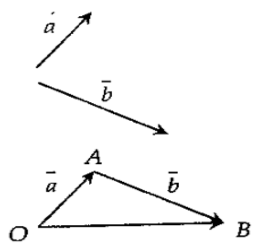
VÉC TƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT

Cho các véc tơ tùy ý $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ và $k,l\in\mathbb{R}$.

1. Cộng véc tơ:



Lấy điểm O tùy ý trong không gian, vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},$ thì $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$

Quy tắc ba điểm: Cho ba điểm M,N,K bất kỳ thì $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KN}$

2. Trừ véc tơ: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{KN}-\overrightarrow{KM}$.

Quy tắc hình bình hành: Cho hình bình hành $ABCD$ ta có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

3. Tích véc tơ:

Tích của véc tơ $\vec{a}$ với một số thực k là một véc tơ. Kí hiệu là $k.\vec{a}$

+) Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k>0$.

+) Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k<0$.

+) $|k.\vec{a}|=|k|.|\vec{a}|$.

Hệ quả: Nếu I là trung điểm của A,B,O tùy ý thì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$.

4. Tích vô hướng của hai véc tơ.

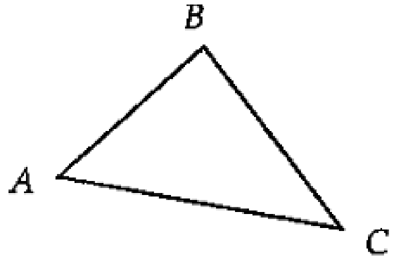
+) Định nghĩa: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

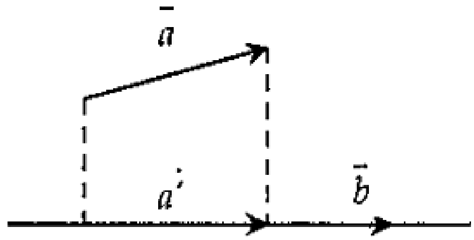
+) Hệ quả: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$.

+) $\vec{a}^2=\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

+) Với ba điểm A,B,C ta có $AB.AC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$.

+) Quy tắc hình chiếu: Cho hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$. Gọi $\vec{a'}$ là hình chiếu vuông góc của $\vec{a}$ trên đường thẳng chứa $\vec{b}$ thì: $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a'}.\vec{b}$.





5. Định nghĩa: Ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song hoặc nằm trên một mặt phẳng.

6. Các định lý:

a) Cho $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists m,n\in\mathbb{R}:\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ (với m,n xác định duy nhất).

b) Nếu ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng thì mọi véc tơ $\vec{x}$ đều được biểu diễn dưới dạng: $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+k\vec{c}$ với m,n,k xác định duy nhất.

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ VÉC TƠ TRONG KHÔNG GIAN.

Ví dụ 1: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh AB và G là trọng tâm cảu tam giác BCD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Phân tích véc tơ $\overrightarrow{MG}$ theo $\vec{d},\vec{b},\vec{c}$.

A. $\overrightarrow{MG}=-\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}$.

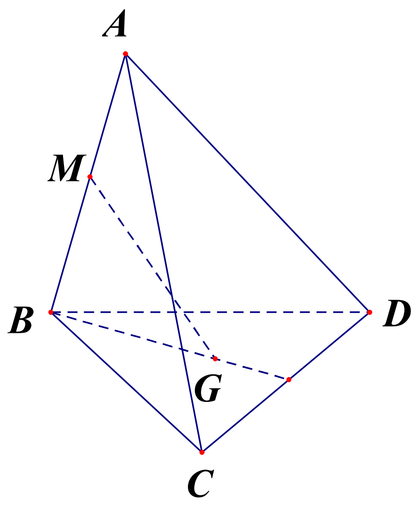
B. $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}$.

C. $\overrightarrow{MG}=-\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}$.

D. $\overrightarrow{MG}=-\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{d}$.

Lời giải

Đáp án A



$$\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}.\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}$$

Ví dụ 2: Cho tứ diện đều $ABCD, M$ và N theo thứ tự là trung điểm của cạnh AB và CD. Mệnh đề nào sau đây sai?.

