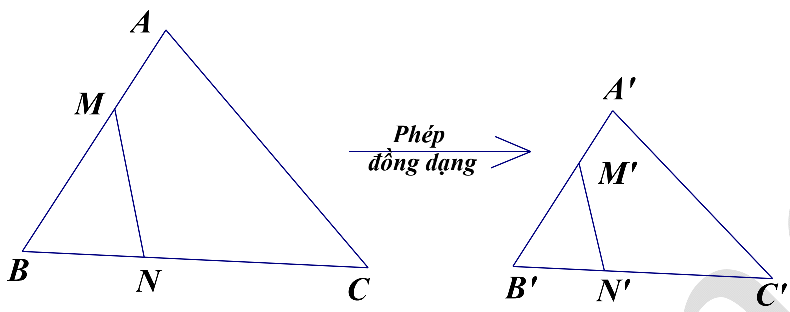
PHÉP ĐỒNG DẠNG

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Một phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số k $(k>0)$ nếu với hai điểm bất kỳ M,N và ảnh M',N' tương ứng của chúng ta luôn có $M'N'=kMN$.



Nhận xét:
- Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số $k=1$.
- Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.
- Nếu thực hiện liên tiếp hai phép đồng dạng thì ta được một phép đồng dạng.

2. Tinh chất

Phép đồng dạng tỉ số k :
a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toán thứ tự giữa chúng.
b) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
c) Biến một tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho, biến góc thành góc bằng nó.
d) Biến một đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|.R$.

STUDY TIP

a) Nếu một phép đồng dạng biến tam giác thành tam giác $A'B'C'$ thì nó cũng biến trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác ABC thành tương ứng của tam giác $A'B'C'$.
b) Phép đồng dạng biến đa giác n cạnh thành đa giác n cạnh, biến đỉnh thành đỉnh, cạnh thành cạnh.

3. Hình đồng dạng

Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia

B. CÁC DẠNG BÀI TOÁN VỀ PHÉP ĐỒNG DẠNG

Ví dụ 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai?**

A. Hai đường thẳng bất kỳ luôn đồng dạng. **B.** Hai đường tròn bất kỳ luôn đồng dạng.
C. Hai hình vuông bất kỳ luôn đồng dạng. **D.** Hai hình chữ nhật bất kỳ luôn đồng dạng.

Đáp án D

Lời giải:

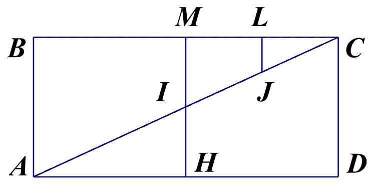
Với hai hình chữ nhật bất kỳ ta chọn từng cặp cạnh tương ứng khi đó tỉ lệ giữa chúng chưa chắc đã bằng nhau. Vì vậy không phải lúc nào cũng tồn tại phép đồng dạng biến hình chữ nhật này thành hình chữ nhật kia.

Ví dụ 2: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm I. Gọi H,K,L,J lần lượt là trung điểm của AD,BC,KC,IC. Tứ giác $IHCD$ đồng dạng với tứ giác nào sau đây?

A. $JLKI$. **B.** $ILJH$. **C.** $JLBA$. **D.** $ALJH$

Đáp án A

Lời giải:



Tứ giác $IHDC$ là hình thang vuông. Ta thấy $IHDC$ đồng dạng với $JLKI$ theo tỉ số $\frac{1}{2}$

Ví dụ 3: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Phép đồng dạng tỉ số $k=1$ là phép dời hình.
B. Phép đồng dạng tỉ số $k=-1$ là phép đối xứng tâm.
C. Phép đồng dạng tỉ số $k=1$ là phép tịnh tiến.
D. Phép đồng dạng tỉ số $k=1$ là phép vị tự tỉ số $k=1$

Đáp án A

Lời giải:

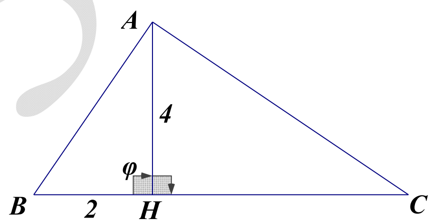
Khi $k=1$ phép đồng dạng bảo toàn khoảng cách nên là phép dời hình.

