng tâm tam giác SAB, G là điểm thay đổi trên cạnh BC. Thiết diện cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:

A. Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, E là một điểm thuộc mặt bên (SCD) . F, G lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB và SB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) có thể là:

A. Tam giác, tứ giác . **B.** Tứ giác, ngũ giác. **C.** Tam giác, ngũ giác. **D.** Ngũ giác.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD, E$ là trung điểm của SB, F thuộc SC sao cho $3\overrightarrow{SF} = 2\overrightarrow{SC}, G$ là một điểm thuộc miền trong tam giác SAD . Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:

A. Tam giác, tứ giác . **B.** Tứ giác, ngũ giác. **C.** Tam giác, ngũ giác. **D.** Ngũ giác.

Câu 41. Cho hình tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $6a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB. P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP = 2PD$. Diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi (MNP) là:

A. $S = \frac{5a^2\sqrt{51}}{4}$. **B.** $S = \frac{5a^2\sqrt{147}}{4}$. **C.** $S = \frac{5a^2\sqrt{147}}{2}$. **D.** $S = \frac{5a^2\sqrt{51}}{2}$.

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh bằng a. Trên tia đối của các tia CB, DA lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $CE = a, DF = a$. Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MEF) là:

A. $S = \frac{a^2\sqrt{33}}{18}$. **B.** $S = \frac{a^2}{3}$. **C.** $S = \frac{a^2}{6}$. **D.** $S = \frac{a^2\sqrt{33}}{9}$.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD, SC. Gọi Q là giao điểm của SD với (MNP) . Tính $\frac{SQ}{SD}$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N , P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SO. Gọi H là giao điểm của SC với (MNP) . Tính $\frac{SH}{SC}$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 45. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và CD. Trên đường thẳng DS lấy điểm P sao cho D là trung điểm của SP. Gọi R là giao điểm của SB với mặt phẳng (MNP) . Tính $\frac{SR}{SB}$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. **Đáp án D.**

Câu 2. **Đáp án B.**

Câu 3. **Đáp án A.**

Câu 4. **Đáp án A.**

Theo quy tắc vẽ hình, các đoạn thẳng song song được vẽ bằng các đoạn thẳng song song nên đáp án D bị loại. Trung điểm được vẽ ở chính giữa đoạn nên ý C bị loại. Nét khuất được vẽ bởi nét đứt đoạn, nét với góc nhìn này với đáp án B thì hoặc AB đứt đoạn hoặc SC, SD đứt đoạn. Do đó chỉ có đáp án A đúng.

Câu 5. **Đáp án C.**

Hình A, B, D sai khi vẽ các đường không nhìn thấy bằng nét liền.

Câu 6. **Đáp án D.**

- Đáp án A, B sai, các em có thể lấy ví dụ ba điểm A,B,C phân biệt , thẳng hàng , thì có vô số mặt phẳng đi qua ba điểm đó.
- Đáp án C sai, vì theo tính chất thừa nhận, ba điểm phân biệt không thẳng hàng có duy nhất một mp đi qua ba điểm.

Câu 7. **Đáp án B.**

Theo các tính chất thừa nhận, ta thấy (I), (II), (III) đúng và nếu hai mp có 1 điểm chung thì chúng còn vô số điểm chung khác nữa. Điều đó đồng nghĩa với nhận xét (IV) là sai. Như vậy có 1 quy tắc sai.

Câu 8. **Đáp án A.**

- Nếu n điểm đã cho cùng thuộc một đường thẳng thì hiển nhiên n điểm thuộc cùng 1 mp. Do đó loại được đáp án B, C, D.
- Nếu n điểm đã cho không cùng thuộc một đường thẳng thì trong chúng phải có 3 điểm không thẳng hàng. Khi đó ba điểm này xác định 1 mp, kí hiệu là mp (P) . Lấy một điểm trong $n-3$ điểm còn lại thì theo giả thiết điểm đó phải thuộc mp(P) . Suy ra tất cả các điểm đã cho cùng thuộc 1 mp.

Câu 9. **Đáp án C.**

Một đường thẳng cho trước có vô số mp đi q ua.

Hai mp đã có 1 điểm chung thì có vô số điểm chung khác nữa. Còn có trường hợp 2 mp không có điểm chung nào.

Có duy nhất 1 mp đi qua ba điểm phân biệt. Như vậy ta chọn ý C.

Câu 10. **Đáp án D.**

Số cách chọn 2 trong 4 điểm A,B,C,D là $C_4^2=6$.

Vậy có 6 mp đi qua S và 2 trong 4 điểm A,B,C,D .

Câu 11. **Đáp án B.**

Chọn 3 trong 5 điểm trên sẽ tạo nên 1 mp. Do đó, số mp tạo bởi 3 trong 5 điểm trên là $C_5^3=10$.

Câu 12. **Đáp án A.**

Hai đường thẳng phân biệt cắt nhau tại O xác định 1 mp . Nên số các mp chứa 2 trong n đường thẳng trên là $C_n^2=\dfrac{n!}{2(n-2)!}$.

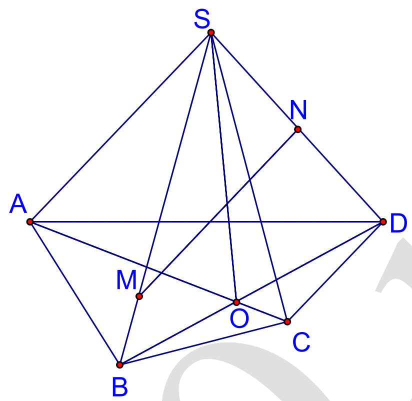
Câu 13. **Đáp án A .**

Dễ thấy PA,b không trùng nhau.

Giả sử PA,b không chéo nhau, khi đó PA,b hoặc song song hoặc cắt nhau. Lúc đó, theo cách xác định 1 mp, ta thấy PA,b cùng thuộc 1 mp(β) . Các mp $(\alpha),(\beta)$ đều chứa đường thẳng b và đi qua điểm A ở ngoài b nên 2 mp$(\alpha),(\beta)$trùng nhau. Suy ra điểm P phải thuộc mp (α) (Vô lý). Như vậy PA,b chéo nhau.

Câu 14. **Đáp án D**.
Giả sử AJ,BI đồng phẳng, suy ra AJ,BIđồng phẳng do đó A,B,C,D cùng thuộc 1 mp (vô lý).
Do đó AJ,BIkhông đồng phẳng, do đó AJ,BI chéo nhau. Chọn đáp án D.

Câu 15. **Đáp án B**.



Giả sử SO,AD cắt nhau. Khi đó SO,ADđồng phẳng, suy ra S thuộc mp $(ABCD)$ (Vô lý). Đáp án A bị loại.
Giả sử MN cắt SC. Khi đó MN và SC đồng phẳng, suy ra C thuộc (SBD) (vô lý). Do đó đáp án C bị loại.
Giả sử SA cắt BC. Khi đó SA,BC đồng phẳng. Suy ra, S thuộc mp $(ABCD)$ (vô lý). Đáp án D bị loại. MN,SO cùng nằm trong mp(SBD), không song song và trùng nhau.