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

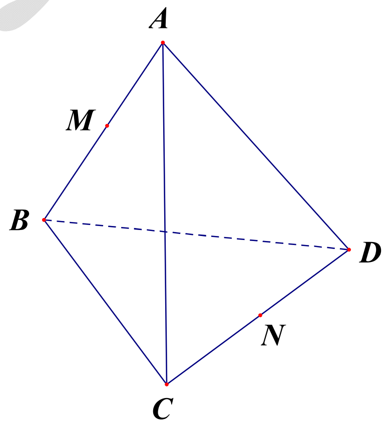
B. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

C. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=-4\overrightarrow{NM}$.

D. $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}-4\overrightarrow{MN}=\vec{0}$.

Lời giải:

Đáp án D



A.Đúng vì: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

B. Đúng vì: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}\right)+\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}\right)$

$=2\overrightarrow{MN}+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)+\left(\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{NC}\right)=2\overrightarrow{MN}$

C.Đúng vì: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{BN}=2\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}\right)=-2\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}\right)=-4\overrightarrow{NM}$.

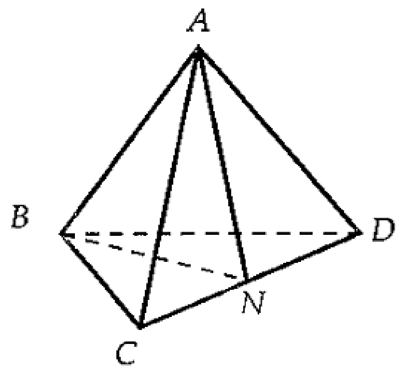
Vậy D sai

Ví dụ 3: Cho tứ diện đều $ABCD$ có tam giác BCD đều, $AD = AC$. Giá tri của $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$ là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:

Đáp án B



Gọi N là trung điểm của CD. Tam giác đều BCD nên $BN \perp CD$. Tam giác ACD cân tại A nên $AN \perp CD$ ta có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB}\right).\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{NB}.\overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|} = 0.$$

Ví dụ 4: Cho tứ diện đều $ABCD$ có $AB = CD = a; BC = AD = b; CA = BD = c$. Giá trị của $\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}\right)$ là:

A. $\frac{a^2-c^2}{b^2}$. **B.** $\frac{b^2-c^2}{a^2}$. **C.** $\frac{c^2-a^2}{b^2}$. **D.** $\frac{a^2-b^2}{c^2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$$

$$= \frac{1}{2}\left(CB^2 + CD^2 - BD^2\right) - \frac{1}{2}\left(CB^2 + CA^2 - AB^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(AB^2 + CD^2 - BD^2 - CA^2\right) = \frac{1}{2}\left(2a^2 - 2c^2\right) = a^2 - c^2$$

Vậy $\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}\right) = \frac{a^2-c^2}{\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{DA}\right|} = \frac{a^2-c^2}{b^2}$.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng (α) cho tứ giác $ABCD$ và một điểm S tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

B. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{CD}$ (Với S là điểm tùy ý).

C. Nếu tồn tại điểm S mà $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ khi và chỉ khi O là giao điểm của AC và BD.

Lời giải

Đáp án C

A. Sai vì $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}=\vec{0}\Leftrightarrow B\equiv C$ (Vô lí)

B. Sai vì: Gọi O và O' theo thứ tự là trung điểm của AC và BD. Ta có

$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$ và $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO'}\Leftrightarrow\overrightarrow{SO}=\overrightarrow{SO'}\Leftrightarrow O\equiv O'$ điều này không đúng nếu $ABCD$ không phải là hình bình hành.

C. Đúng – Chứng minh tương tự như ý B.

Ví dụ 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AA', O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Cặp ba vecto nào sau đây đồng phẳng?

A. $\overrightarrow{MO},\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{B'C}$.

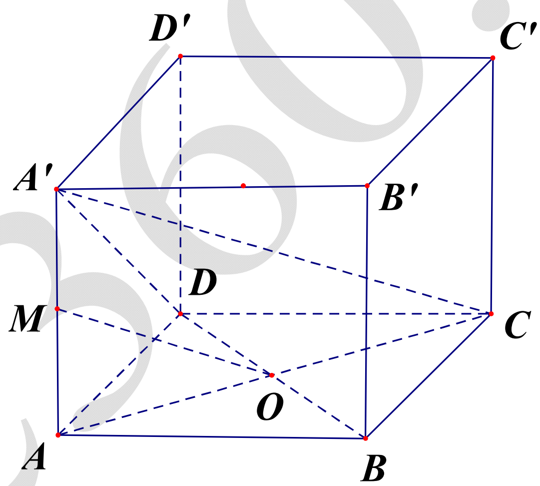
B. $\overrightarrow{MO},\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'D'}$.

