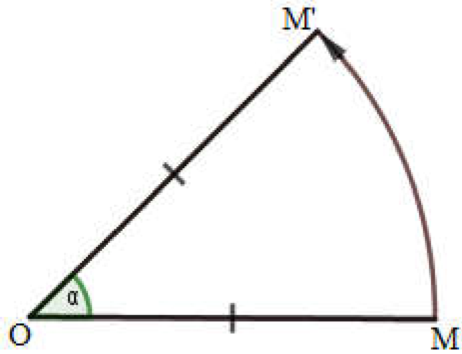
PHÉP QUAY

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa.



Trong mặt phẳng cho điểm O cố định và góc lượng giác α không đổi. Phép biến hình biến mỗi điểm M

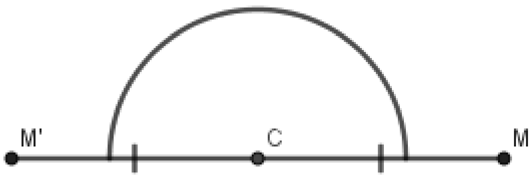
thành điểm M' sao cho $OM = OM'$ và $(OM, OM') = \alpha$ được gọi là phép quay tâm O góc quay α.

Kí hiệu: $Q_{(O,\alpha)}$ (O là tâm phép quay, α là góc quay lượng giác).

$$Q_{(O,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (OM', OM) = \alpha \end{cases}$$

Nhận xét:

- Chiều dương của phép quay là chiều dương của đường tròn lượng giác (chiều kim đồng hồ).
- Với $k \in \mathbb{Z}$ ta luôn có:
  Phép quay:
  $Q_{(O,2k\pi)}$ là phép đồng nhất;
  $Q_{(O,(2k+1)\pi)}$ là phép đối xứng tâm.



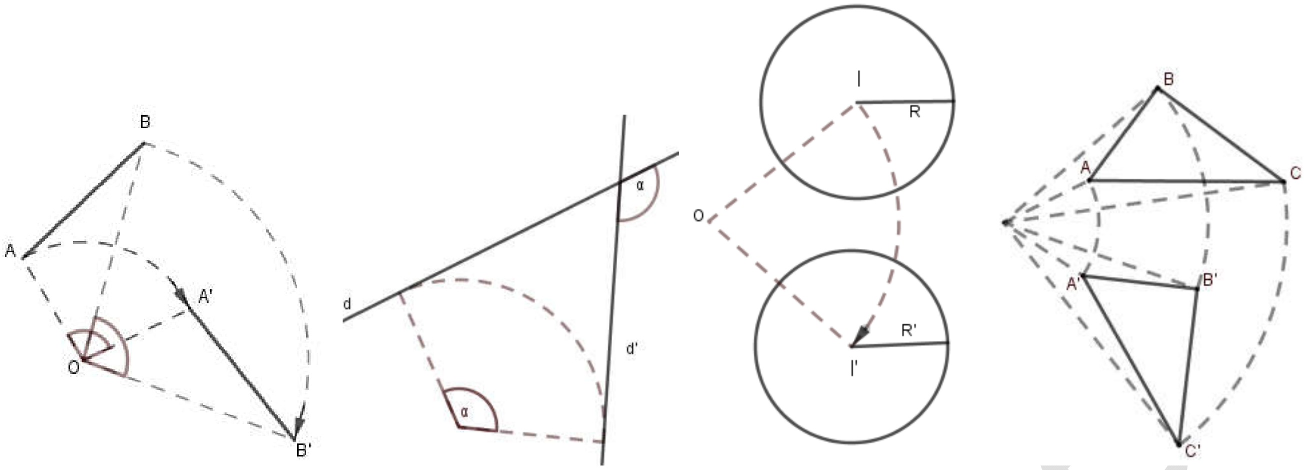
Study tip: $\varphi = 90° \Rightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

2. Tính chất.

Tính chất 1: Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Tính chất 1: Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Study tip. Phép quay biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự.



Nhận xét: Gọi α là góc của phép quay biến đường thẳng d thành đường thẳng d':

$Q_{(O,\alpha)}(d) = d' \Rightarrow$ Góc $(d,d') = \alpha$ nếu $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$; góc $(d,d') = \pi - \alpha$ nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

3. Biểu thức tọa độ của phép quay

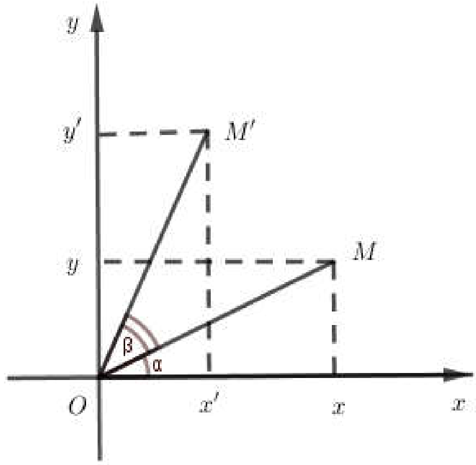
Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, xét phép quay $Q_{(I,\varphi)}$

Trường hợp 1: Khi tâm quay I trùng với gốc tọa độ O.