Câu 16. **Đáp án A**.
Do I là giao điểm của MN và BD nên I thuộc các mp chứa MN và các mp chứa BD. Do đó I thuộc $(BCD),(CMN),(ABD)$.
Giả sử I thuộc (ACD) khi đó B thuộc (ACD) (vô lý).

Câu 17. **Đáp án A**.
Giả sử MN,BC đồng phẳng. Do đó D,A lần lượt thuộc đường thẳng MC,NB nên D,A cũng thuộc mp đó. Như vậy A,B,C,D đồng phẳng(vô lý). Như vậy đáp án B, C, D không thỏa mãn.

Câu 18. **Đáp án A**.
Gọi I là giao điểm của MN và CD. Khi đó I thuộc (OMN). Vậy đáp án A đúng.
Giả sử (OMN) chứa đường thẳng AB. Khi đó O,B cùng thuộc mp(AMN). Suy ra O,B cùng thuộc mp(ACD) (vô lý). Đáp án B không thỏa mãn.
Giả sử (MNO) đi qua điểm A. Do D,C lần lượt thuộc các đường thẳng AN,AM nên D,C thuộc mp(AMN). Như vậy 2 mp $(OCD),(AMN)$ trùng nhau. Suy ra B thuộc mp (ACD) (vô lý). Vậy đáp án C bị loại.
Tương tự ta cũng dễ dàng suy ra đáp án D bị loại.

Câu 19. **Đáp án B**.

Giao tuyến của 2mp phân biệt là 1 đường thẳng, nên ba điểm phân biệt cùng thuộc 2 mp phân biệt sẽ nằm trên giao tuyến của 2mp phân biệt.

Câu 20. **Đáp án B**.

Hiển nhiên hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên nên đáp án A đúng.

Ta thấy giao tuyến của 2mp $(SAB),(ABCD)$ là AB , K là điểm thuộc cả hai mp do đó $K \in AB$. tương tự ta cũng chứng minh được $K \in CD$. Như vậy K thuộc cả hai đường thẳng AB, CD (vô lý do AB, CD song song). Do vậy đáp án B sai.

$O \in AC \Rightarrow O \in (SAC)$.

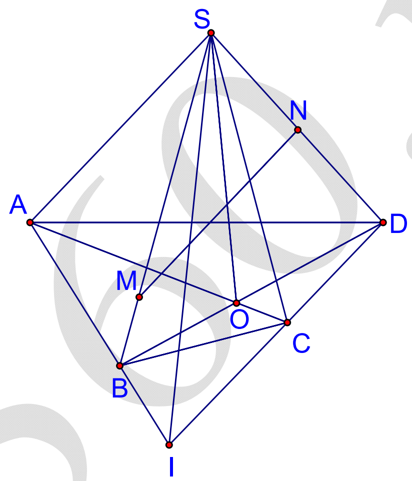
$O \in BD \Rightarrow O \in (SBD)$.

Do đó O thuộc giao tuyến của hai mp $(SAC),(SBD)$.

Tương tự ta cũng dễ thấy $SI = (SAD) \cap (SBC)$.

Như vậy đáp án C,D đúng.

Câu 21. **Đáp án B**.



Gọi $I = AB \cap CD$. Ta có:

$$\begin{cases} I \in AB, AB \subset (SAB) \Rightarrow I \in (SAB) \\ I \in CD, CD \subset (SCD) \Rightarrow I \in (SCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$$

Lại có $S \in (SAB) \cap (SCD)$.

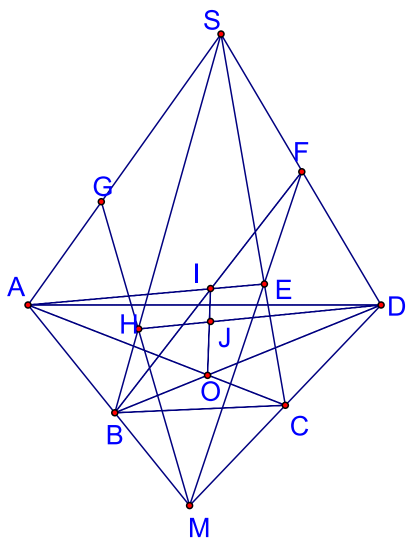
Do đó $SI = (SAB) \cap (SCD)$.

$\Rightarrow d \equiv SI$.

Vậy d cắt AB, CD, SO .

Giả sử d cắt MN . Khi đó M thuộc mp (SAB) . Suy ra D thuộc (SAB) (vô lý). Vậy d không cắt MN . Đáp án B sai.

Câu 22. **Đáp án D.**



Trong mp$(ABCD)$, gọi $M = AB \cap CD; O = AC \cap BD$. Khi đó M, O cố định.

Như vậy: E, F, M cùng nằm trên hai mp (P) và (SCD) , do đó ba điểm E, F, M thẳng hàng. Vậy đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định M .

Tương tự, ta có G, H, M cùng nằm trên hai mp (Q) và (SAB) ,do đó G, H, M thẳng hàng.

Vậy các đường thẳng GH luôn đi qua một điểm cố định M .

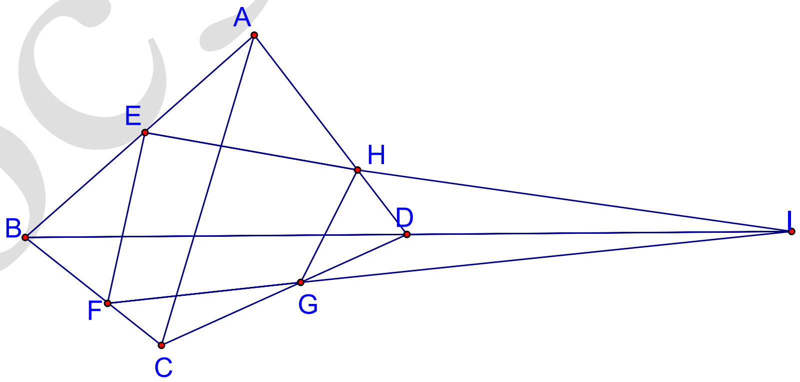
Do $\begin{cases} I \in AE \subset (SAC) \\ I \in BF \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD)$.

Tương tự ta cũng có $J \in (SAC) \cap (SBD); O \in (SAC) \cap (SBD)$

Do đó ba điểm I, J, O thẳng hàng. Vậy IJ luôn đi qua điểm cố định O .

Vậy ta chọn đáp án D.

Câu 23. Đáp án A.



Trong mp (BCD) , gọi $I = FG \cap BD$.

Trong mp(ADB) , gọi $H = IE \cap AD$.

