TIẾP TUYẾN VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

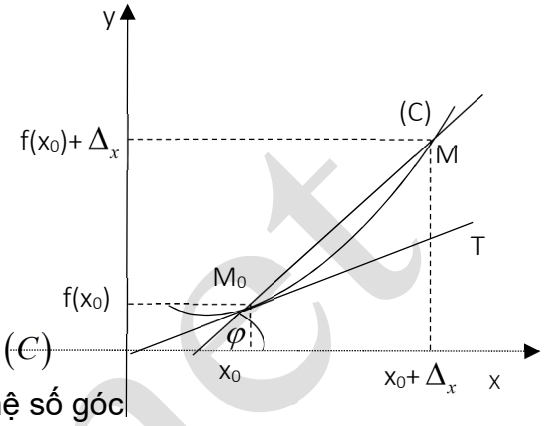
A. LÝ THUYẾT

1. Tiếp tuyến của đường cong phẳng.

Định nghĩa:

Nếu cát tuyến M_0M có vị trí giới hạn M_0T. Khi điểm M di chuyển trên (C) và dần đến M_0 thì đường thẳng M_0T gọi là tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm M_0.

Điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ được gọi là tiếp điểm.



Định lý:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $(a;b)$ và (C) là đồ thị hàm số. Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại $M_0(x_0;f(x_0))$.

2. Phương trình tiếp tuyến

a. Tiếp tuyến tại một điểm

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y=f(x)$ tại điểm $M_0(x_0;y_0)\in(C)$:

$$\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0}$$

STUDY TIP

- Hệ số góc $k=f'(x_0)$.

- Nếu cho x_0 thì thế vào $y=f(x)$ tìm y_0.

- Nếu cho y_0 thì thế vào $y=f(x)$ giải phương trình tìm x_0.

b. Tiếp tuyến biết hệ số góc

- Hệ số góc k của tiếp tuyến: $k=f'(x_0)$ $(*)$

Giải phương trình $(*)$ ta tìm được hoành độ của tiếp điểm x_0 thế và phương trình $y=f(x)$ tìm tung độ y_0.

- Khi đó phương trình tiếp tuyến: $\boxed{y=k(x-x_0)+y_0}$ (d)

STUDY TIP

** Tiếp tuyến $d//\Delta$: $y=ax+b\Rightarrow k=a$.*

** Tiếp tuyến $d\perp\Delta$: $y=ax+b\Rightarrow k.a=-1$.*

** $k=\tan\alpha$, với α là góc giữa d và tia Ox.*

c. Tiếp tuyến đi qua một điểm

Lập phương trình tiếp tuyến d với (C) biết d đi qua điểm $M(x_M;y_M)$

Phương pháp:

- Gọi $M_0(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm.
- Phương trình tiếp tuyến tại $M_0: y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ (d).
- Vì đường thẳng d đi qua M nên $y_M-y_0=f'(x_0)(x_M-x_0)$. Giải phương trình ta tìm được x_0 rồi suy ra y_0.

STUDY TIP

Điểm $M(x_0;y_0)$ có thể thuộc hoặc không thuộc đường cong (C)

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ TIẾP TUYẾN VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-1;3)$ là:

A. $y=-3x.$ **B.** $y=-x+3.$ **C.** $y=-9x+6.$ **D.** $y=-9x-6.$

Đáp án A.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2+6x$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(-1;3)$ là: $y=y'(-1)(x+1)+3 \Leftrightarrow y=-3x$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\dfrac{4}{x-1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ là:

A. $y=-x+2.$ **B.** $y=x+2.$ **C.** $y=x-1.$ **D.** $y=-x-3.$

Đáp án D.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$y'=-\dfrac{4}{(x-1)^2}; y'(-1)=-1; y(-1)=-2$

Phương trình tiếp tuyến tại $M_0(-1;-2)$ là: $y=y'(-1)(x+1)-y(-1)=-x-3$

STUDY TIP

Học sinh nhận biết các bài toán về viết phương trình tiếp tuyến tại 1 điểm

- Cho $M(x_0;y_0)\in(C)$.

- Cho x_0 tìm y_0.