Đặt $OM = r$ và góc $(Ox, OM) = \alpha \Rightarrow$ góc $(Ox, OM') = \alpha + \varphi$

$\Rightarrow M': \begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\varphi) \\ y' = r\sin(\alpha+\varphi) \end{cases}$

Hay $M': \begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$ (1)



Nếu $Q_{(I,-\varphi)} M'(x;y) \to M(x,y)$ thì $M: \begin{cases} x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$ (2)

Study tip:

- Nếu $\varphi = 90° \Rightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$
- Nếu $\varphi = -90° \Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$
- Nếu $\varphi = 180° \Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

Trường hợp 2: Khi tâm quay $I(x_0; y_0)$. Ta có:

$$\begin{cases} x'-x_0=(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi \\ y'-y_0=(x-x_0)\sin\varphi+(y-y_0)\cos\varphi \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x-x_0=(x'-x_0)\cos\varphi+(y'-y_0)\sin\varphi \\ y-y_0=-(x-x_0)\sin\varphi+(y-y_0)\cos\varphi \end{cases} \quad (4)$$

Study tip:

$Q_{(I,\varphi)}: M(x;y)\to M'(x';y')\Rightarrow(3)$

$Q_{(I,-\varphi)}: M'(x';y')\to M(x;y)\Rightarrow(4)$

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHÉP QUAY

DẠNG 1: KHAI THÁC ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ ỨNG DỤNG PHÉP QUAY

Phương pháp chung:

- Sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của phép quay.
- Xác định ảnh của một điểm, một hình qua phép quay.
- Tìm quỹ tích điểm thông qua phép quay.
- Các yếu tố liên quan đến phép quay là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông… từ đó ứng dụng phép quay để giải các bài toán hình học khác.

Ví dụ 1: Giả sử $Q_{(O,\varphi)}(M)\to M', Q_{(O,\varphi)}(N)\to N'$. Khi đó mệnh đề nào sau đây sai?

A. $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})=\varphi$. **B.** $\widehat{MON}=\widehat{M'ON'}$. **C.** $MN=M'N'$. **D.** $\Delta MON=\Delta M'ON'$.

Lời giải:

Đáp án A.

$Q_{(O,\varphi)}(M)\to M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM'=OM \\ (OM,OM')=\varphi \end{cases}$ với φ là góc lượng giác.

Trong khi đó đáp án A: $(\overline{OM},\overline{OM'})=\varphi$ (không là góc lượng giác)

Ví dụ 2: Có bao nhiêu điểm biến thành chính nó qua phép quay tâm O, góc quay $\alpha\neq k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

A. Không có. **B.** Một. **C.** Hai. **D.** Vô số.

Lời giải:

Đáp án B.

$Q_{(O,\alpha)}(M)\to M$ khi $M\equiv O$ tâm quay.

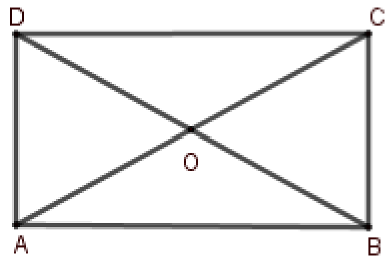
Ví dụ 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O, góc quay α , $0\le\alpha\le 2\pi$, biến hình chữ nhật thành chính nó?

A. Không có. **B.** Một. **C.** Hai. **D.** Vô số.

Lời giải:

Đáp án C.

Khi góc quay $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 2\pi$ thì phép quay biến hình chữ nhật thành chính nó.



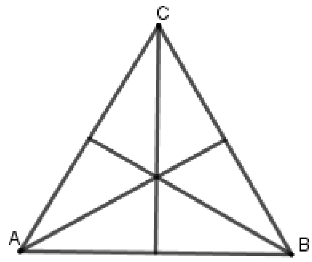
Ví dụ 4: Cho tam giác đều ABC có tâm O. Phép quay tâm O, góc quay φ biến tam giác đều thành chính nó thì góc quay φ là góc nào sau đây:

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{3\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải:

Đáp án B.

$$Q_{(O,\varphi)}(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OB \\ (OA, OB) = \varphi = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$



Ví dụ 5: Chọn 12 giờ làm mốc, khi kim giờ chỉ một giờ đúng thì kim phút đã quay được một góc bao nhiêu độ?

A. $360°$. **B.** $-360°$. **C.** $-180°$. **D.** $720°$.

Lời giải:

Đáp án B.

Khi kim giờ chỉ đến một giờ đúng thì kim phút quay được đúng một vòng theo chiều âm và được một góc là $-360°$.

Study tip: Chiều dương của góc quay là chiều ngược chiều kim đồng hồ, chiều âm của góc quay là chiều cùng chiều kim đồng hồ.

Ví dụ 6: Trong các chữ cái và số sau, dãy các chữ cái và số khi ta thực hiện phép quay tâm A, góc quay $180°$ thì ta được một phép đồng nhất (A là tâm đối xứng của các chữ cái hoặc số đó).

A. $X, L, 6, 1, U$. **B.** $O, Z, V, 9, 5$. **C.** $X, I, O, 8, S$. **D.** $H, J, K, 4, 8$.

Lời giải:

Đáp án C.

Ta có: $Q_{(A,180°)}(X) = X$; $Q_{(A,180°)}(I) = I$; $Q_{(A,180°)}(O) = O$;

$Q_{(A,180^\circ)}(8)=8;\ Q_{(A,180^\circ)}(S)=S.$

Study tip: Phép biến hình H thành chính nó ta được phép đồng nhất.

Ví dụ 7: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, M là trung điểm của AB, N là trung điểm của OA. Tìm ảnh của tam giác AMN qua phép quay tâm O góc quay 90°.