Khi đó $HG = (EFG) \cap (ACD)$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác BCD với ba điểm I, G, F thẳng hàng ta có:

$\frac{ID}{IB} . \frac{FB}{FC} . \frac{GC}{GD} = 1 \Rightarrow \frac{ID}{IB} = \frac{1}{4}$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABD với ba điểm I, H, E thẳng hàng ta có:

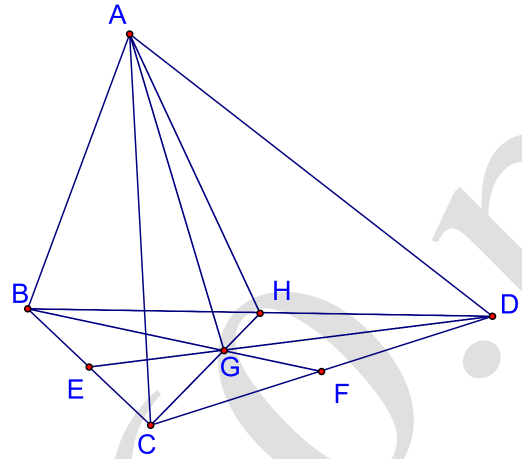
$$\frac{HD}{HA}.\frac{EA}{EB}.\frac{IB}{ID}=1\Rightarrow\frac{HD}{HA}=\frac{1}{4}\Rightarrow HD=\frac{a}{5}$$

Áp dụng định lý cosin vào tam giác HDG ta có:

$$HG^2=HD^2+DG^2-2DH.DG.\cos 60^0$$

$$=\frac{a^2}{25}+\frac{a^2}{9}-\frac{a^2}{15}=\frac{19a^2}{225}\Rightarrow HG=\frac{\sqrt{19}}{15}a$$

Câu 24. **Đáp án C**.



Trong (BCD), gọi $H=CG\cap BD$.

Dễ thấy H thuộc đoạn BD nên $\overrightarrow{BH},\overrightarrow{HD}$ cùng hướng.

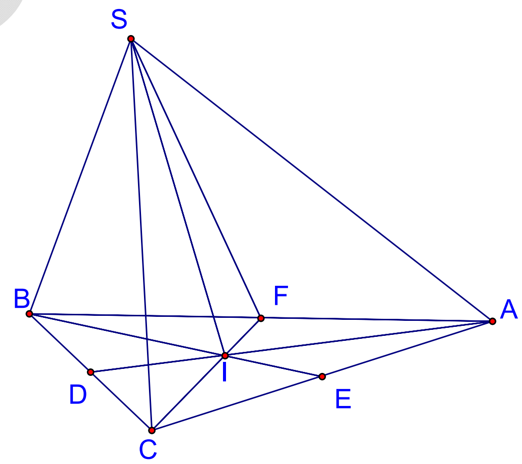
Do đó đáp án A, D bị loại.

Áp dụng định lý Ceva trong tam giác BCD với BF, DE, CH đồng quy ta có:

$$\frac{EB}{EC}.\frac{FC}{FD}.\frac{HD}{HB}=1\Rightarrow 2.2.\frac{HD}{HB}=1\Rightarrow\frac{HD}{HB}=\frac{1}{4}\Rightarrow BH=4DH$$

Do $\overrightarrow{BH},\overrightarrow{HD}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{BH}=4\overrightarrow{HD}$.

Câu 25. **Đáp án A**.



Do I thuộc đoạn AD nên $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{ID}$ cùng hướng. Do đó B, D bị loại.

AD là phân giác trong của tam giác ABC nên theo tính chất đường phân giác ta có:

$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}\Rightarrow BD=\frac{ac}{b+c}$

Ta có: BI là phân giác trong của tam giác ABD nên theo tính chất đường phân giác ta có:

$\frac{IA}{ID}=\frac{BA}{BD}=\frac{b+c}{a}\Rightarrow IA=\frac{b+c}{a}ID$

Do đó: $\overrightarrow{AI}=\frac{b+c}{a}\overrightarrow{ID}$

Câu 26. **Đáp án B**.

Trong mp $\left(ABCD\right)$, gọi $I=MN\cap AO$. Dễ thấy $H=PO\cap SC$.

Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên I là trung điểm AO. Suy ra $\frac{AI}{AC}=\frac{1}{4}$ và PI là đường trung bình của tam giác OSA . Do đó $IH//SA$.

Áp dụng định lý Thales ta có: $\frac{SH}{SD}=\frac{AI}{AC}=\frac{1}{4}$.

Câu 27. **Đáp án D**.

Trong mp$(ABCD)$, gọi $I=BD\cap MN, O=AC\cap BD$.

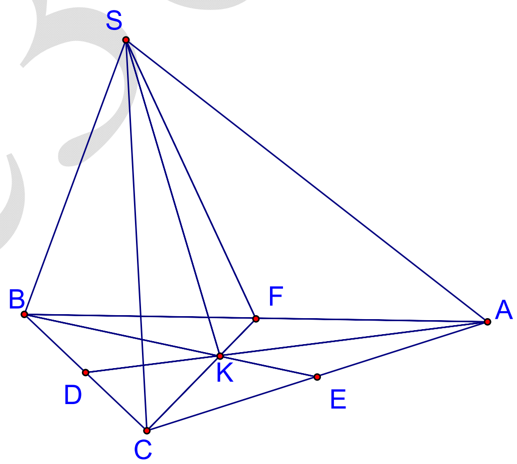
Dễ thấy $R=IP\cap SB$.

Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên I là trung điểm DO. Suy ra $\frac{DI}{IB}=\frac{1}{3}$.

Áp dụng định lý Menelaus vào taam giác SBD ta có :

$\frac{BR}{RS}.\frac{PS}{PD}.\frac{BI}{ID}=1\Rightarrow\frac{BR}{RS}.2.\frac{1}{3}=1\Rightarrow\frac{SR}{SB}=\frac{2}{3}$

Câu 28. **Đáp án A**.



Nếu K trùng với trọng tâm G thì $\frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{CK}{KF}=6$. Do đó C, D bị loại.

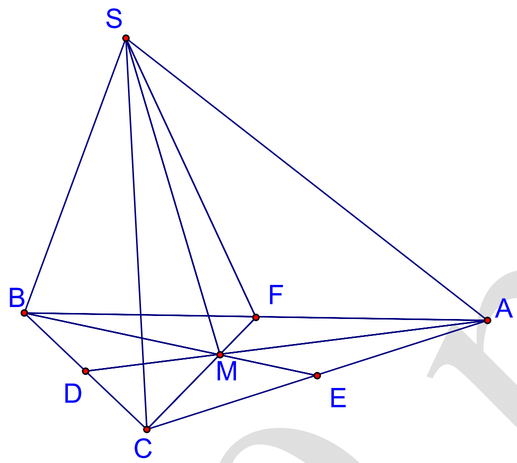
Ta có $\frac{DK}{DA}+\frac{EK}{EB}+\frac{FK}{FC}=\frac{S_{KBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{KAC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{KAB}}{S_{ABC}}=1$

Áp dụng định lý bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\left(\frac{DK}{DA}+\frac{EK}{EB}+\frac{FK}{FC}\right)\left(\frac{DA}{DK}+\frac{EB}{EK}+\frac{FC}{FK}\right)\geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DK}+\frac{EB}{EK}+\frac{FC}{FK}\geq 9\Rightarrow \frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{CK}{KF}\geq 6$$

Câu 29. **Đáp án A.**



Ta có : $\frac{BM}{ME}=\frac{S_{ABM}}{S_{AME}}=\frac{S_{CBM}}{S_{CME}}=\frac{S_{ABM}+S_{CBM}}{S_{AME}+S_{CME}}=\frac{S_{ABM}+S_{CBM}}{S_{AME}}=\frac{BD}{CD}+\frac{BF}{FA}$