Ví dụ 4: Cho ΔABC có đường cao AH, H nằm giữa BC. Biết $AH=4, HB=2, HC=8$. Phép đồng dạng F biến ΔHBA thành ΔHAC. F được hình thành bởi hai phép biến hình nào?

A. Phép đối xứng tâm H và phép vị tự tâm H tỉ số $k=\frac{1}{2}$.
B. Phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{BA}$ và phép vị tự tâm H tỉ số $k=2$.
C. Phép vị tự tâm H tỉ số $k-2$ và phép quay tâm H góc quay là góc (HB, HA).
D. Phép vị tự tâm H tỉ số $k=2$ và phép đối xứng trục

Đáp án C

Lời giải:



Ta có $V_{(H,2)}$ và $Q_{(H;\varphi)}$ với $\varphi=(HB, HA)$ biến B thành A và A thành C, vậy F là phép đồng dạng hợp thành của $V_{(H,2)}$ và $Q_{(H;\varphi)}$ biến ΔHBA thành ΔHAC.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(2;4)$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc quay $-90°$ sẽ biến điểm M thành điểm nào sau đây?

A. $(2;-1)$. **B.** $(2;1)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(1;2)$

Đáp án A

Lời giải:

Ta có $V_{\left(O;\frac{1}{2}\right)}(M)=M'(x';y') \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OM} \Rightarrow M'(2;-1)$

$Q_{(O;-90^\circ)}(M')=M''(x'';y'')\Rightarrow\begin{cases}x''=y'=2\\ y''=-x'=-1\end{cases}\Rightarrow M''(2;-1)$.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d:2x-y=0$ thỏa mãn phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện llieen tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ và phép đối xứng trục Oy sẽ biến đường thẳng d thành đường thẳng nào sau đây?

A. $-2x-y=0$. **B.** $2x+y=0$. **C.** $4x-y=0$. **D.** $2x+y-2=0$

Đáp án A

Lời giải:

Ta có: $V_{(O;-2)}(d)=d'\Rightarrow d'\parallel d$

$\Rightarrow d'$ có dạng: $2x-y+c=0$

Chọn $N(1;2)\in d:V_{(O;-2)}(N)=N'(-2;-4)\in d'\Rightarrow -4+4+c=0\Rightarrow c=0$

+ phương trình đường thẳng $d':2x-y=0$

Qua phép đối xứng trục Oy : Đ$_{oy}(d')=d''$

Suy ra phương trình ảnh d'' cần tìm là: $-2x-y=0$

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc quay 90^0 sẽ biến (C) thành đường tròn nào sau đây?

A. $(x-2)^2+(y-2)^2=1$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

C. $(x+2)^2+(y-1)^2=1$. **D.** $(x+1)^2+(y-1)^2=1$

Đáp án D.

Lời giải:

Gọi $V_{\left(O;\frac{1}{2}\right)}((C))=(C')$ nên đường tròn (C') có tâm $I'(1;1)$ và bán kính $R'=1$.

Ta lại có $Q_{(O;90^0)}((C'))=(C'')$ có bán kính $R''=1$ và tâm $I''(x'';y'')$ được xác định

$\begin{cases}x''=-y'=-1\\ y''=x'=1\end{cases}\Rightarrow I''(-1;1)$

Vậy phương trình đường tròn (C'') là: $(x+1)^2+(y-1)^2=1$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Phép dời hình là phép đồng dạng, tỉ số $k=-1$.

B. Phép vị tự tỉ số k là một phép đồng dạng với tỉ số $-k$.

C. Phép vị tự tỉ số $k\neq 0$ là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.

D. Phép đồng dạng là phép dời hình với $k\neq 0$.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

I. “ Mỗi phép vị tự tỉ số k là một phép đồng dạng tỉ số k ”.
II. “ Mỗi phép đồng dạng là một phép dời hình”.
III. “ Thực hiện liên tiếp hai phép đồng dạng ta được một phép đồng dạng”

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Chỉ III. **D.** Cả I và III.

Câu 3: Giả sử phép đồng dạng F biến tam giác ABC thành tam giác $A_1B_1C_1$. Giả sử F biến trung tuyến AM của ΔABC thành đường cao A_1M_1 của $\Delta A_1B_1C_1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\Delta A_1B_1C_1$ là tam giác đều. **B.** $\Delta A_1B_1C_1$ là tam giác cân.
C. $\Delta A_1B_1C_1$ là tam giác vuông tại B_1. **D.** $\Delta A_1B_1C_1$ là tam giác vuông tại C_1.