A. $\Delta BM'N'$ với M',N' lần lượt là trung điểm của BC,OB.

B. $\Delta CM'N'$ với M',N' lần lượt là trung điểm của BC,OC.

C. $\Delta DM'N'$ với M',N' lần lượt là trung điểm của DC,OD.

D. $\Delta DM'N'$ với M',N' lần lượt là trung điểm của AD,OD.

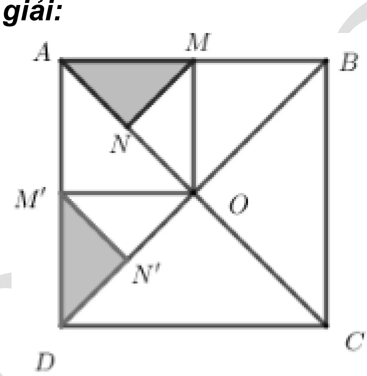
Lời giải:

Đáp án D.

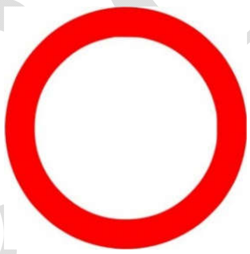
Ta có: $Q_{(O,90^\circ)}(A)=D$

$Q_{(O,90^\circ)}(M)=M'$ là trung điểm AD.

$Q_{(O,90^\circ)}(N)=N'$ là trung điểm OD.



Ví dụ 8: Gọi I là tâm đối xứng của các hình A,B,C,D. Khi thực hiện phép quay tâm I góc quay 180° thì hình nào luôn được phép đồng nhất?

A.  **B.**  **C.**  **D.** 

Lời giải:

Đáp án C.

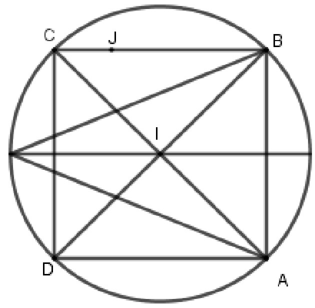
Từ hình C ta có qua phép $Q_{(I,180^\circ)}$ ta luôn được một hình là chính nó.

Ví dụ 9: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh $\sqrt{2}$ và có các đỉnh vẽ theo chiều dương. Các đường chéo cắt nhau tại I. Trên cạnh BC lấy $BJ=1$. Xác định phép biến đổi $\overrightarrow{AI}$ thành $\overrightarrow{BJ}$ biết O là tâm quay.

A. $\overrightarrow{BJ}=Q_{(O,45^\circ)}\left(\overrightarrow{AI}\right)$. **B.** $\overrightarrow{BJ}=Q_{(O,-45^\circ)}\left(\overrightarrow{AI}\right)$. **C.** $\overrightarrow{BJ}=Q_{(O,135^\circ)}\left(\overrightarrow{AI}\right)$. **D.** $\overrightarrow{BJ}=Q_{(O,-135^\circ)}\left(\overrightarrow{AI}\right)$.

Lời giải:

Đáp án A.



Ta có: $AI=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1\Rightarrow AI=BJ$ lại có $\left(AI,BJ\right)=45°$

$\Rightarrow BJ=Q_{(O,45°)}\left(AI\right)$ tâm O là giao điểm của trung trực AB và cung chứa góc 45° đi qua $A,B\Rightarrow \overrightarrow{BJ}=Q_{(O,45°)}\left(\overrightarrow{AI}\right)$.

Ví dụ 10: Cho đường thẳng d và điểm O cố định không thuộc d, M là điểm di động trên d. Tìm tập hợp điểm N sao cho tam giác MON đều.

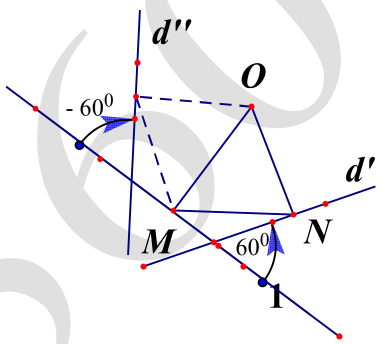
A. N chạy trên d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O,60°)}$.

B. N chạy trên d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O,-60°)}$.

C. N chạy trên d' và d'' lần lượt là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O,60°)}$ và $Q_{(O,-60°)}$.

D. N là ảnh của O qua phép quay $Q_{(O,60°)}$.

Đáp án C



ΔOMN đều $\Rightarrow OM=ON$ và $\widehat{NOM}=60^0$

Vì vậy khi chạy trên d thì N chạy trên d' là ảnh của d qua $Q_{(O,60^0)}$ và N chạy trên d'' là ảnh của d qua $Q_{(O,-60^0)}$.

DẠNG 2. Xác định ảnh của điểm, đường thẳng qua phép quay bằng phương pháp tọa độ

Phương pháp chung:

1.Xác định ảnh của một điểm qua phép quay.

- Sử dụng biểu thức tọa độ trong các biểu thức đã nêu.

2. Xác định ảnh Δ' của đường thẳng Δ qua phép quay.

Cách 1: Chọn hai điểm A,B phân biệt trên Δ, Xác định ảnh A',B' tương ứng. Đường thẳng Δ' cần tìm là đường thẳng qua hai ảnh A',B'.