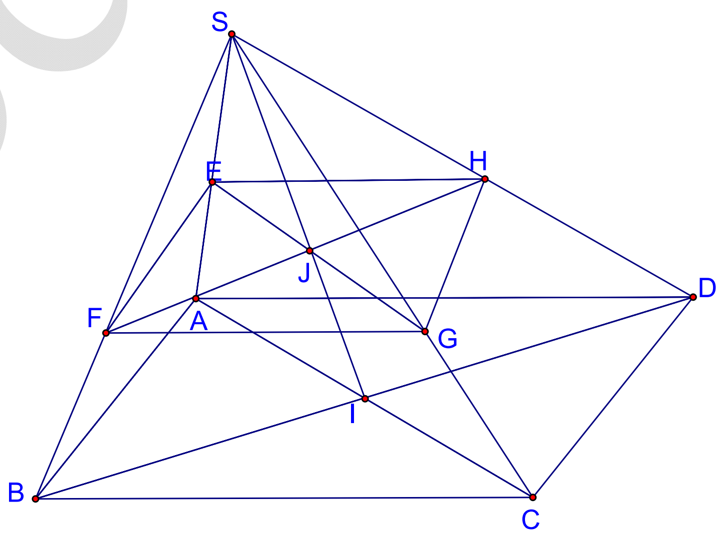
$\Rightarrow \frac{BF}{AF}=\frac{BM}{ME}-1=\frac{BM-ME}{ME}(1)$.

Tương tự ta cũng chứng minh được: $\frac{CM}{MF}=\frac{CE}{AE}+\frac{CD}{BD}\Rightarrow \frac{CE}{AE}=\frac{CM}{MF}-1=\frac{CM-MF}{MF}(2)$

Và $1=\frac{AM}{MD}=\frac{AE}{CE}+\frac{AF}{BF}(3)$

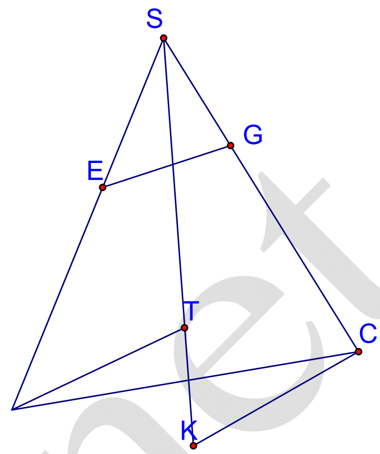
Từ (1,2,3) suy ra $\frac{MF}{CM-MF}+\frac{ME}{BM-ME}=1$

Câu 30. **Đáp án A.**



Xét trường hợp đặc biệt E,F,G,H lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Khi đó ta dễ dàng loại được đáp án D.

Dựng $AT//EG\left(T\in SI\right),CK//EG\left(KESI\right)$



Theo định lý Thales, ta có:

$\frac{SA}{SE}=\frac{ST}{SJ},\frac{SC}{SG}=\frac{SK}{SJ};\frac{IT}{IK}=\frac{IA}{IC}=1$

Suy ra: $\frac{SA}{SE}+\frac{SC}{SG}=\frac{ST+SK}{SJ}=\frac{SI-IT+SI+IK}{SJ}=2\frac{SI}{SJ}$

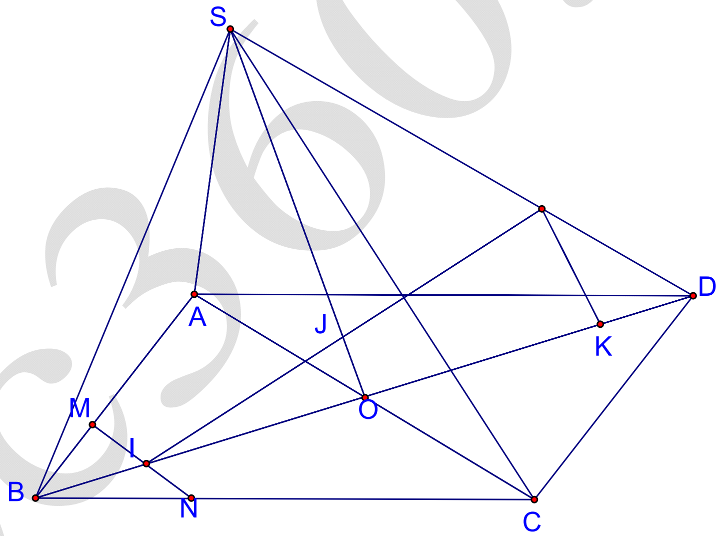
Như vậy, ý B bị loại.

Tương tự, ta chứng minh được $\frac{SB}{SF}+\frac{SD}{SH}=2\frac{SI}{SJ}$.

Từ đây ta thấy ngay ý C bị loại và A là đáp án A là đáp án lựa chọn.

Chú ý: Cho tam giác ABC. Gọi O là trung điểm AC, M, N là hai điểm nằm trên cạnh AB, AC. MN cắt BO tại I. Khi đó: $\frac{BA}{BM}+\frac{BC}{BN}=\frac{2BO}{BI}$.

Câu 31. **Đáp án A**.

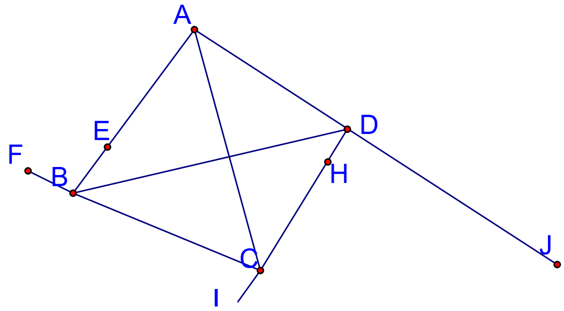


Theo chú ý câu 30 ta có: $\frac{BA}{BM}+\frac{BC}{BN}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4\Rightarrow\frac{2BO}{BI}=4\Rightarrow\frac{BO}{BI}=2\Rightarrow\frac{OI}{BO}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{OI}{OD}=\frac{1}{2}$

.

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác SOD ta có: $\frac{IO}{ID}.\frac{PD}{PS}.\frac{JS}{JO}=1\Rightarrow\frac{JS}{JO}=10\Rightarrow\frac{SJ}{SO}=\frac{10}{11}$

Câu 32. **Đáp án A.**



Dựa vào nhận xét ví dụ 2, ta có:

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\frac{1}{5}.(-5).\frac{1}{2}=1$ nên E,F,H,J đồng phẳng.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\frac{1}{5}.\left(\frac{1}{5}\right).\frac{1}{2}=\frac{1}{25}$ nên E,F,I,J không đồng phẳng.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\left(-\frac{1}{5}\right).(-5).\frac{1}{2}=-1$ nên E,G,H,J không đồng phẳng.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\left(-\frac{1}{5}\right).\left(\frac{1}{5}\right).\frac{1}{2}=\frac{1}{25}$ nên E,G,I,J không đồng phẳng.

Câu 33. **Đáp án D**.