C. $\overrightarrow{MO},\overrightarrow{DC'}$ và $\overrightarrow{B'C}$.

D. $\overrightarrow{MO},\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{B'C'}$.

Lời giải

Đáp án A



Cách 1: Ta có $MO//(CDA'B');AB//A'B'\Rightarrow AB//(CDA'B'),B'C'$ nằm trong mặt phẳng $(CDA'B')$ nên các vecto $\overrightarrow{MO},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng vì có giá song song hay nằm trên mặt phẳng $(CDA'B')$.

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{\overrightarrow{A'C}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B'C}$.

Vậy các vecto $\overrightarrow{MO},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.

Ví dụ 7: Cho tứ diện $ABCD$. M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Bộ ba vecto nào dưới đây đồng phẳng?

A. $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AD}$.

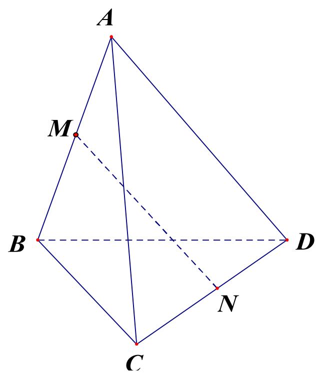
B. $\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{MN}$.

C. $\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{MN}$.

D. $\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{MA}$.

Lời giải

Đáp án C



$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

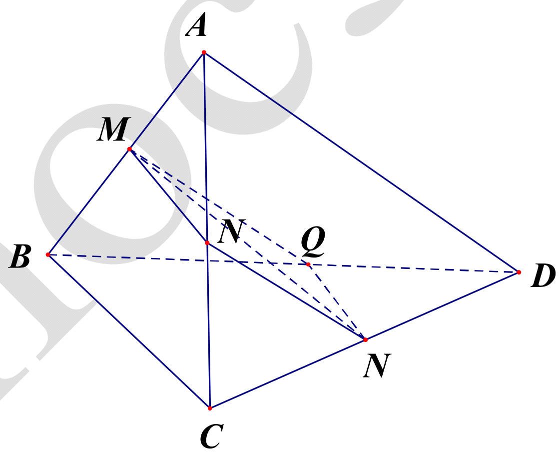
Vậy ba vecto $\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{MN}$. đồng phẳng.

Ví dụ 8: Cho tứ diện $ABCD$. M là điểm trên đoạn AB và $MB = 2MA$. N là điểm trên đường thẳng CD mà $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CD}$. Nếu $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng thì giá trị của k là:

A. $k = \frac{2}{3}$. **B.** $k = \frac{3}{2}$. **C.** $k = \frac{4}{3}$. **D.** $k = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Đáp án A



Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với AD và BC.

(α) cắt AC tại P, BD tại Q và CD tại N. Ta có $MP//PN//AD$.

Các vecto $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ có giá song song hay nằm trong mặt phẳng (α) nên đồng phẳng.

Ta có $\overrightarrow{CN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$. Vậy $k=\frac{2}{3}$.

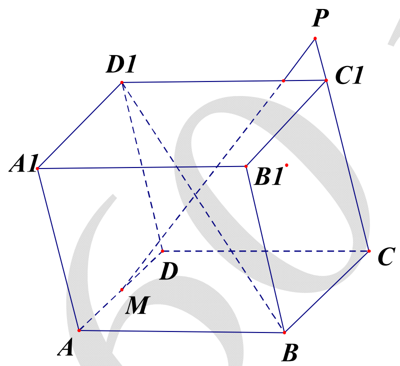
Ví dụ 9: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. M là điểm trên cạnh AD sao cho $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. N là điểm trên đường thẳng BD_1. P là điểm trên đường thẳng CC_1 sao cho M,N,P thẳng hàng.