Cách 2: Áp dụng tính chất phép quay $Q_{(O,\alpha)}$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' có góc $(\Delta,\Delta')=\alpha$ hoặc $\pi-\alpha$ (đơn vị radian)

Cách 3: Sử dụng quỹ tích

- Với mọi điểm $M(x;y)\in\Delta: Q_{(O,\alpha)}(M)=M'(x';y')$ thì $M'\in\Delta'$

- Từ biểu thức tọa độ rút x,y thế vào phương trình đường thẳng Δ ta được phương trình ảnh Δ'

3. Xác định ảnh của một hình $\mathcal{H}$ (đường tròn, elip, parabol…)

- Sử dụng quỹ tích: Với mọi điểm $M(x;y)$ thuộc hình $\mathcal{H}$, $Q_{(O,\alpha)}(M)=M'(x';y')$ thì $M'(x';y')$ thuộc ảnh $\mathcal{H}'$ của hình $\mathcal{H}$.

- Với đường tròn áp dụng tính chất phép quay biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính hoặc sử dụng quỹ tích.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, Qua phép quay tâm O, góc quay 90^0 biến điểm $M(-3;5)$ thành điểm nào?

A. $(3;4)$ **B.** $(-5;-3)$. **C.** $(5;-3)$. **D.** $(-3;-5)$.

Lời giải:

Đáp án B

$$Q_{(O,90^0)}: M(x;y)\to M'(x';y')\Rightarrow\begin{cases}x'=-y\\y'=x\end{cases}$$

Cách 1: Dùng biểu thức tọa độ $\Rightarrow M':\begin{cases}x'=-5\\y'=-3\end{cases}$

Cách 2: Vẽ biểu diễn tọa độ của điểm trên hệ trục $Oxy\Rightarrow M'(-5;3)$.

Cách 3: Ta có $Q_{(O;90^0)}(M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}OM=OM'\\\overline{OM}\,\overline{OM'}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{34}=\sqrt{x'^2+y'^2}\\-3x'+5y'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=-5\\y'=-3\end{cases}$

Nhận xét: Độc giả vận dụng cách 1 nhanh hơn, các cách 2 và cách 3 khá dễ hiểu nhưng dài hơn.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(1;1)$. Hỏi điểm nào sau đây là ảnh của điểm M qua phép quay tâm $O(0;0)$, góc quay 45^0 ?

A. $M'(0;\sqrt{2})$. **B.** $M'(\sqrt{2};0)$. **C.** $M'(0;1)$. **D.** $M'(1;-1)$.

Lời giải:

Đáp án A

$$Q_{(O,90^0)}: M(x;y) \to M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

Cách 1: Theo biểu thức tọa độ: $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow M'\left(0;\sqrt{2}\right)$

Góc giữa 2 vecto: $\cos\varphi = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$

Cách 2: $Q_{(O;45^0)} M(x;y) \to M'(x';y') \Leftrightarrow= \begin{cases} OM = OM' \\ (OM, OM') = 45^0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{x'^2+y'^2} \\ \cos 45^0 = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}\sqrt{x'^2+y'^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'^2 + y'^2 = 2 \\ x'+y' = \sqrt{2} \end{cases}$$

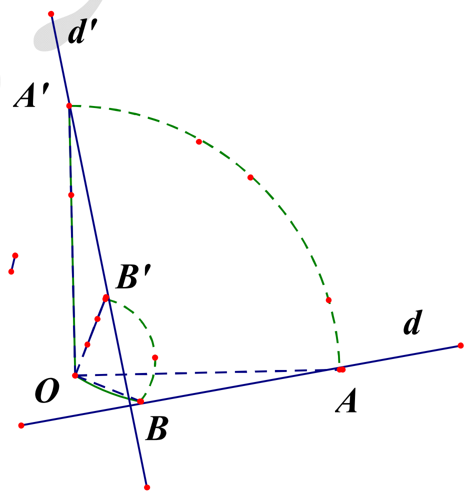
Giải hệ trên $\Rightarrow M'\left(0;\sqrt{2}\right)$

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $5x - 3y + 15 - 0$. Tìm ảnh d' của d qua phép quay $Q_{(O,90^0)}$ với O là gốc tọa độ. ?

A. $5x - 3y + 6 = 0$. **B.** $3x + 5y + 15 = 0$. **C.** $5x + y - 7 = 0$. **D.** $-3x + 5y + 7 = 0$.

Lời giải:

Đáp án B



Cách 1: Chọn $A(0;5) \in d$, $B(-3;0) \in d'$

$Q_{(O,90^0)}(A) = A'(-5;0) \in d'$

$Q_{(O,90^0)}(B)=B'(0;-3)\in d'$

Đường thẳng d' là đường thẳng $A'B':3x+5y+15=0$

Cách 2: Vì góc quay là $90^0\Rightarrow d\perp d'\Rightarrow d'$ có dạng $3x+5y+c=0$

Chọn $A(0;5)\in d$ qua phép quay $Q_{(O,90^0)}$ ta được $A'(-5;0)\in d'\Rightarrow c=15$

Cách 3: Sử dụng quỹ tích

Với mọi điểm $M(x;y)\in d$ ta có $Q_{(O,90^0)}(M)=M'(x';y')\in d'$

Từ biểu thức tọa độ $\begin{cases}x'=-y\\y'=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y'\\y=-x'\end{cases}$ .Thế x,y vào phương trình đường thẳng d ta được d':

$d':3x+5y+15=0$

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của $(C):x^2+y^2-2x+4y-4=0$ qua phép quay $Q_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}$.