Dựa vào nhận xét ví dụ 2, ta có:

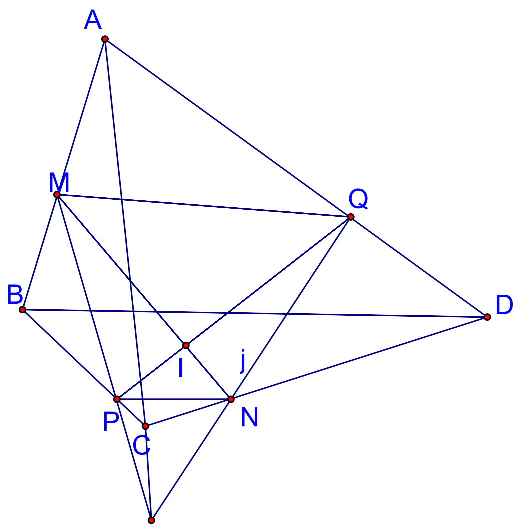
$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\frac{1}{5}.(-5).\frac{1}{2}=1$ nên E,F,H,J đồng phẳng.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DK}}{\overline{AK}}=-2.\left(-\frac{1}{2}\right).(5).\frac{1}{5}=1$ nên E,G,I,K đồng phẳng.

$\frac{\overline{AU}}{\overline{BU}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=\frac{4}{5}.\left(-\frac{1}{2}\right).(-5).\frac{1}{2}=1$ nên U,G,H,J đồng phẳng.

$\frac{\overline{AU}}{\overline{BU}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DK}}{\overline{AK}}=\frac{4}{5}.\left(\frac{1}{5}\right).(5).\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$ nên U,F,I,K không đồng phẳng. Do đó 4 điểm này lập nên 1 tứ diện.

Câu 34. **Đáp án B, A.**



a)Do tứ diện ABCD có 4 mặt nên thiết diện không thể là ngũ giác hay lục giác. Nó chỉ có thể là tam giác hoặc tứ giác.

Trong mp (ABC), gọi $K = MP \cap AC$ (P không phải là trung điểm đoạn BC nên MP cắt AC)

Trong mp(ACD), gọi $Q = KN \cap AD$

Do $Q \in KN \subset (MNP)$ nên $Q = (MNP) \cap AD$

Ta có: $\begin{cases} (MNP) \cap (ABD) = MQ \\ (MNP) \cap (ABC) = MP \\ (MNP) \cap (BCD) = PN \\ (MNP) \cap (ACD) = NQ \end{cases}$

Suy ra thiết diện cần tìm là tứ giác $MPNQ$.

Ta chọn đáp án B.

b)Áp dụng ví dụ 11, do M, N, P, Q đồng phẳng nên $\frac{AM}{BM}.\frac{BP}{CP}.\frac{CN}{DN}.\frac{DQ}{AQ} = 1 \Rightarrow \frac{BP}{CP}.\frac{DQ}{AQ} = 1$

(Do M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD) . Từ đây suy ra $\frac{BP}{CP} = \frac{AQ}{DQ}$.

Giả sử $\frac{BP}{PC} = k$. Khi đó ta suy ra $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{QD}$

Suy ra $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AQ} = -k\left(\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{QD}\right)(1)$

Do J là trung điểm của PQ.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PJ} \\ \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QJ} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BP}(2)$

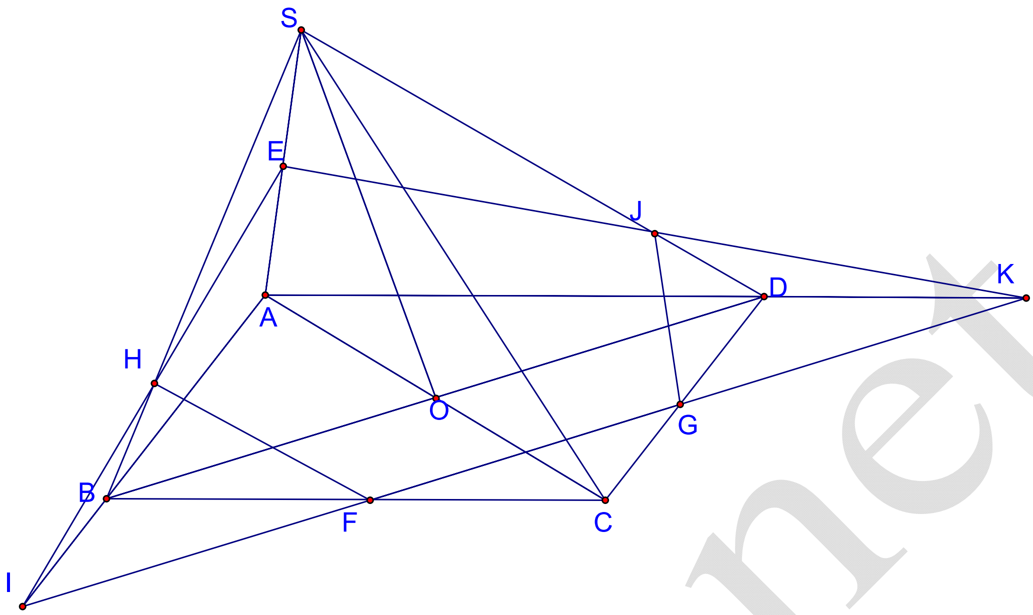
Chứng minh tương tự ta cũng có: $2\overrightarrow{NJ} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DQ}(3)$

Từ (1,2,3) suy ra $\overrightarrow{MJ} = -k\overrightarrow{NJ}$. Điều này dẫn đến M, N, J thẳng hàng. Như vậy I trùng J.

Điều này suy ra $S_{MNPQ} = 2S_{MPN}$.

Chọn đáp án A.

Câu 35. **Đáp án C**.



Trong mp$\left(ABCD\right)$, gọi $I = FG \cap AB; K = FG \cap AD$

Trong mp$\left(SAB\right)$, gọi $H = IE \cap SB$

Trong mp$\left(SAD\right)$, gọi $J = EK \cap SD$.

$\left(EFG\right) \cap \left(ABCD\right) = FG,$

$\left(EFG\right) \cap \left(SCD\right) = GJ$

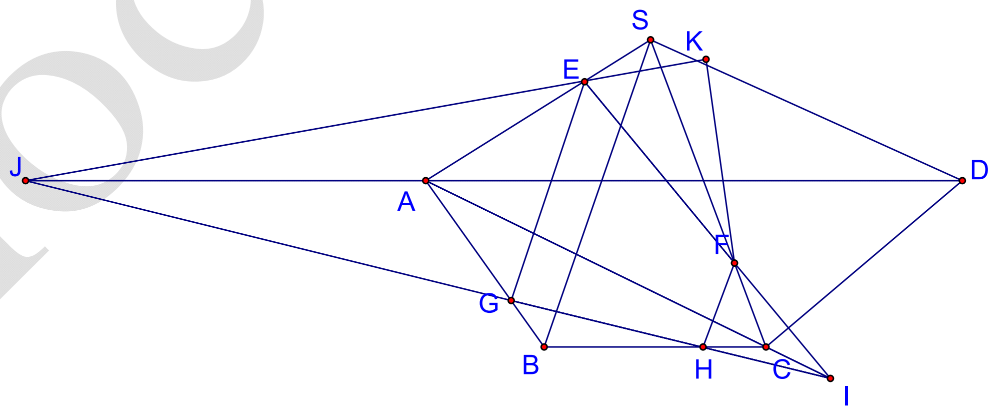
Ta có: $\left(EFG\right) \cap \left(SAD\right) = JE$

$\left(EFG\right) \cap \left(SAB\right) = HE$

$\left(EFG\right) \cap \left(SBC\right) = HF$

Do đó ngũ giác EHFGJ là thiết diện của hình chóp cắt bởi $\left(EFG\right)$

Câu 36. **Đáp án C**.