- Cho y_0 tìm x_0.

-

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=x^4+2x^2-1\ (C)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có tung độ $y_0=2$ là:

A. $y=8x-6; y=-8x-6.$ **B.** $y=8x-6; y=-8x+6.$

C. $y=8x-8; y=-8x+8.$ **D.** $y=41x-17.$

Đáp án A.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=4x^3+4x$

$y_0=2 \Leftrightarrow x^4+2x^2-1=2 \Rightarrow x=-1; x=1$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(1;2): y=8x-6$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(-1;2): y=-8x-6$.

STUDY TIP

Giải phương trình $ax^4+bx^2+c=0,(a\neq 0)$. *Đặt* $t=x^2,t\geq 0$ *suy ra giải phương trình bậc hai* $a.t^2+bt+c=0$

Ví dụ 4. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+2}{x-2}$ tại điểm $x_0=3$ có hệ số góc bằng:

A. 3. **B.** -7. **C.** -10. **D.** -3.

Đáp án C.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$y'=-\dfrac{10}{(x-2)^2};k=y'(-3)=-10.$

Ví dụ 5. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}+3x^2-2$ có hệ số góc $k=-9$ có phương trình là:

A. $y=-9x-11$. **B.** $y=-9x-27$. **C.** $y=-9x+43$. **D.** $y=-9x+11$.

Đáp án A.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=x^2+6x$

$k=-9\Leftrightarrow y'(x_0)=-9\Leftrightarrow x_0=-3\Rightarrow y_0=16.$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(-3;16):y=-9x-11$

STUDY TIP

Học sinh nhận biết được loại bài toán viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc $k:k=f'(x_0)$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-1}\ (C)$. Phương trình tiếp tuyến biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d:y=-4x+1$ là:

A. $y=-4x-2;y=-4x+14$. **B.** $y=-4x+21;y=-4x+14$.

C. $y=-4x+2;y=-4x+1$. **D.** $y=-4x+12;y=-4x+14$.

Đáp án A.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. $y'=\dfrac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0)=-4\Leftrightarrow -4=\dfrac{-4}{(x-1)^2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2\end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(0;-2):y=-4x-2$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;6):y=-4x+14$.

STUDY TIP

Hai đường thẳng song song thì cùng hệ số góc.

Hai đường thẳng vuông góc thì tích hai hệ số góc của hai đường thẳng bằng -1.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+2x$ (C). Gọi x_1,x_2 là hoành độ các điểm M,N trên (C) mà tiếptuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $y=-x+2017$. Khi đó x_1+x_2 bằng:

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Đáp án C.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. $y'=3x^2-4x+2$.

Từ giả thiết suy ra x_1+x_2 là nghiệm của phương trình $1=3x^2-4x+2 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0 \Rightarrow x_1+x_2=\frac{4}{3}$

Ví dụ 8. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi quađiểm $M(-7;5)$.

A. $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}; y=-\frac{3}{16}x+\frac{29}{16}$. **B.** $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}; y=-\frac{3}{16}x+\frac{2}{16}$.

C. $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}; y=-\frac{3}{16}x+\frac{9}{16}$. **D.** $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}; y=-\frac{3}{16}x+\frac{29}{16}$.

Đáp án D.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. $y'=\frac{-3}{(x-1)^2}$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Do tiếp tuyến qua $M(-7;5)$ nên:

$$5=\frac{-3}{(x_0-1)^2}(-7-x_0)+\frac{2x_0+1}{x_0-1} \Rightarrow x_0^2-4x_0-5=0 \Rightarrow x_0=-1; x_0=5.$$

Ta tìm được hai phương trình tiếp tuyến là: $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ và $y=-\frac{3}{16}x+\frac{29}{16}$.

STUDY TIP

Học sinh cần phân biệt loại bài toán viết phương trình tiếp tuyến tại một điểm $M_0(x_0;y_0)$ và viết phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $M(x_M;y_M)$. Dấu hiệu ban đầu là điểm $M(x_M;y_M)$ có thể thuộc đường cong (C) hay có thể không thuộc đường cong (C)

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=x^3-1-m(x+1)$ (C_m). Có bao nhiêu giá trị của m để tiếp tuyến tại (C_m) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Đáp án D.