Tính $\frac{\left|\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\overrightarrow{NP}\right|}$.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Đáp án B



Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$ và $\overrightarrow{BN}=x\overrightarrow{BD_1};\overrightarrow{CP}=y\overrightarrow{CC_1}=y\vec{c}$.

STUDYTIP

Ta biểu thi hai vecto $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP}$ theo các vecto $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

Ba điểm M,N,P thẳng hàng nên $\overrightarrow{MN}=\alpha.\overrightarrow{NP}(1)$.

Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$

$=-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{a}+x\overrightarrow{BD_1}=-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{a}+x\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}\right)$

$=-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{a}+x\left(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=(1-x)\vec{a}+\left(x-\frac{1}{3}\right)\vec{b}+x\vec{c}\ (2)$

Ta lại có:

$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=-x\overrightarrow{BD_1}+\vec{b}+y\vec{c}=-x\left(\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}\right)+\vec{b}+y\vec{c}$

$\Rightarrow\overrightarrow{NP}=x\vec{a}+(1-x)\vec{b}+(y-x)\vec{c}\ (3)$

Thay (2), (3) vào (1) ta được:

$\begin{cases} 1-x=\alpha x \\ x-\dfrac{1}{3}=\alpha(1-x) \\ x=\alpha(y-x) \end{cases}$. Giải hệ ta được $\alpha=\dfrac{2}{3}, x=\dfrac{3}{5}, y=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $\dfrac{\left|\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\overrightarrow{NP}\right|}=\dfrac{2}{3}$.

Ví dụ 10: Cho tứ diện đều ABC**D**. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CB, AD và G là trọng tâm tam giác BCD, α là góc giữa 2 vectơ $\overrightarrow{MG}$ và $\overrightarrow{NP}$. Khi đó $\cos\alpha$ có giá trị là:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

Đáp án: C

Lời giải:

Đặt $\overrightarrow{AB}=a; \overrightarrow{AC}=b; \overrightarrow{AD}=c;$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \Rightarrow \overrightarrow{MG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{6}(-\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c})$

$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$

Không mất tính tổng quát, giả sử độ dài các cạnh của tứ diện đều bằng 1

$\Rightarrow |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ và $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{c}.\vec{a}=1.1.\cos 60^0=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow cos\alpha=\cos(\overrightarrow{MG},\overrightarrow{PN})=\dfrac{\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{PN}}{\left|\overrightarrow{MG}\right|.\left|\overrightarrow{PN}\right|}$ (*)

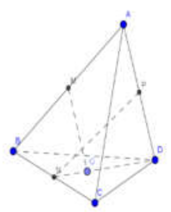
Ta có: $\Rightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{PN}=\dfrac{1}{12}(-\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c})(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$

$=\dfrac{1}{12}(-\vec{a}^2-\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{b}^2-2\vec{b}\vec{c}+2\vec{a}\vec{c}+2\vec{b}\vec{c}-2\vec{c}^2)=\dfrac{1}{12}$

$\left|\overrightarrow{MG}\right|=\dfrac{1}{6}\sqrt{(-\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c})^2}=\dfrac{1}{2}; \left|\overrightarrow{PN}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Thay vào (*) ta được

$\Rightarrow cos\alpha == \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}.$ (*)



C. **Bài tập rèn luyện kỹ năng**

Câu 1: Cho $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp, với K là trung điểm CC_1. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

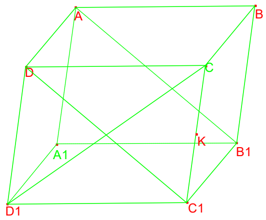
B. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA_1}$

C. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$

D. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

Hướng dẫn giải

Có $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$



Chọn A

Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với $M = CD_1 \cap C_1D$. Khi đó:

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$

Hướng dẫn giải

(hình vẽ câu 1)

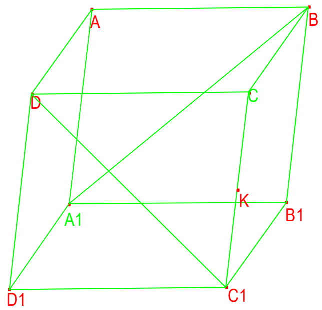
Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC_1} = AD + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}) = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$

Chọn B

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khi đó: tổng 3 góc $(\overrightarrow{D_1A_1}, \overrightarrow{CC_1}) + (\overrightarrow{C_1B}, \overrightarrow{DD_1}) + (\overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{A_1B})$ là:

A. 180^0 **B.** 290^0 **C.** 360^0 **D.** 315^0

Hướng dẫn giải



Ta có:

$(\overrightarrow{D_1A_1},\overrightarrow{CC_1}) = 90^0$

$(\overrightarrow{C_1B},\overrightarrow{DD_1}) = (\overrightarrow{C_1B},\overrightarrow{CC_1}) = 135^0$

$(\overrightarrow{DC_1},\overrightarrow{A_1B}) = (\overrightarrow{DC_1},\overrightarrow{D_1C}) = 90^0$

$\Rightarrow (\overrightarrow{D_1A_1},\overrightarrow{CC_1}) + (\overrightarrow{C_1B},\overrightarrow{DD_1}) + (\overrightarrow{DC_1},\overrightarrow{A_1B}) = 90^0 + 135^0 + 90^0 = 315^0$

Chọn D

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, đặt $\alpha = (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DC_1})$; $\beta = (\overrightarrow{DA_1},\overrightarrow{BB_1})$; $\gamma = (\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{C_1C})$ Khi đó: là $\alpha + \beta + \gamma$:

A. 360^0 **B.** 375^0 **C.** 315^0 **D.** 275^0

Hướng dẫn giải

(hình câu 3)

$\alpha = (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DC_1}) = (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB_1}) = 60^0$

$\beta = (\overrightarrow{DA_1},\overrightarrow{BB_1}) = (\overrightarrow{DA_1},\overrightarrow{A_1A}) = 135^0$

$\gamma = (\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{C_1C}) = (\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{A_1A}) = 180^0$

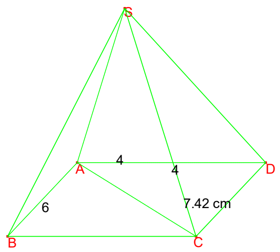
$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 60^0 + 135^0 + 180^0 = 375^0$

Chọn B

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, AB=6; AD=4; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 12$. Tính $(\overrightarrow{SC}.-\overrightarrow{SA})^2$.

A. 76 **B.** 28 **C.** 52 **D.** 40

Hướng dẫn giải



$(\overrightarrow{SC}.-\overrightarrow{SA})^2. = \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$= 6^2 + 4^2 + 2(-12) = 28$

Chọn B

Câu 6: Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Ba vectơ đồng phẳng là 3 vec tơ cùng nằm trong một mặt phẳng

B. Ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng thì có $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, với m, n là các số duy nhất

C. Ba vectơ đồng phẳng khi có $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là vec tơ bất kỳ

D. Cả 3 mệnh đề trên đều sai

Hướng dẫn giải

-Phương án A: sai vi chỉ cần giá của chúng song song hoặc nằm trên một mặt phẳng nào đó

Phương án B: Sai $\vec{a},\vec{b}$ phải không cùng phương.

Phương án C sai

Vậy chọn D

Chọn D

Câu 7: Cho hình tứ diện ABCD, trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây sai?

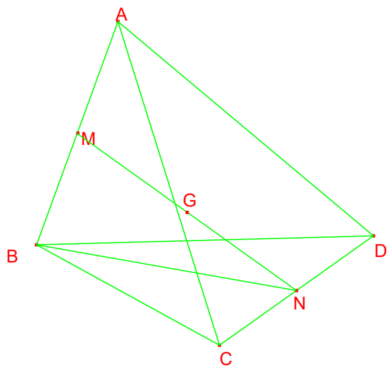
A. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

Hướng dẫn giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD

$\Rightarrow$ G là trung điểm của MN $\Rightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ $\Rightarrow$B đúng

Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GD}$

$= 4\overrightarrow{OG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 4\overrightarrow{OG}$ $\Rightarrow$A đúng

Khi O trùng A thì D đúng vậy đáp án là **C.**

Chọn C

Câu 8: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}; \vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}; \vec{z} = -3\vec{a} - 2\vec{c}$ Chọn mênh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A.Hai vec tơ $\vec{y}, \vec{z}$ cùng phương

B. Hai vec tơ $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương

C.Hai vec tơ $\vec{x}, \vec{z}$ cùng phương

D.Hai vec tơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng

Hướng dẫn giải

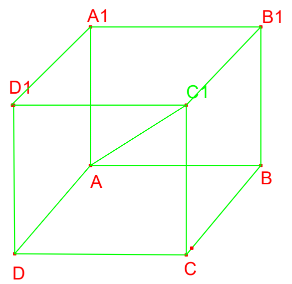
Ta thấy $\vec{y} = -2\vec{x}$ nên $\vec{x}, \vec{y}$ cùng phương.