Trong mp$\left(SAC\right)$, Gọi $I = EF \cap AC$

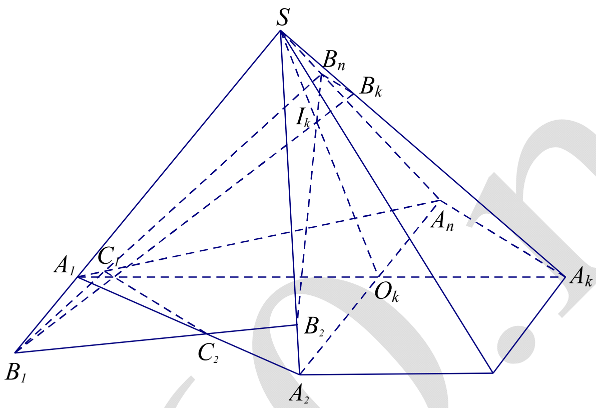
Trong mp$\left(ABCD\right)$, Gọi $H = IG \cap BC, J = IG \cap AB$

Trong mp$\left(SAD\right)$, Gọi $K = JE \cap SD$

Khi đó ta có: $\begin{cases} (EFG)\cap(ABCD)=GH, \\ (EFG)\cap(SCD)=KF \\ (EFG)\cap(SAD)=EK \\ (EFG)\cap(SAB)=GE \\ (EFG)\cap(SBC)=HF \end{cases}$

Do đó ngũ giác EKFHG là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG)

Câu 37. Đáp án D.



Trong mặt phẳng (SA_1A_2) gọi C_2 là giao điểm của B_1B_2 với A_1A_2.

Trong mặt phẳng (SA_1A_n) gọi C_n là giao điểm của B_1B_n với A_1A_n.

Trong mặt phẳng $(A_1A_2...A_n)$ gọi O_k $(k=3,4,...,n-1)$ là giao điểm của A_1A_k với A_2A_n.

Trong mặt phẳng (SA_2A_n), gọi I_k $(k=3,4,...,n-1)$ là giao điểm của SO_k với B_2B_n.

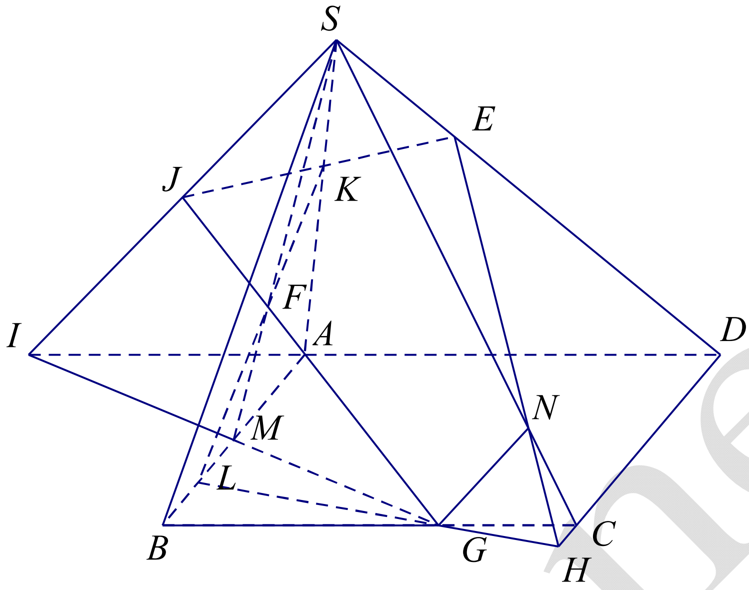
Trong mặt phẳng (SA_1A_k), gọi B_k $(k=3,4,...,n-1)$ là giao điểm của SA_k với B_1I_k.

Do $B_k \in B_1I_k \subset (B_1B_2B_n)$ nên B_k là giao điểm của SA_k $(k=3,4,...,n-1)$ với mặt phẳng $(B_1B_2B_n)$.

Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi $(B_1B_2B_n)$ là đa giác $C_2B_2...B_nC_n$.

Câu 38. Đáp án C.

Cách 1:



Gọi M là trung điểm của AB, khi đó S, F, M thẳng hàng.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I là giao điểm của MG với AD. Khi đó $SI = (SMG) \cap (SAD)$.

Trong mặt phẳng (SMG), gọi J là giao điểm của FG với SI. Ta thấy J thuộc FG nên J thuộc (EFG). Trong (SAD), gọi K là giao điểm của JE với SA. Trong mặt phẳng (SAB), gọi L là giao điểm của KF với AB.

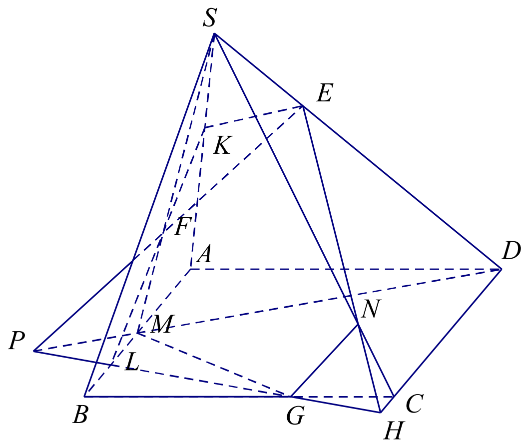
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H là giao điểm của LG với CD. Trong mặt phẳng (SCD), gọi N là giao điểm của EH với SC.

Ta có: $\begin{cases} (EFG) \cap (ABCD) = LG; (EFG) \cap (SBC) = GN \\ (EFG) \cap (SCD) = NE; (EFG) \cap (SAD) = EK \\ (EFG) \cap (SAB) = KL \end{cases}$.

Vậy ngũ giác $LGNEK$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Chú ý: Mấu chốt của ví dụ trên là việc dựng được điểm J là giao điểm của FG với (SAD) (thông qua việc dựng giao tuyến SI của mặt phẳng (SFG) với mặt phẳng (SAD)). Có thể dựng thiết diện trên bằng nhiều cách với việc dựng giao điểm (khác E, F, G) của một trong các đường thẳng EF, FG; hoặc GE với một mặt của hình chóp. Sau đây, tôi xin trình bày cách hai, điểm mấu chốt là xác định giao điểm của EF với mặt phẳng $(ABCD)$.

Cách 2:



Trong mặt phẳng (SMD), gọi P là giao điểm của EF với MD.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H,L là giao điểm của P,G với CD, AB.

Trong mặt phẳng (SAB), gọi K là giao điểm của LF với SA.

Trong mặt phẳng (SCD), gọi N là giao điểm của EH với SC.

Ta có: $\begin{cases}(EFG)\cap(ABCD)=LG;(EFG)\cap(SBC)=GN\\(EFG)\cap(SCD)=NE;(EFG)\cap(SAD)=EK\\(EFG)\cap(SAB)=KL\end{cases}$.