Lời giải:

(C_m) giao với $Oy: M(0;1-m)$

$y' = 3x^2 - m, y(0) = -m$

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại $M: y = -mx + 1 - m$

Nếu $m = 0$ tiếp tuyến song song với Ox (loại)

Xét $m \neq 0$. Gọi A, B lần lượt là giao điểm tiếp tuyến và hai trục tọa độ

$\Rightarrow A\left(\frac{1-m}{m};0\right); B(0;1-m)$.

Ta có $S_{OAB} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OB = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{1-m}{m}\right||1-m| = 8 \Leftrightarrow \frac{(1-m)^2}{|m|} = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 9 \pm 4\sqrt{5} \\ m = -7 \pm 4\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy có bốn giá trị của m thỏa mãn.

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ (C_m). Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = 2x + 1$

A. $m = 1$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = \frac{11}{6}$. **D.** $m = \frac{6}{11}$.

Đáp án C.

Lời giải:

$y' = 3x^2 - 4x + m - 1$

Ta có $y' = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + m - \frac{7}{3} \geq m - \frac{7}{3}$

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = \frac{2}{3}$ có hệ số góc nhỏ nhất và hệ số góc đó có giá trị $k = m - \frac{7}{3}$.

Theo bài ra: $2.k = -1 \Leftrightarrow 2\left(m - \frac{7}{3}\right) = -1 \Rightarrow m = \frac{11}{6}$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x_0=0$

A. $y=2x+1$. **B.** $y=2x-1$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=x+2$.

Câu 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x+2}$ tại điểm có tung độ $y_0=2$

A. $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$. **B.** $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}$. **C.** $y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$. **D.** $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$.

Câu 3. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)=\sin x$, $x\in[0;2\pi]$ song song với đường thẳng $y=\frac{1}{2}x+3$ là :

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+1$ tại điểm $x_0=-1$ có hệ số góc bằng :

A. 7. **B.** 5. **C.** 1. **D.** –1.

Câu 5. Cho hàm số $y=\frac{2x-4}{x-3}$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (C) với trục hoành là:

A. $y=2x-4$. **B.** $y=3x+1$. **C.** $y=-2x+4$. **D.** $y=2x$.

Câu 6. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-2x+2$ vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất trên hệ trục Oxy là:

A. $y=-x-2$ và $y=-x+4$.

B. $y=-x+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{5\sqrt{3}}{9}$ và $y=-x+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

C. $y=-x+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{18-5\sqrt{3}}{9}$ và $y=-x-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{18+5\sqrt{3}}{9}$.

D. . $y=-x-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{18-5\sqrt{3}}{9}$ và $y=-x+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{18+5\sqrt{3}}{9}$

Câu 7. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x}$ (C) tại các giao điểm của (C) với các trục tọa độ là :

A. $y=x-1$. **B.** $y=x-1$ và $y=x+1$.

C. $y=-x+1$. **D.** $y=x+1$.

Câu 8. Cho hàm số $y=x^2-6x+5$ có tiếp tuyến song song trục hoành. Phương trình tiếp tuyến đó là :

A. $x=-3$. **B.** $y=-4$. **C.** $y=4$. **D.** $y=3$.

Câu 9. Cho hàm số $y=2-\frac{4}{x}$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến với (C) vuông góc với đường thẳng $y=-x+2$ là:

A. $y=x+4$. **B.** $y=x-2$ và $y=x+4$.

C. $y=x-2$ và $y=x+6$. **D.** $y=x+3$ và $y=x-1$.

Câu 10. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu nhiêu cặp điểm thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 11. Trên đồ thị hàm số $y=\frac{1}{x-1}$ có điểm $M(x_0;y_0)$ sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Khi đó x_0+y_0 bằng :

A. 3. **B.** $\frac{13}{3}$. **C.** $-\frac{1}{7}$. **D.** $-\frac{13}{4}$.

Câu 12. Cho hàm số $(C): y=\frac{1}{3}x^3+x^2-2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $y''=0$ là