A. $(x+2)^2+(y+1)^2=9$.

B. $(x-2)^2+(y-1)^2=9$.

C. $(x-2)3^2+(y+1)^2=9$.

D. $(x-1)^2+(y+2)^2=9$.

Lời giải:

Đáp án A

Cách 1: Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$.

$Q_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}(I)=I'\Rightarrow I'(-2;-1)$

Đường tròn (C') có tâm $I'(-2;-1)$, bán kính $R'=R=3$ có phương trình: $(x+2)^2+(y+1)^2=9$

Cách 2: Phương pháp quỹ tích

Ta có $Q_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}:M(x;y)\to M'(x';y')$ với $\forall M\in(C)\Rightarrow M'\in(C')$

Từ biểu thức tọa độ $\begin{cases}x'=y\\y'=-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y'\\y=x'\end{cases}$

Thế vào $(C):(-y')^2+(x')^2+2y'+4x'-4=0$

$\Leftrightarrow (x')^2 + (y')^2 + 4x' + 2y' - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x'+2)^2 + (y'+1)^2 = 9$

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(-2;3), A'(1;5)$ và $B(5;-3), B'(7;-2)$. Phép quay tâm $I(x;y)$ biến A thành A' và B thành B', ta có $x+y$ bằng:

A. -1. **B.** 2 **C.** 1 **D.** -3

Lời giải:

Đáp án D

$Q_{(O,\alpha)}(A) = A' \Rightarrow IA = IA'\ (1)$

$Q_{(O,\alpha)}(B) = B' \Rightarrow IB = IB'\ (2)$

Từ $(1) và (2) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(-2-x)^2 + (3-y)^2} = \sqrt{(1-x)^2 + (5-y)^2} \\ \sqrt{(5-x)^2 + (-3-y)^2} = \sqrt{(7-x)^2 + (-2-y)^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 13 \\ 4x + 12y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{25}{2} \\ y = -\dfrac{31}{2} \end{cases} \Rightarrow x + y = -3$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

DẠNG 1: KHAI THÁC ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ ỨNG DỤNG CỦA PHÉP QUAY

Câu 1: Cho 2 đường thẳng bất kì d và d'. Có bao nhiêu phép quay biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. không có phép nào. **B.** có 1 phép duy nhất.

C. chỉ có 2 phép. **D.** có vô phép số.

Câu 2: Cho hình vuông tâm O. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α, $0 \le \alpha < 2\pi$ biến hình vuông thành chính nó ?

A. 1 . **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 4.

Câu 3: Gọi d' là hình ảnh của d qua tâm I góc quay φ (biết I không nằm trên d), đường thẳng d' song với d khi:

A. $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. **C.** $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. **D.** $\varphi = -\pi$.

Câu 4: Cho hai đường tròn cùng bán kính (O) và (O') tiếp xúc ngoài nhau. Có bao nhiêu phép quay góc $90°$ biến hình tròn (O) thành (O')?

A. 0 . **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** Vô số.

Câu 5: Cho hình lục giác đều $ABCDE$ tâm O . Tìm ảnh của tam giác AOF qua phép quay tâm O góc quay 120^0.

A. ΔOAB. **B.** ΔBOC. **C.** ΔDOC. **D.** ΔEOD.

Câu 6: Chọn 12 giờ làm mốc, khi đồng hồ chỉ năm giờ đúng thì kim giờ đã quay được một góc bao nhiêu độ ?

A. 270^0. **B.** -360^0. **C.** -150^0. **D.** 135^0.

Câu 7: Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 biết $Q_{(O;-120^0)}(\Delta_1)=\Delta_2$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A $(\Delta_1,\Delta_2)=120^0$. **B.** $\Delta_1 // \Delta_2$. **C.** $(\Delta_1,\Delta_2)=-120^0$. **D.** $(\Delta_1,\Delta_2)=60^0$.

Câu 8: Cho hai điểm phân biệt A,B và $Q_{(A;30^0)}(B)=C$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $ABC=30^0$. **B.** $ABC=90^0$. **C.** $ABC=45^0$. **D.** $ABC=75^0$.

Câu 9: Cho hai điểm phân biệt I,M và $Q_{(I;-32\pi)}(M)=N$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. M là trung điểm của đoạn IN. **B.** N là trung điểm của đoạn IM .
C. I là trung điểm của đoạn MN. **D.** $M\equiv N$.

Câu 10: Cho ΔABC đều (thứ tự các đỉnh theo chiều dương lượng giác). Kết luận nào sau đây sai ?

A. $Q_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(B)=C$. **B.** $Q_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)}(C)=B$. **C.** $Q_{\left(A,\frac{7\pi}{3}\right)}(C)=B$. **D.** $Q_{\left(A,-\frac{7\pi}{3}\right)}(A)=C$.

Câu 11: Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$ (thứ tự các đỉnh theo chiều dương lượng giác). Kết luận nào sau đây sai ?

A. $Q_{(I,90^0)}(\Delta IBC)=\Delta ICD$. **B.** $Q_{(I,-90^0)}(\Delta IBC)=\Delta IAB$.
C. $Q_{(I,180^0)}(\Delta IBC)=\Delta IDA$. **D.** $Q_{(I,360^0)}(\Delta IBC)=\Delta IDA$.

Câu 12: Gọi I là tâm ngũ giác đều $ABCDE$ (thứ tự các đỉnh theo chiều dương lượng giác). Kết luận nào sau đây là sai ?