Câu 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và $AC = 2AB$. Gọi Q là phép quay tâm A góc quay $\varphi = (AB, AC)$ V là phép vị tự tâm A tỉ số 2, F là phép hợp thành của V và Q. F biến đường tròn tâm B bán kính BA thành đường tròn nào sau đây?

A. Đường tròn tâm D bán kính DB . **B.** Đường tròn tâm C bán kính CA.
C. Đường tròn tâm D bán kính DC. **D.** Đường tròn tâm A bán kính AC.

Câu 5: Cho hai đường tròn $(I;R)$ và $(I';2R)$ tiếp xúc ngoài nhau tại O. d là đường thẳng tiếp xúc với hai đường tròn tại O. Gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số k, Đ là phép đối xứng qua đường thẳng d , F là phép hợp thành của Đd và $V_{(O;k)}$. Với giá trị k bằng bao nhiêu thì F biến $(I;R)$ thành $(I';2R)$?

A. $k = 2$. **B.** $k = -2$. **C.** $k = -\frac{1}{2}$. **D.** $k = \frac{1}{2}$.

Câu 6: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O (điểm được đặt theo chiều kim đồng hồ). A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số $k = \sqrt{2}$ và Q là phép quay tâm O góc quay $-\frac{\pi}{4}$. Phép biến hình F được xác định là hợp thành liên tiếp của phép quay và phép vị tự. Khi đó qua F ảnh của đoạn thẳng $B'D'$ là:

A. Đoạn $D'B'$. **B.** Đoạn $A'C'$. **C.** Đoạn CA. **D.** Đoạn BD.

Câu 7: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Trên cạnh AB lấy điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Gọi G là trọng tâm ΔABD. F là phép đồng dạng biến ΔAGI thành ΔCOD. Khi đó F là hợp bởi hai phép biến hình nào?

A. Phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{GD}$ và phép $V_{(B;-1)}$. **B.** Phép $Q_{(G;108^0)}$ và phép $V_{\left(B;\frac{1}{2}\right)}$.
C. Phép $V_{\left(A;\frac{3}{2}\right)}$ và phép $Q_{(O;-108^0)}$. **D.** Phép $V_{\left(A;\frac{3}{2}\right)}$ và phép $Q_{(G;-108^0)}$.

Câu 8: Phép đồng dạng với tỉ số k nào dưới đây thì được một hình bằng hình ban đầu?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 9: Phóng to một hình chữ nhật kích thước là 4 và 5 theo phép đồng dạng tỉ số $k = 3$ thì được hình có diện tích là:

A. 60 đơn vị diện tích. **B.** 180 đơn vị diện tích.
C. 120 đơn vị diện tích. **D.** 20 đơn vị diện tích.

Câu 10: Cho ΔABC và $\Delta A'B'C'$ đồng dạng với nhau theo tỉ số k. Chọn câu sai:

A. k là tỉ số hai trung tuyến tương ứng.

B. k là tỉ số hai đường cao tương ứng.
C. k là tỉ số hai góc tương ứng.
D. k là tỉ số hai bán kính đường tròn ngoại tiếp tương ứng.

Câu 11: Cho hình vuông $ABCD$, P thuộc cạnh AB, H là chân đường vuông góc hạ từ B đến PC. Phép đồng dạng viến ΔBHC thành ΔPHB. Khi đó ảnh của B và D lần lượt là:
A. P và $Q(Q \in BC; BQ = BH)$. **B.** C và $Q(Q \in BC; BQ = BH)$.
C. H và $Q(Q \in BC; BQ = BH)$. **D.** P và C.

Câu 12: Mệnh đề nào sau đây là đúng?
A. Mọi phép đồng dạng đều biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó
B. Mọi phép đồng dạng biến hình vuông thành hình vuông.
C. Tồn tại phép đồng dạng biến hình chữ nhật (không phải hình vuông) thành hình vuông.
D. Phép đồng dạng biến tam giác thành tam giác có cùng diện tích.