A. $y=-x-\frac{7}{3}$. **B.** $y=-x+\frac{7}{3}$. **C.** $y=x-\frac{7}{3}$. **D.** $y=\frac{7}{3}x$.

Câu 13. Số cặp điểm A, B trên đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2+3x+5$ mà tiếp tuyến tại A,B vuông góc với nhau là:

A. 1. **B.** 2 . **C.** 0 . **D.** Vô số.

Câu 14. Qua điểm $A(0;2)$ có thể ké được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+2\ (C)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 15. Cho hàm số $y=x^3-3x^3+2$ có đồ thị (C). Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến với (C) và có hệ số góc nhỏ nhất?

A. $y=-3x+3$. **B.** $y=1$. **C.** $y=-5x+7$. **D.** $y=-3x-3$.

Câu 16. Cho hai hàm số $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $g(x)=\frac{x^2}{\sqrt{2}}$. Góc giữa hai tiếp tuyến của mỗi đồ thị hàm số đã cho tại giao điểm của chúng là:

A. 60^0. **B.** 90^0. **C.** 45^0. **D.** 30^0.

Câu 17. Tìm m để đồ thị: $(C_m): y=\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1$ tồn tại đúng 2 điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x+2y-3=0$.

A. $m\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$. **B.** $m\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{7}{3}\right)$.

C. $m\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{8}{3}\right)$. **D.** $m\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$.

Câu 18. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến này cắt Ox,Oy lần lượt tại A, B sao cho $OA=4OB$.

A. $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ và $y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$. **B.** $y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$ và $y=-\frac{1}{4}x-\frac{13}{4}$.

C. $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ và $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$. **D.** $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ và $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{2}$.

Câu 19. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$. Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích ΔAOB bằng $\frac{3}{2}$. Hỏi m là giá trị nguyên nằm trong khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-5)\cup(1;+\infty)$. **C.** $(-4;0)$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 20. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx + m - l$ tại điểm $x_0 = 1$ cắt đường tròn $(x-2)^2 + (y-3)^2 = \frac{1}{5}$ theo cung có độ dài nhỏ nhất.

A. $m = 1$ hoặc $m = 2$. **B.** $m = 1$ hoặc $m = -\frac{5}{2}$.

C. $m = -3$ hoặc $m = -1$ **D.** $m = -1$ hoặc $m = 3$.

Câu 21. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c, c < 0$ có đồ thị (C) cắt Oy tại A và có hai điểm chung với Ox là M, N. Tiếp tuyến với đồ thị tại M đi qua A. Tìm $T = a + b + c$ biết $S_{AMN} = 1$.

A. $T = -1$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = 5$. **D.** $T = -3$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. **Đáp án B.**

$y' = \frac{2}{x+1}; x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(0;-1)$ là: $y = y'(0)(x-0) - 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$.

Câu 2. **Đáp án A.**

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}; y_0 = 2 \Rightarrow \sqrt{x_0 + 2} = 2 \Leftrightarrow x_0 = 2$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;2)$ là $y = y'(2)(x-2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

Câu 3. **Đáp án C.**

$f'(x) = \cos x$. Theo giả thiết $\Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x_0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in Z$

Do $x_0 \in [0;2\pi] \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{3}; x_0 = \frac{5\pi}{3}$.

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn.

Câu 4. **Đáp án B.**

$y' = 3x^2 - 2x \Rightarrow y'(1) = 5$

Câu 5. **Đáp án C.**

Giao điểm của (C) với Ox là $A(2;0)$.

$y' = \frac{-2}{(x-3)^2}$

Phương trình tiếp tuyến tại $A(2;0)$ là :

$y = y'(2)(x-2) + 0 \Leftrightarrow y = -2x + 4$

Câu 6. **Đáp án C.**

$y = 3x^2 - 2$

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất $\Delta : y = x$

$\Rightarrow y'(x_0).1 = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 2 = -2 \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là : $y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 - 5\sqrt{3}}{9}$ và $y = -x - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 + 5\sqrt{3}}{9}$

Câu 7. **Đáp án A.**

TXĐ: $D = R \setminus \{0\}$ nên (C) không giao với Oy.