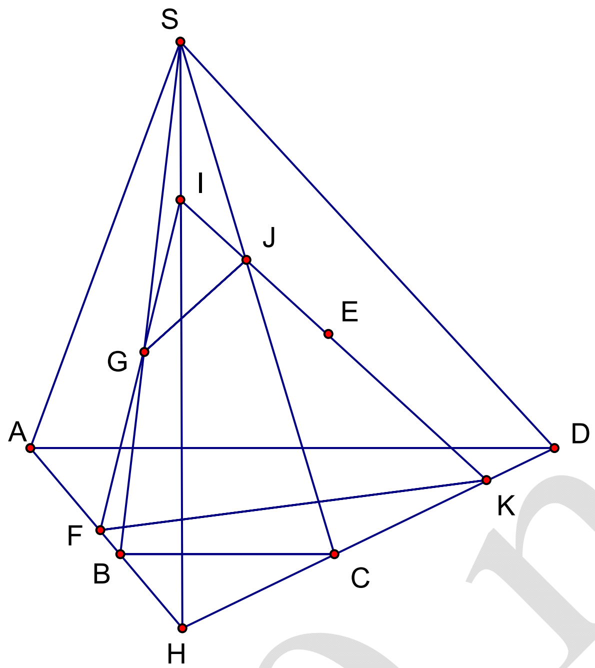
Vậy ngũ giác $LGNEK$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Câu 39. Đáp án B.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H là giao điểm của AB và CD. Trong mặt phẳng (SAB), gọi I là giao điểm của FG và SH.

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1:



Trong mặt phẳng (SCD), IE cắt SC tại J và cắt đoạn CD tại K.

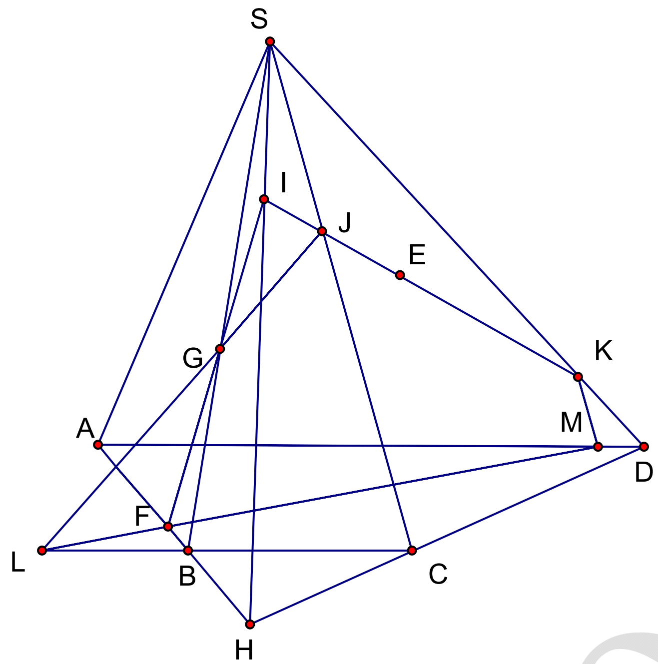
Ta có $J \in IE \subset (EFG)$ nên J là giao điểm của (EFG) với SC,

$K \in IE \subset (EFG)$ nên K là giao điểm của (EFG) với CD.

Ta có $\begin{cases} (EFG)\cap(ABCD) = FK; (EFG)\cap(SAB) = FG \\ (EFG)\cap(SBC) = GJ;\ (EFG)\cap(SCD) = JK \end{cases}$

Suy ra tứ giác $KFGJ$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Trường hợp 2:



Trong mặt phẳng (SCD) , IE cắt SC tại J và cắt đoạn SD tại K (cắt CD tại một điểm nằm ngoài đoạn CD).

Trong mặt phẳng (SBC) :

Nếu GJ song song với BC thì ta có: $\frac{BG}{GS} = \frac{CJ}{JS}$. Gọi T là giao điểm của IE với CD .

Áp dụng định lí Menelaus vào các tam giác SBH và SCH ta có

$\frac{FB}{FH} \cdot \frac{IH}{IS} \cdot \frac{GS}{GB} = 1 = \frac{TC}{TH} \cdot \frac{IH}{IS} \cdot \frac{JS}{JC} \Rightarrow \frac{FB}{FH} = \frac{TC}{TH}$. Điều này chỉ xảy ra khi T thuộc đoạn CD (vô lí)

Do vậy GJ cắt BC , giả sử tại L .

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi M là giao điểm của LF với AD .

Ta có $\begin{cases} (EFG) \cap (ABCD) = FM; (EFG) \cap (SAB) = FG \\ (EFG) \cap (SBC) = GJ; \ (EFG) \cap (SCD) = JK \\ (EFG) \cap (SAD) = KM \end{cases}$

Suy ra ngũ giác $KJGFM$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG) .

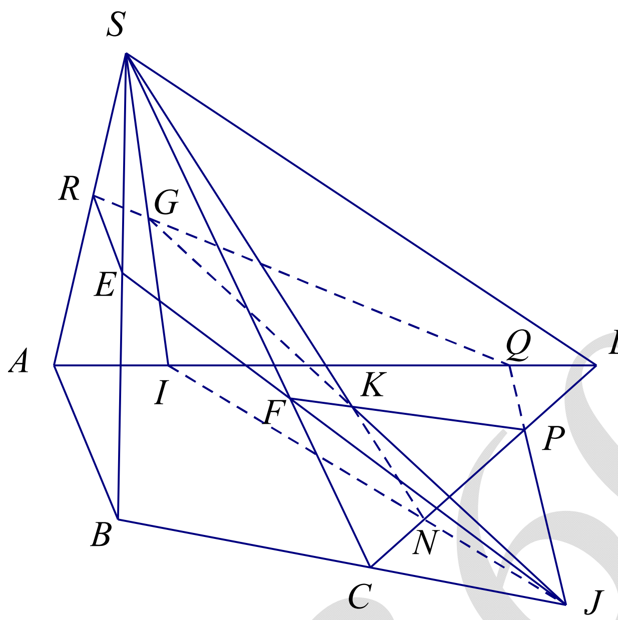
Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) hoặc là tứ giác hoặc là ngũ giác.

Câu 40. **Đáp án B.**

Trong mặt phẳng (SBC) , gọi J là giao điểm của EF với BC . Trong mặt phẳng (SAD) , gọi I là giao điểm của SG với AD . Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi N là giao điểm của IJ với CD . Trong mặt phẳng (SIJ) , gọi K là giáo điểm của JG với SN .

Trong mặt phẳng (SCD) , có hai khả năng xảy ra như sau:

Trường hợp 1: FK cắt đoạn CD tại P .