Chọn B

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, Tìm giá trị của k thích hợp để $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{AC_1}$)

A.k=4 **B.** k=1 **C.** k=0 **D.** k=2

Hướng dẫn giải



Có $\underrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1} \Rightarrow k = 1$

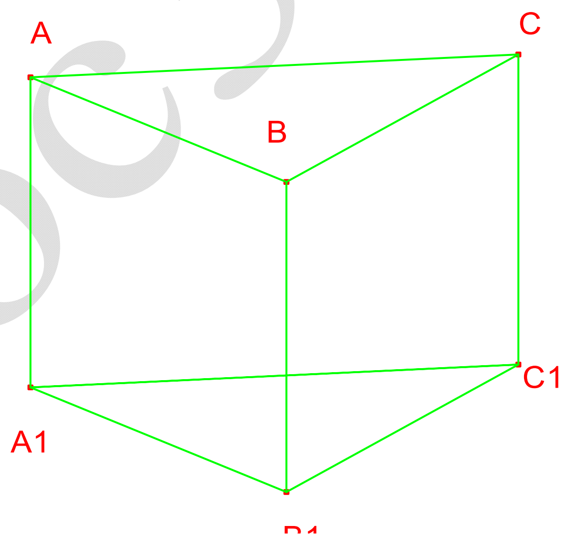
Chọn B

Câu 10: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1} = a;\ \overrightarrow{AB} = b; \overrightarrow{AC} = c;\ \overrightarrow{BC_1} = d$ trong các đẳng thức sau đẳng thức nào đúng.

A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ **B.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$

C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ **D.** $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

Hướng dẫn giải



Ta có: $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

Chọn C

Câu 11: Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?

A. Nếu giá của ba vectơ cắt nhau từng đôi một thì 3 vectơ đồng phẳng

B. Nếu ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ có một vec tơ $\vec{0}$ thì ba vectơ đồng phẳng

C. Nếu giá của ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vec tơ đó đồng phẳng

D. Nếu trong ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ có ha vec tơ cùng phương thì ba vectơ đó đồng phẳng

Hướng dẫn giải

Chọn A

Câu 12: Cho $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp, trong các khẳng định sau khẳng định sai:

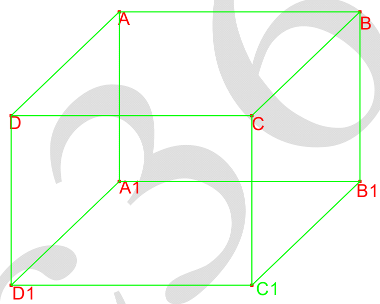
A. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=2\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{CA_1}+2\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$

C. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}$

D. $\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CC_1}$

Hướng dẫn giải



Ta có: $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}$ $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{C_1A_1}$

Chọn C

Câu 13: Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Tứ giác ABCD là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

B. Tứ giác ABCD là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

C. Cho hình chóp S.ABCD, nếu có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì tứ giác ABCD là hình bình hành

D. Tứ giác ABCD là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ Gọi I, K lần lượt là tâm của các hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng

B. $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$

C. Bà vec tơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng

D. $\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{BC}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 15: Cho tứ diện ABCD. Trên các cạnh AC, BD lần lượt lấy M, Nsao cho AM=3MD; BN=3NC. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AD, BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

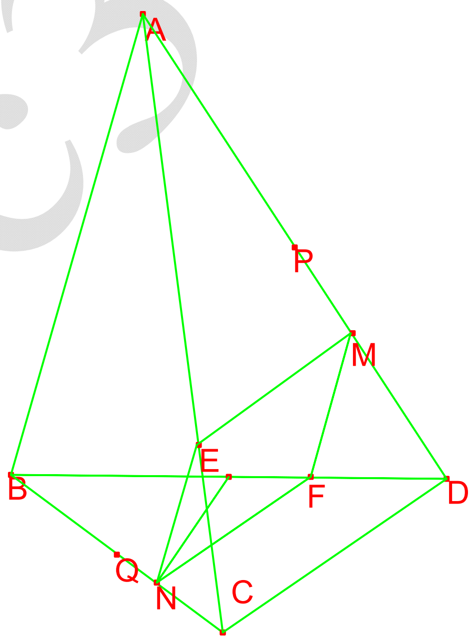
A. Các vec tơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng

B. Các vec tơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng

C. Các vec tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng

D. Các vec tơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

Hướng dẫn giải



Lấy điểm E trên cạnh AC sao cho AE=3EC, lấy F trên BD sao cho BF=3FD

$$\begin{cases} NE//AB, NE = \dfrac{1}{3}AB \\ MF//AB, MF = \dfrac{1}{3}AB \end{cases} \Rightarrow NE//MF, NE//MF$$

$\Rightarrow$ NEMF là hình bình hành và 3 vec tơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (MFNE) $\Rightarrow \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

$\Rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

Chọn A

Câu 16. Cho tứ diện ABCD có các cạnh đầu bằng **A.** Hãy chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

C. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$

D. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} = 0$

Hướng dẫn giải

(sử dụng hình câu 7)

Phương án A:

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \vec{0} + \overrightarrow{BD} \neq \vec{0} \Rightarrow A$ sai

Phương án B: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a.a.\cos 60^0 = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow B$ sai

Phương án B $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 = 0 \Rightarrow C$ sai

Chọn D

Câu 17: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của AD.Chọn khẳng định đúng:

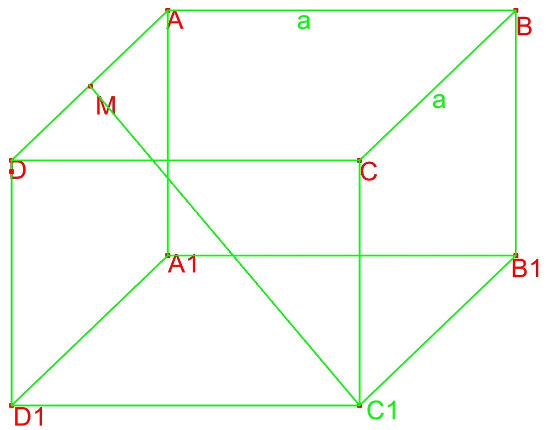
A. $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$

B. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1D_1} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$

C. $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1C} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$

D. $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = 2\overrightarrow{B_1D}$

Hướng dẫn giải



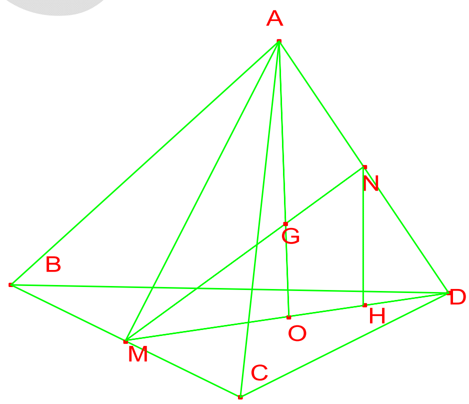
Ta có $\overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_1C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$

Chọn B

Câu 18: Cho tứ diện ABCD và điểm G thỏa $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi O là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{OG}$ **B.** $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{OG}$

C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{OG}$ **D.** $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{OG}$



Hướng dẫn giải

Gọi M, N là trung điểm của BC, AD

$\Rightarrow$ G là trung điểm MN. Gọi H là hình chiếu của N lên MD $\Rightarrow$ NH là đường trung bình của ΔAOD và OG là đường trung bình của ΔMNH

$\Rightarrow OG = \frac{1}{2}NH = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}AO \Rightarrow OG = \frac{1}{2}NH = \frac{1}{4}.AO$

$hay\ \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{OG}$

Chọn C

Câu 19: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, Nlaafn lượt là trung điểm của AD, BC. Trong ccs khẳng định sau, khẳng định nào sai?