A. $Q_{(I,144^0)}(CD)=EA$. **B.** $Q_{(I,72^0)}(AB)=BC$. **C.** $Q_{(I,144^0)}(AB)=DE$. **D.** $Q_{(I,72^0)}(CD)=BC$.

Câu 13: Gọi I là tâm lục giác đều $ABCDEF$ (thứ tự các đỉnh theo chiều dương lượng giác). Kết luận nào sau đây là sai ?

A. $Q_{(I,-120^0)}(\Delta IED)=\Delta IBA$. **B.** $Q_{(I,-60^0)}(\Delta IAB)=\Delta IBC$.
C. $Q_{(I,60^0)}(AB)=BC$. **D.** $Q_{(I,180^0)}(\Delta ICD)=\Delta IFA$.

Câu 14: Cho hai tam giác vuông cân OAB và $OA'B'$ có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn AB' và nằm ngoài đoạn thẳng $A'B$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác OAA' và OBB'. Xác định dạng của tam giác GOG'

A. cân. **B.** vuông. **C.** vuông cân. **D.** đều.

Câu 15: Cho 3 điểm A, B, C, điểm B nằm giữa A và C . Dựng về phía đường thẳng AC các tam giác đều ABE và BCF . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và EC . Xác định dạng của ΔBMN.

A. cân. **B.** vuông. **C.** vuông cân. **D.** đều.

Câu 16: Cho đường thẳng d và điểm O cố định không thuộc d. M là điểm di động trên d. Xác định quỹ tích điểm N sao cho ΔOMN đều.

A. $N \in d'$ với $d' = Q_{(O,60^\circ)}(d)$. **B.** $N \in d'$ với $d' = Q_{(O,180^\circ)}(d)$.

C. $N \in d'$ với $d' = Q_{(O,120^\circ)}(d)$. **D.** $N \in d'$ với $d' = Q_{(O,-120^\circ)}(d)$.

Câu 17: Cho hình vuông $ABCD$, $M \in BC$, $K \in DC$ sao cho $\widehat{BAM} = \widehat{MAK}$. Khi đó mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $AD = AK - KD$. **B.** $AB = AM + DK$. **C.** $AK = BM + KD$. **D.** $AM = BM + AB$.

Câu 18: Cho ΔABC. Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông $BCIJ$, $ACMN$. Gọi O, P lần lượt là tâm đối xứng của chúng, D là trung điểm của AB. Xác định dạng của ΔDOP.

A. cân . **B.** vuông. **C.** vuông cân. **D.** đều.

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH ẢNH CỦA ĐIỂM, ĐƯỜNG QUA PHÉP QUAY BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(x;y)$. Biểu thức tọa độ của điểm $A' = Q_{(O,90^0)}(A)$ là:

A. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(x;y)$. Biểu thức tọa độ của điểm $A' = Q_{(O,-90^0)}(A)$ là:

A. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(x;y)$. Biểu thức tọa độ của điểm $A' = Q_{(O,\varphi)}(A)$ là:

A. $\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x' = x\sin\varphi - y\cos\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \end{cases}$.

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(4;1)$. Biểu thức tọa độ của điểm $A' = Q_{(O,-90^0)}(A)$ là:

A. $A(-1;4)$. **B.** $A(1;-4)$. **C.** $A(4;-1)$. **D.** $A(-4;-1)$.

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(x;y)$. Biểu thức tọa độ của điểm $A' = Q_{(O,60^0)}(A)$ là:

A. $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$.

Câu 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ tâm $I(1;2)$, biết điểm $A(4;5)$. Khi đó với $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$, $D(x_D;y_D)$ thì $x_B.x_C.x_D$ bằng:

A. 12. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 32.

Câu 25: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d\ : x+y+1=0$, điểm $I(1;-2)$, phép quay $Q_{(O,90^0)}(d)=d'$. Xác định phương trình đường thẳng d'.

A. $-x+y-2=0$. **B.** $x-y-1=0$. **C.** $x-y+3=0$. **D.** $x-y-3=0$.

Câu 26: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(0;3)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của A qua phép quay $Q_{(O,-45^0)}$.

A. $A'\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$. **B.** $A'\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$. **C.** $A'\left(\frac{-3}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **D.** $A'\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

Câu 27: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm phép quay Q biến điểm $A(-1;5)$ thành điểm $A'(5;1)$

A. $Q_{(O,-90^0)}(A)=A'$. **B.** $Q_{(O,90^0)}(A)=A'$. **C.** $Q_{(O,180^0)}(A)=A'$. **D.** $Q_{(O,-270^0)}(A)=A'$.

Câu 28: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phép quay tâm O góc quay α biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y;\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$. Tìm α.

A. $\alpha=\frac{\pi}{6}$. **B.** $\alpha=\frac{\pi}{3}$. **C.** $\alpha=\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

Câu 29: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $I(2;1)$ và đường thẳng $d: 2x+3y+4=0$. Tìm ảnh của d qua $Q_{(I,45^0)}$

A. $-x+5y-2+3\sqrt{2}=0$. **B.** $-x+5y-3+10\sqrt{2}=0$.

C. $x-5y+3+\sqrt{2}=0$. **D.** $-x+5y-3+11\sqrt{2}=0$.

Câu 30: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+6x+5=0$. Tìm ảnh đường tròn (C') của (C) qua $Q_{(O,90^0)}$.