(C) giao với Ox tại $M(1;0)$ nên phương trình tiếp tuyến là: $y = y'(1)(x-1) = x - 1$.

Câu 8. **Đáp án B.**

Ta có: $y' = 2x - 6$.

Phương trình tiếp tuyến song song với trục hoành

$\Rightarrow y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 4$

Phương trình tiếp tuyến là: $y = -4$.

Câu 9. **Đáp án C.**

TXĐ: $D = R \setminus \{0\}; y' = \frac{4}{x^2}$.

Theo giả thiết $y'(x_0)(-1) = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{x_0^2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = x - 2$ và $y = x + 6$

Câu 10. **Đáp án D.**

$y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$.Đồ thị hàm số có tâm đối xứng $\mathrm{I}(1;1)$.

Lấy điểm $A(x_0; y_0) \in (C)$, gọi *B* là điểm đối xứng với *A* qua *I* $\Rightarrow B(2 - x_0; 2 - y_0) \in (C)$. Ta có:

+ Hệ số góc của phương trình tại A là: $k_A = y'(x_0) = \frac{-2}{(x_0 - 1)^2}$

+ Hệ số góc của phương trình tại B là: $k_B = y'(2 - x_0) = \frac{-2}{(x_0 - 1)^2}$

Ta thấy $k_A = k_B$ nên có vô số cặp điểm $A, B \in (C)$ mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau.

Câu 11. **Đáp án D.**

Ta có $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0;y_0)\in(C)$ là : $y=-\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{1}{x_0-1}$ (Δ)

(Δ) giao với $Ox: A(2x_0-1;0)$.

(Δ) giao với $Oy: B\left(0;\frac{2x_0-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

$S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB\Leftrightarrow\left(\frac{2x_0-1}{x_0-1}\right)^2=4\Leftrightarrow x_0=\frac{3}{4}\Rightarrow y_0=-4$

Vậy $x_0+y_0=\frac{3}{4}-4=-\frac{13}{4}$.

Câu 12. **Đáp án A.**

$y'=x^2+2x, y''=2x+2$

$y''(x_0)=0\Leftrightarrow 2x_0+2=0\Leftrightarrow x_0=-1\Rightarrow y_0=-\frac{4}{3}$

Phương trình tiếp tuyến tại $M\left(-1;-\frac{4}{3}\right)$ là : $y=-x-\frac{7}{3}$.

Câu 13. **Đáp án C.**

$y'=3x^2+6x+3$. Gọi $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$.

Tiếp tuyến tại A, B lần lượt có hệ số góc là:

$k_A=3x_A^2+6x_A+3,\quad k_B=3x_B^2+6x_B+3$

Theo giả thiết: $k_A.k_B=-1$

$\Leftrightarrow(3x_A^2+6x_A+3)(3x_B^2+6x_B+3)=-1$

$\Leftrightarrow 9(x_A^2+2x_A+1)(x_B^2+2x_B+1)=-1$

$\Leftrightarrow 9(x_A+1)^2(x_B+1)^2=-1$ (Vô lý).

Vậy không tồn tại cặp điểm A, B thỏa mãn.

Câu 14. **Đáp án D.**

$y'=4x^3-4x$. Gọi $M_0(x_0;y_0)\in(C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M_0 là:

$y=(4x_0^3-4x_0)(x-x_0)+x_0^4-2x_0^2+2$ (Δ)

Vì Δ đi qua $A(0;2)$ nên: $2=(4x_0^3-4x_0)(-x_0)+x_0^4-2x_0^2+2$

$\Leftrightarrow -3x_0^4+2x_0^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\end{array}\right.$

Ứng với 3 hoành độ x_0 ta viết được 3 phương trình tiếp tuyến với (C) .

Câu 15. **Đáp án A.**

$y' = 3x^2 - 6x$. Gọi $M_0(x_0; y_0) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M_0 là: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M :

$y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 = 3(x_0 - 1)^2 - 3 \Leftrightarrow y'(x_0) \geq -3$

Do đó, hệ số góc nhỏ nhất là -3 khi $x_0 = 1$

$\Rightarrow y_0 = 0$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M_0(0;1)$ là: $y = -3x + 3$

Câu 16. **Đáp án B.**

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{1}{x\sqrt{2}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x^2 \Rightarrow x = 1,\ x \neq 0$$

$\Rightarrow$ giao điểm $M\left(1; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ta có $f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}; g'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f'(1).g'(1) = -1$

Vậy góc giữa 2 tiếp tuyến đó là 90^0 .