Câu 13: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $M(1;2)$. Phép đồng dạng là hợp thành của phép vị tự tâm $I(1;2)$ tỉ số $k=2$ và phép quay tâm O góc quay $\frac{\pi}{4}$ sẽ biến M thành điểm có tọa độ:
A. $(2;-1)$ **B.** $(2\sqrt{2};\sqrt{2})$ **C.** $(2;2\sqrt{2})$ **D.** $(2\sqrt{2};-\sqrt{2})$

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y=0$. Phép đồng dạng là phép thực hiện liên tiếp qua phép vị tự tâm $I(1;-2)$ tỉ số $k=3$ và phép quay tâm O góc quay $\frac{\pi}{2}$ sẽ biến đường thẳng d thành đường thẳng nào sau đây?
A. $2x-y-6=0$ **B.** $x+2y-6=0$ **C.** $2x-y+6=0$ **D.** $2x-y-3=0$

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(0;1)$. Phép đồng dạng là phép thực hiện liên tiếp qua phép vị tự tâm $I(4;2)$ tỉ số $k=-3$ và phép đối xứng qua trục $d: x-2y+4=0$ sẽ biến M thành điểm nào sau đây?
A. $(16;5)$ **B.** $(14;9)$ **C.** $(12;13)$ **D.** $(18;1)$

Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=4$. Phép đồng dạng là phép thực hiện liên tiếp qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ và phép quay tâm O góc quay 180^0 sẽ biến đường tròn (C) thành đường tròn nào sau đây? (O là gốc tọa độ)
A. $x^2+y^2-4x-8y-2=0$ **B.** $x^2+y^2+4x+8y+2=0$
C. $(x+2)^2+(y+4)^2=16$ **D.** $(x-2)^2+(y-4)^2=16$

Câu 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=9$. Phép đồng dạng là phép thực hiện liên tiếp qua phép vị tự tâm $I(1;-1)$ tỉ số $k=\frac{1}{3}$ và phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(3;4)$ sẽ biến đường tròn (C) thành đường tròn có phương trình:
A. $(x-4)^2+(y-4)^2=9$ **B.** $(x-4)^2+(y-4)^2=1$
C. $(x+4)^2+(y+4)^2=1$ **D.** $(x-1)^2+y^2=1$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: **Đáp án C.**

Câu 2: **Đáp án C.**

Câu 3: **Đáp án D.**

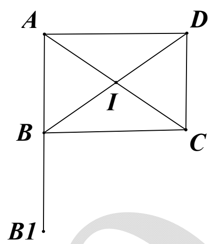
Theo tính chất phép đồng dạng thì A_1M_1 là đường trung tuyến của $\Delta A_1B_1C_1$, theo giả thiết A_1M_1 lại là đường cao nên $\Delta A_1B_1C_1$ là tam giác cân tại A_1. Vì vậy ΔABC cân tại A.

Câu 4: **Đáp án B.**

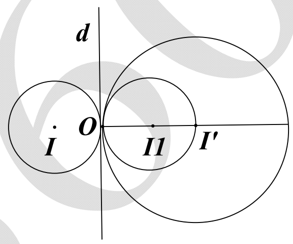
$V_{(A;2)}(B) = B_1; Q_{(A;\varphi)}(B_1) = C$

Qua $V_{(A;2)}$ biến đường tròn tâm B bán kính BA thành đường tròn tâm B_1 bán kính B_1A.

Qua $Q_{(A;\varphi)}$ biến đường tròn tâm B_1 bán kính B_1A thành đường tròn tâm C bán kính CA.

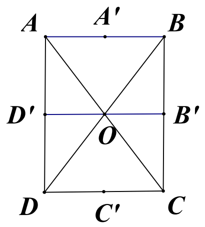


Câu 5: **Đáp án A.**



Ta có: Đ$_d((I)) = (I_1); V_{(O;2)}((I_1)) = (I')$. Vậy $k = 2$

Câu 6. **Đáp án C.**

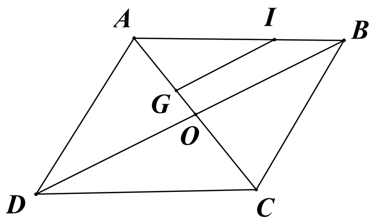


Ta có: $Q_{\left(O;\frac{\pi}{4}\right)}$ biến B', D' thành $B_1, D_1 : B_1D_1 = B'D'$ và B_1, D_1 nằm trên đường thẳng qua AC

$V_{(O;\sqrt{2})}(B_1) = B_2; V_{(O;\sqrt{2})}(D_1) = D_2 \Rightarrow OB_2 = \sqrt{2}OB_1, OD_2 = \sqrt{2}OD_1 \Rightarrow B_2D_2 = \sqrt{2}B_1D_1 = \sqrt{2}B'D' = AC$

.