A. $x^2+(y-3)^2=4$. **B.** $(C): x^2+y^2+6y-6=0$.

C. $x^2+(y+3)^2=4$. **D.** $(C): x^2+y^2+6x-5=0$.

Câu 31: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phép quay tâm O góc quay 45^0 $Q_{(O,45^0)}$. Tìm ảnh của đường tròn $(C): (x-1)^2+y^2=4$.

A. $\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=4$. **B.** $\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=4$.

C. $\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=4$. **D.** $x^2+y^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-2=0$.

Câu 32: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình các cạnh AB, BC của ΔABC biết $A(1;2)$, $B(3;4)$ và $\cos A=\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos B=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

A. $AC: x-y-1=0, BC: x-y+5=0$.
B. $AC: 3x-y-2=0, BC: x-2y+3=0$.
C. $AC: 3x-y-1=0, BC: x-2y+5=0$.
D. $AC: 3x-y-4=0, BC: x-2y+2=0$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

DẠNG 1: KHAI THÁC ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ ỨNG DỤNG PHÉP QUAY

Câu 1: **Đáp án D.**

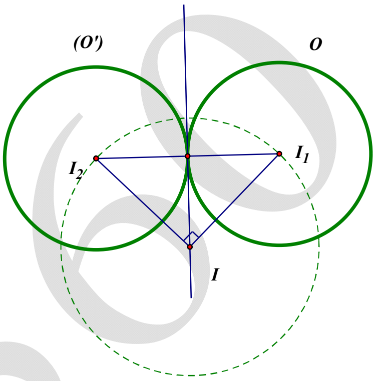
Câu 2: **Đáp án D.**

Thật vậy, các phép quay biến hình vuông thành chính nó: $Q_{(O,0^0)}, Q_{(O,90^0)}, Q_{(O,180^0)}, Q_{(O,270^0)}$.

Câu 3: **Đáp án D.**

Khi $\varphi = -\pi$, phép quay trở thành phép đối xứng tâm $I \Rightarrow d // d'$.

Câu 4: **Đáp án B.**



Gọi I là tâm của phép quay, I_1, I_2 là tâm các đường tròn (O) và (O').

$Q_{(I,90^0)}(I_1) = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} II_1 = II_2 \\ (II_1, II_2) = 90^0 \end{cases}$. Vậy chỉ có 1 phép quay thỏa mãn.

Câu 5: **Đáp án D.**

$Q_{(O,120^0)}(A) = E$, $Q_{(O,120^0)}(F) = D$, $Q_{(O,120^0)}(O) = O \Rightarrow Q_{(O,120^0)}(\Delta AOF) = \Delta EOD$.

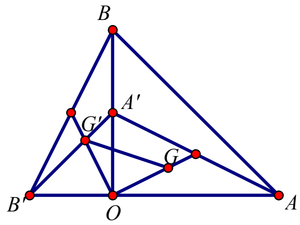
Câu 6: **Đáp án C.**

Khi kim giờ chỉ đến năm giờ đúng thì kim giờ quay được đúng -150^0 tức theo chiều âm.

Câu 7: **Đáp án D.**

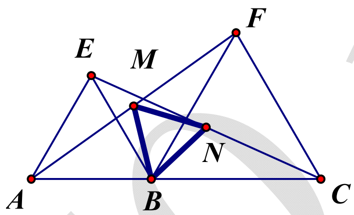
Vì góc quay 120^0 nên góc giữa hai đường thẳng là: $180^0 - 120^0 = 60^0$

Câu 8: **Đáp án D.**
Câu 9: **Đáp án D.**
Câu 10: **Đáp án C.**
Câu 11: **Đáp án D.**
Câu 12: **Đáp án C.**
Câu 13: **Đáp án B.**
Câu 14: **Đáp án C.**



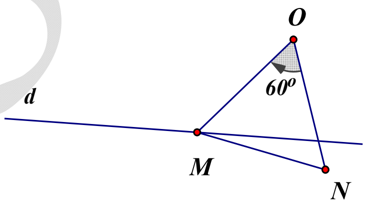
$\begin{cases} Q_{(O,90^0)}(A) = B \\ Q_{(O,90^0)}(A') = B' \end{cases} \Rightarrow Q_{(O,90^0)}(\Delta OAA') = \Delta OBB' \Rightarrow Q_{(O,90^0)}(G) = G'$. Do đó $OG = OG'$ và $\widehat{GOG'} = 90^0$

Câu 15: **Đáp án D.**



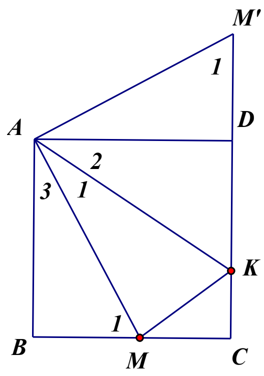
Phép quay tâm B góc quay 60^0 biến các điểm E, C lần lượt thành A, F biến đoạn EC thành AF nên biến trung điểm N của EC thành trung điểm M của $AF \Rightarrow BN = BM$ và $(BN, BM) = 60^0 \Rightarrow \Delta BMN$ đều.

Câu 16: **Đáp án A.**



Vì ΔOMN đều và O cố định $\Rightarrow N = Q_{(O,60^0)}(M)$.

Câu 17: **Đáp án C.**



Ta có: $Q_{(A,90^0)}: B \to D; Q_{(A,90^0)}: M \to M' \Rightarrow Q_{(A,90^0)}: BM \to DM' \Rightarrow BM = DM'$.

Vậy, $BM + KD = DM' + KD$.