Câu 17. **Đáp án D.**

$y' = mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m$

Theo bài ra $y'.\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow y' = 2$

$\Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \frac{1}{2} \\ 0 < m < 1 \\ 0 < m < \frac{2}{3} \end{cases} hay\ m \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right).$$

Câu 18. **Đáp án A.**

Phương trình tiếp tuyến tại $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ là:

$$y = \frac{-x}{(x_0 - 1)^2} + \frac{2x_0^2 - 2x_0 + 1}{(x_0 - 1)^2} (\Delta)$$

(Δ) giao với *Ox* tại $A(2x_0^2 - 2x_0 + 1; 0)$.

(Δ) giao với *Oy* tại $B\left(0; \frac{2x_0^2 - 2x_0 + 1}{(x_0 - 1)^2}\right)$.

$OA = 4OB \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$

Từ đó ta được 2 phương trình tiếp tuyến là:

$y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ và $y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$.

Câu 19. **Đáp án A.**

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = m - 2 \Rightarrow M(1; m-2)$

Phương trình tiếp tuyến tại *M* là $(\Delta): y = -3x + m + 1$

(Δ) giao với *Ox* tại $A\left(\frac{m+1}{3}; 0\right)$.

(Δ) giao với *Oy* tại $B(0; m+1)$.

$S_{OAB} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OB = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{|m+1|}{3}.|m+1| = 3$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Câu 20. **Đáp án B.**

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow M(1;0)$, $y' = 3x^2 - m$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(1;0)$ là:

$(3-m)x - y - 3 + m = 0 \ (\Delta)$

Đường tròn tâm $I(2;3)$ và bán kính $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Vì $IM > R$ nên độ dài cung nhỏ nhất khi (Δ) tiếp xúc với đường tròn tức là:

$d(I;\Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|(3-m).2 - 3 - 3 + m|}{\sqrt{(3-m)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow 2m^2 + 3m - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\frac{5}{2} \end{array}\right.$.

Câu 21. **Đáp án A.**

Giả sử *(C)* cắt *Ox* tại $M(m;0)$, $N(n;0)$, cắt *Oy* tại $A(0;c)$.

Tiếp tuyến tại *M* có phương trình:

$y = (3m^2 + 2am + b)(x - m) \quad (\Delta)$

Tiếp tuyến (Δ) đi qua *A* nên

$3m^3 + 2am^2 + bm + c = 0$

$\Leftrightarrow 2m^3 + am^2 = 0 \ (do\ m^3 + am^2 + bm + c = 0)$

$\Leftrightarrow m = -\frac{a}{2}$.

Vì *(C)* cắt *Ox* tại 2 điểm nên *(C)* tiếp xúc với *Ox* (do tính chất đồ thị hàm bậc 3 học sinh sẽ được học rõ hơn lớp 12).

Nếu *M* là tiếp điểm $\Rightarrow Ox$ đi qua *A* (vô lý)

$\Rightarrow (C)$ tiếp xúc với Ox tại *N*.

Do đó $y = x^3 + ax^2 + bx + c = (x-n)^2(x-m)$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + 2n = -a \\ 2m.n + n^2 = b \\ m.n^2 = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{a}{2}, \mathrm{n} = -\dfrac{a}{4} \\ a^3 = 32c \\ 5a^2 = 16b \end{cases} \quad (I)$$

Mặt khác $S_{\Delta AMN} = 1 \Leftrightarrow -c.|n-m| = 2 \Leftrightarrow -c.|a| = 8$

- Với $a > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 32c \\ ac = -8 \\ 5a^2 = 16b \end{cases}$ (vô nghiệm)

- Với $a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 32c \\ ac = 8 \\ 5a^2 = 16b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \\ c = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow T = a + b + c = -1.$