Câu 7. **Đáp án C.**



- Phép $V_{\left(A;\frac{3}{2}\right)}\left(\Delta AGI\right)=\Delta AOB$

- Phép $Q_{\left(O;-180^0\right)}\left(\Delta AOB\right)=\Delta COD$

Câu 8. **Đáp án A.**

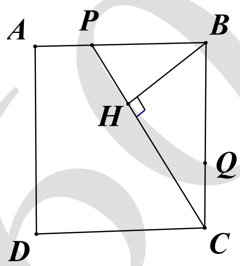
Đáp án B.

Qua phép đồng dạng tỉ số $k=3$ ta được các cạnh tương ứng của hình chữ nhật là 12 và 15.

$\Rightarrow$ Diện tích của hình chữ nhật ảnh là: 12.15 = 180.

Câu 10. **Đáp án C.**

Câu 11. **Đáp án A.**



Câu 12. **Đáp án B.**

Câu 13. **Đáp án B.**

Ta có: $V_{(I;2)}\left(M\right)=M'\left(x;y\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=2\overrightarrow{IM}\Rightarrow\begin{cases}x'=3\\y'=-1\end{cases}\Rightarrow M'\left(3;-1\right)$.

$$Q_{\left(O;\frac{\pi}{4}\right)}\left(M'\right)=M''\left(x'';y''\right)\Rightarrow\begin{cases}x''=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}\\y''=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow M''\left(2\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$$

Câu 14. **Đáp án C.**

Ta có: $V_{(I;3)}\left(d\right)=d'\Leftrightarrow d'\parallel d\Rightarrow d'$ có dạng: $x+2y+c=0$.

Chọn $M\left(2;-1\right)\in d\Rightarrow V_{(I;3)}\left(M\right)=M'\left(x';y'\right)\Rightarrow M'\left(4;1\right)\in d'\Rightarrow 4+2+c=0\Rightarrow c=-6$

$\Rightarrow d':x+2y-6=0$.

Có $Q_{\left(O;\frac{\pi}{4}\right)}\left(d'\right)=d''$.

Gọi $N\left(x';y'\right)\in d'\Rightarrow Q_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}\left(N'\right)=N''\left(x'';y''\right)\Rightarrow\begin{cases}x''=-y\\y''=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y''\\y=-x''\end{cases}$

Thế vào phương trình $d'':y''-2x''-6=0$.

Vậy phương trình $d'':2x-y+6=0$.

Câu 15. **Đáp án C.**

Ta có: $V_{(I;-3)}(M)=M'(x;y)\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=-3\overrightarrow{IM}\Rightarrow M'(16;5)$.

$Đ_d(M')=M''(x'';y'')\Rightarrow d$ là trung trực của $M'M''$ $\Rightarrow M'M''$ có dạng: $2x+y+c=0$ đi qua M'

$\Rightarrow c=-37\Rightarrow M'M'':2x+y-37=0$

Gọi H là trung điểm của $M'M''$

$\Rightarrow$ tọa độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x+y-37=0\\x-2y+4=0\end{cases}\Rightarrow H(14;9)\Rightarrow M''(12;13)$.

Câu 16. **Đáp án D.**

Đường tròn (C) có tâm $J(1;2)$ bán kính $R=2$

$V_{(O;-2)}(J)=J_1(x';y')\Rightarrow J_1(-2;-4)$, bán kính $R_1=2R=4$

$\Rightarrow$ Phương trình $(C_1):(x+2)^2+(y+4)^2=16$

$Q_{(O;180^0)}(J_1)=J_2(x'';y'')\Rightarrow J_2(2;4)$, bán kính $R_2=R_1=4$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $(x-2)^2+(y-4)^2=16$

Câu 17. **Đáp án B.**

Đường tròn (C) có tâm $J(1;2)$ bán kính $R=3$

$V_{\left(I;\frac{1}{3}\right)}(J)=J_1\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{IJ}_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\Rightarrow J_1(1;0),R_1=\frac{1}{3}R=1$

$T_{\vec{v}}(J_1)=J_2\Rightarrow \overrightarrow{J_1J_2}=\vec{v}\Rightarrow J_2(4;4)$, bán kính $R_2=1$

Vậy đường tròn ảnh qua hai phép $V_{\left(I;\frac{1}{3}\right)}$ và $T_{\vec{v}}$ là: $(x-4)^2+(y-4)^2=1$.