Cần chứng minh: M', D, K thẳng hàng và $\Delta AKM'$ cân tại $K \Rightarrow DM' + KD = KM'$.

Thật vậy: $Q_{(A,90^0)}(BM) = DM' \Rightarrow BM \perp DM'$. Mà $BM \,//\, AD \Rightarrow AD \perp DM' \Rightarrow \widehat{ADM'} = 90^0$

M', D, K thẳng hàng.

Ta có: $Q_{(A,90^0)}: \Delta ABM \to \Delta ADM' \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{M_1'}$.

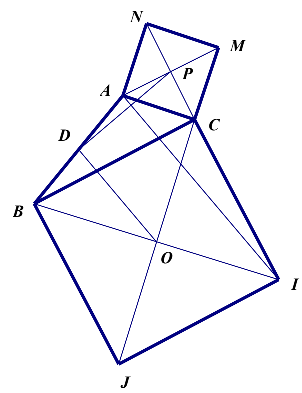
Có: $\widehat{M'AK} + \widehat{A_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{M'AK} + \widehat{A_3} = 90^0$ (do $\widehat{A_1} = \widehat{A_3}$) $\Rightarrow \widehat{M'AK} = \widehat{M_1} \Rightarrow \Delta AKM$ cân tại K

$\Rightarrow KM' = KD + DM' = KA \Rightarrow KD + BM = AK$

Câu 18: **Đáp án C.**

Ta có: $Q_{(C,90^0)}: M \to A; B \to I \Rightarrow Q_{(O,90^0)}: MB \to AI \Rightarrow MB = AI$.

Mà $\begin{cases} DP \,//\, BM, DP = \dfrac{1}{2}BM \\ DO \,//\, AI, DO = \dfrac{1}{2}AI \end{cases} \Rightarrow DO = DP$ và $DO \perp DP$



$\Rightarrow \Delta DOP$ là tam giác vuông cân.

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH ẢNH CỦA MỘT ĐIỂM HOẶC MỘT HÌNH QUA PHÉP QUAY BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

Câu 19: **Đáp án B.**
Câu 20: **Đáp án A.**
Câu 21: **Đáp án A.**
Câu 22: **Đáp án B.**
Câu 23: **Đáp án A.**

Vận dụng biểu thức tọa độ của phép quay tâm O và góc quay φ ta được đáp án A.

Câu 24: **Đáp án C.**

Ta có: $Q_{(I,90^0)}(A)=B\Rightarrow B(-2;5)$. I là trung điểm AC $\Rightarrow C(-2;-1)$; I là trung điểm BD $\Rightarrow D(4;-1)$

$\Rightarrow x_B.x_C.x_D=16$.

Câu 25: **Đáp án D.**

Ta có: $I\in d\Rightarrow I\in d'$

Đường thẳng d' có dạng: $x-y+c=0$. Vì d' đi qua I nên $1+2+c=0$ $\Rightarrow c=-3\Rightarrow d':x-y-3=0$

Câu 26: **Đáp án D.**

Áp dụng biểu thức tọa độ $\Rightarrow A'\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}};\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$

Câu 27: **Đáp án A.**

Ta có: $\begin{cases}OA=OA'=\sqrt{26}\\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'}=0\end{cases}\Rightarrow Q_{(O,-90^0)}(A)=A'$

(Do A nằm ở góc phần tư thứ hai, A' nằm ở góc phần tư thứ nhất)

Câu 28: **Đáp án B.**

Theo biểu thức tọa độ: $\begin{cases}x'=x.\cos\alpha-y.\sin\alpha\\ y'=x.\sin\alpha+y.\cos\alpha\end{cases}$. Do giá trị tọa độ $M'\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{3}$

Câu 29: **Đáp án D.**

Chọn 2 điểm $M(-2;0),N(1;-2)\in d$. Gọi $M'(x_1;y_1)$ và $N'(x_2;y_2)$ là ảnh của M,N qua $Q_{(I,45^0)}$. Áp dụng biểu thức tọa độ:

$$\begin{cases}x'-x_0=(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi\\ y'-y_0=(x-x_0)\sin\varphi+(y-y_0)\cos\varphi\end{cases}\Rightarrow M'\left(2-\frac{3\sqrt{2}}{2};1-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right),N'\left(2+\sqrt{2};1-2\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{M'N'}=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Gọi $d' = Q_{(I,45^0)}(d) \Rightarrow d'$ đi qua M', N' và có vtcp $\vec{u} = (5;1) \Rightarrow d': -x + 5y - 3 + 11\sqrt{2} = 0$.

Câu 30: **Đáp án C.**

Đường tròn (C) có tâm $I(-3;0)$ và bán kính $R = 2$. $Q_{(O,90^0)}(I) = I' \Rightarrow I'(0;-3)$.

Phương trình đường tròn $(C'): x^2 + (y+3)^2 = 4$.

Câu 31: **Đáp án A.**

Đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$ và bán kính $R = 2$.

$$Q_{(O,45^0)}(I) = I'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = 1.\cos 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = 1.\sin 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Phương trình đường tròn: $\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4$

Câu 32: **Đáp án C.**

Sử dụng tính chất của phép quay tâm $I(a;b) \in d: Ax + By + C = 0$ thành $d': (A - B\tan\varphi)(x-a) + (A\tan\varphi + B)(y-b) = 0$. Khi đó ta được phương trình:

$AC: 3x - y - 1 = 0, BC: x - 2y + 5 = 0$