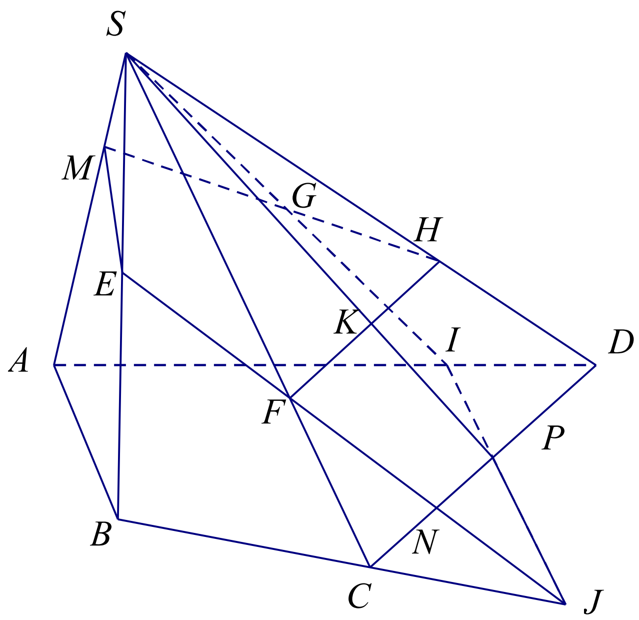


Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi Q là giao điểm của JP với AD . Trong mặt phẳng (SAD) , gọi R là giao điểm của QG với SA .

Ta có $\begin{cases} (EFG)\cap(ABCD) = PQ; (EFG)\cap(SAD) = QR \\ (EFG)\cap(SAB) = RE;\ (EFG)\cap(SBC) = EF \\ (EFG)\cap(SCD) = FP \end{cases}$

Trường hợp này , ngũ giác $REFPQ$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (EFG).

Trường hợp 2: FK cắt SD tại H (FK không cắt đoạn CD).



Trong mặt phẳng (SAD), gọi M là giao điểm của HG với SA (HG không thể cắt đoạn AD vì giả sử ngược lại HG cắt cạnh AD tại O, khi đó JO sẽ cắt cạnh CD (vô lí vì (EFG) đã cắt cạnh SC, SD)).

Khi đó $\begin{cases} (EFG)\cap(SCD)=FH;\ (EFG)\cap(SAD)=MH \\ (EFG)\cap(SAB)=ME;\ (EFG)\cap(SBC)=EF \end{cases}$

Trường hợp này, tứ giác $MEFH$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Câu 41. Đáp án A.

Trong mặt phẳng (BCD), gọi I là giao điểm của NP với CD.

Trong mặt phẳng (ACD), gọi Q là giao điểm của AD và MI. Suy ra Q là giao điểm của AD với (MNP). Khi đó, tứ giác $MNPQ$ là thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Trong tam giác BCI ta có P là trọng tâm của tam giác suy ra D là trung điểm của CI.

Trong tam giác ACI có Q là trọng tâm của tam giác nên $\dfrac{QA}{QD}=2$.

Ta có $\dfrac{IP}{IN}=\dfrac{IQ}{IM}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow PQ//MN$.

Suy ra $MNPQ$ là hình thang với đáy lớn MN.

Ta có: $AQ=4a, AM=3a=MN, PQ=2a$. Áp dụng định lí cosin trong tam giác MAQ ta có:

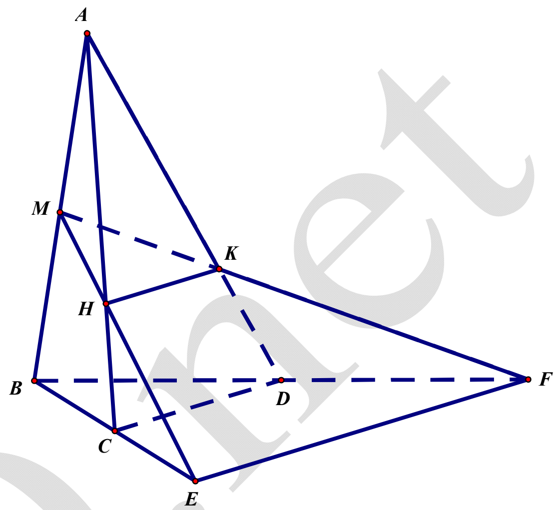
$MQ^2=AM^2+AQ^2-2AM.AQ.\cos 60^0=16a^2+9a^2-12a^2=13a^2\Rightarrow MQ=a\sqrt{13}$.

Tương tự ta cũng tính được $NP=a\sqrt{13}$.

Dễ thấy $MNPQ$ là hình thang cân. Do đó:

$$S = \frac{(MN + PQ)\sqrt{MQ^2 - \left(\frac{MN - PQ}{2}\right)^2}}{2} = \frac{5a^2\sqrt{51}}{4}.$$

Câu 42. **Đáp án C.**



Trong mặt phẳng (ABC), gọi H là giao điểm của ME với AC.

Trong mặt phẳng (ABD), gọi K là giao điểm của MF và AD.

Ta có: $\begin{cases} (MEF) \cap (ABC) = MH \\ (MEF) \cap (ABD) = MK \\ (MEF) \cap (ACD) = HK \end{cases}$.

Do đó tam giác MHK là thiết diện của tứ diện cắt bởi (MEF).

Dễ thấy H, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABE và ABF.

Ta có: $AH = AK = HK = \frac{2a}{3}$.

Xét hai tam giác AMH và AMK có AM chung, $\widehat{MAH} = \widehat{MAK} = 60^0, AH = AK = \frac{2a}{3}$ nên hai tam giác này bằng nhau. Suy ra $MH = MK$. Vậy tam giác MHK cân tại M.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác AMH:

$$MH^2 = AM^2 + AH^2 - 2AMAH.\cos 60^0 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{13a^2}{36} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

Gọi I là trung điểm của đoạn HK. Ta có $MI \perp HK$.

Suy ra: $MI^2 = MH^2 - HI^2 = \frac{13a^2}{36} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow MI = \frac{a}{2}$.

Diện tích thiết diện MHK là: $S = \frac{1}{2}MI.HK = \frac{1}{2}.\frac{2a}{3}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{6}$.

Câu 43. **Đáp án C.**

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi E là giao điểm của MN với DC và F là trung điểm của CD.Dễ thấy Q chính là giao điểm của PE với SD.

Ta có: $ME = BC$. Áp dụng Thales ta có: $\frac{ND}{MF} = \frac{ED}{EF} = \frac{1}{2} \Rightarrow EF = \frac{1}{2}EF$.

Suy ra D là trung điểm EF.

PQ là đường trung bình của tam giác EPF ta có: $\frac{DQ}{PF} = \frac{1}{2}$.

PF là đường trung bình của tam giác CSD ta có: $\frac{DS}{PF} = 2$.

Từ đó suy ra: $\frac{SD}{DQ}=4\Rightarrow\frac{SQ}{SD}=\frac{3}{4}$.

Câu 44. Đáp án B.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I là giao điểm của MN với AO.

Dễ thấy H chính là giao điểm của PO với SC.

Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên I là trung điểm AO. Suy ra $\frac{AI}{AC}=\frac{1}{4}$ và PI là đường trung bình của tam giác OSA. Do đó: $IH//SA$.

Áp dụng định lí Thales ta có: $\frac{SH}{SD}=\frac{AI}{AC}=\frac{1}{4}$.

Câu 45. Đáp án D.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $I=BD\cap MN, O=AC\cap BD$.

Dễ thấy R chính là giao điểm của IP với SB.

Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên I là trung điểm DO. Suy ra $\frac{DI}{IB}=\frac{1}{3}$.

Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác SBD ta có:

$$\frac{BR}{RS}.\frac{PS}{PD}.\frac{BI}{ID}=1\Rightarrow\frac{BR}{RS}.2.\frac{1}{3}=1\Rightarrow\frac{BR}{RS}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{SR}{SB}=\frac{2}{5}$$