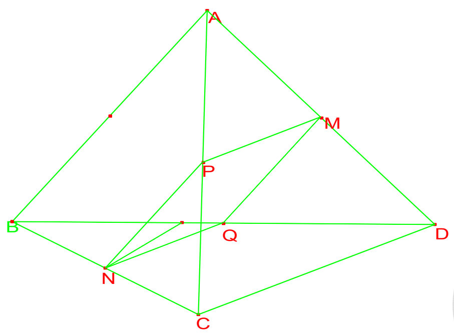
A. Các vec tơ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

B. Các vec tơ $\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ không đồng phẳng

C. Các vec tơ $\overrightarrow{AN},\ \overrightarrow{CM},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

D. Các vec tơ $\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

Hướng dẫn giải



Gọi P, Q lần lượt là trung điểm AC, BD

$\Rightarrow$ Ba vec tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{MN}$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (MNPQ) nên 3 véc tơ này đồng phẳng $\Rightarrow$ A đúng

Ba vec tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng $\Rightarrow$ B đúng

Ba vec tơ $\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM},\overrightarrow{MN}$ có giá không thể song song với mặt phẳng nào $\Rightarrow$ C sai

Chọn C

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$, có cạnh **A.**Hãy tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

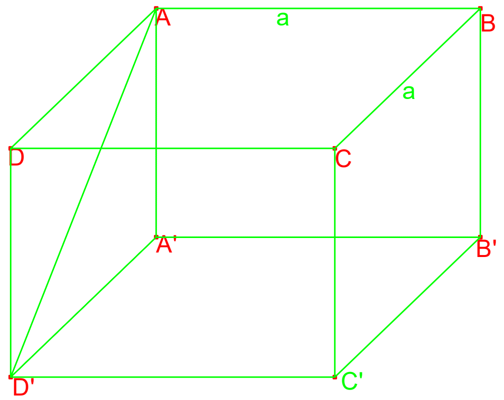
A. $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{CC'}=-a^2$

B. $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AB'}=a^2$

C. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{CD'}=0$

D. $\left|\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải



Xết phương án A có: $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AA'} = \left|\overrightarrow{AD'}\right|.\left|\overrightarrow{AA'}\right|\cos 45^0 = a^2$

Chọn A

Câu 21: Trong không gian cho hai tia Ax, By chéo nhau sao cho AB vuông góc với cả hai tia đó. Các điểm M, N lần lượt thay đổi trên Ax, By sao cho độ dài đoạn MN luôn bằng giá trị c không đổi (c$\geq$ AB). Gọi φ là góc giữa Ax, By. Giá trị lơn nhất của AM, BN

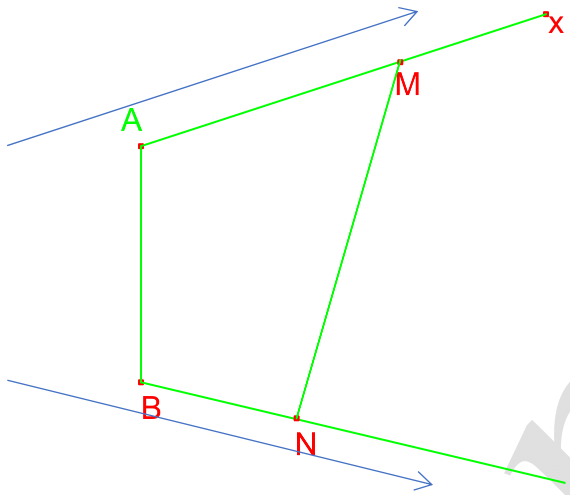
A. $\dfrac{c^2 - AB^2}{2(1-\cos\varphi)}$

B. $\dfrac{c^2 - AB^2}{2(1+\cos\varphi)}$

C. $\dfrac{c^2 + AB^2}{2(1-\cos\varphi)}$

D. $\dfrac{c^2 + AB^2}{2(1+\cos\varphi)}$

Hướng dẫn giải



Ta có: $c^2 = MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN})^2$

$\geq AB^2 + 2AM.BN.(1-cos\varphi) \Rightarrow AM.BN. \leq \dfrac{c^2 - AB^2}{2(1-\cos\varphi)}$

Vậy biểu thức AM.BN đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{c^2 - AB^2}{2(1-\cos\varphi)}$

Chọn A

$= AM^2 + AB^2 + BN^2 - 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN} == AM^2 + AB^2 + BN^2 - 2AM.BN.\cos\varphi$