HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa

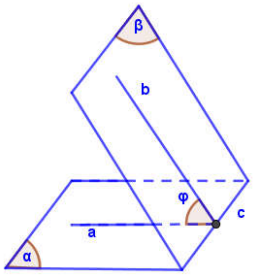
- Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- Nếu hai mặt phẳng đó song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0.

2. phương pháp tính góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau

❖ **Phương pháp 1:** Dựng hai đường thẳng a, b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β).

Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là $\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right)$. Tính góc $\left(\widehat{a,b}\right)$.

❖ **Phương pháp 2:**

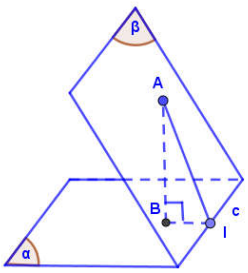


- Xác định giao tuyến c của hai mặt phẳng (α) và (β).
- Dựng hai đường thẳng a, b lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến c tại một điểm trên c. Khi đó: $\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right)$.

  Hay ta xác định mặt phẳng phụ (γ) vuông góc với giao tuyến c mà $(\alpha)\cap(\gamma)=a$, $(\beta)\cap(\gamma)=b$.

  Suy ra $\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right)$.

❖ **Phương pháp 3:** (trường hợp đặc biệt)



- Nếu có một đoạn thẳng nối hai điểm A, B $\left(A\in(\alpha),B\in(\beta)\right)$ mà $AB\perp(\beta)$ thì qua A hoặc B ta dựng đường thẳng vuông góc với giao tuyến c của hai mặt phẳng tại H. Khi đó $\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\widehat{AHB}$.

Ví dụ 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy $ABCD$ bằng a và $SA=SB=SC=SD=a$. Tính cosin góc giauwx hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi I là trung điểm SA. Do tam giác SAD và SAB đều nên $\begin{cases} BI \perp SA \\ DI \perp SA \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right) = \left(\widehat{BI,DI}\right)$.

Áp dụng định lý cosin cho tam giác BID ta có:

$$\cos\widehat{BID} = \frac{IB^2 + ID^2 - BD^2}{2IB.ID} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}a.\frac{\sqrt{3}}{2}a} = -\frac{1}{3}.$$

Vậy $\cos\left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right) = \frac{1}{3}$.

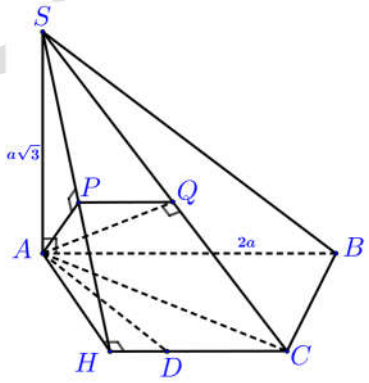
Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$, SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. $\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\arccos\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Nhận xét: Theo định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng ta đi xác định hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Lời giải

Chọn A.



Vì $ABCD$ là nửa lục giác đều nên $AD = DC = CB = a$.

Dựng đường thẳng đi qua A và vuông góc với (SCD).

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng $AH \perp CD$ tại $H \Rightarrow CD \perp (SAH)$.

Trong mặt phẳng (SAH) dựng $AP \perp SH \Rightarrow CD \perp AP \Rightarrow AP \perp (SCD)$.

Dựng đường thẳng đi qua A và vuông góc với (SBC).

Trong mặt phẳng (SAC) dựng $AQ \perp SC$.

Lại có $AQ \perp BC$ vì $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AQ$.

Vậy $AQ \perp (SBC)$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng ấy là AP và AQ.

- Ta tính góc $\widehat{PAQ}$, có $AH = \sqrt{AD^2 - HD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{AP^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2} \Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow AQ = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

ΔAPQ vuông tại $P \Rightarrow \cos\widehat{PAQ} = \frac{AP}{AQ} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{PAQ} = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$.

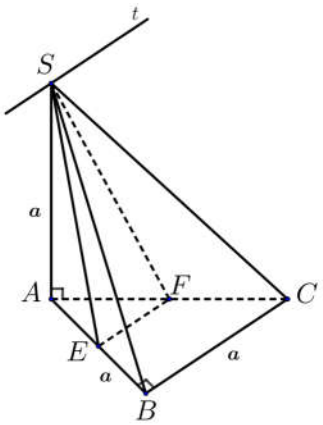
Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với $BA = BC = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC).

A. $\frac{3}{\sqrt{10}}$. **B.** $\frac{5}{\sqrt{10}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **D.** $\frac{3}{2\sqrt{10}}$.

Nhận xét: Giao tuyến của hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là đường thẳng St đi qua S và song song với EF và BC nên ta xác định hai đường thẳng qua S và lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) và cùng vuông góc với St (ta đi chứng minh hai đường thẳng đó là SE và SB).

Lời giải

Chọn A.



Vì $\begin{cases} EF \subset (SEF) \\ BC \subset (SBC) \\ EF \,//\, BC \end{cases} \Rightarrow$ giao tuyến của (SEF) và (SBC) là đường thẳng qua S, song song với BC, là St.

$\begin{cases} BC \perp AB \quad (gt) \\ BC \perp SA \quad (vì\ SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ hay $St \perp SB$.

Tương tự $EF \perp (SAE) \Rightarrow EF \perp SE$ mà $EF \,//\, St \Rightarrow St \perp SE$.

Vậy SB và SE cùng đi qua S và cùng vuông góc với St nên góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng SB và SE.

Ta tính góc $\widehat{BSE}$.

Có $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$; $BE = \dfrac{a}{2}$.

Theo định lí cosin ta có: $\cos \widehat{BSE} = \dfrac{SE^2 + SB^2 - BE^2}{2.SE.SB} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \widehat{BSE} = \arccos \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

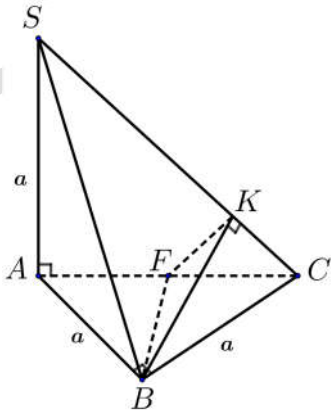
Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA = a$ và $SA \perp (ABC)$, $AB = BC = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Nhận xét: Ta áp dụng phương pháp 3 - trường hợp đặc biệt.

Lời giải

Chọn C.



Ta có $(SAC) \cap (SBC) = SC$.

Gọi F là trung điểm $AC \Rightarrow BF \perp (SAC)$.

Dựng $BK \perp SC$ tại $K \Rightarrow SC \perp (BKF) \Rightarrow \widehat{((SAC),(SBC))} = \widehat{(KB, KF)} = \widehat{BKF}$

$$\Delta CFK \sim \Delta CSA \Rightarrow \frac{FK}{FC} = \frac{SA}{SC} \Rightarrow FK = \frac{FC.SA}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

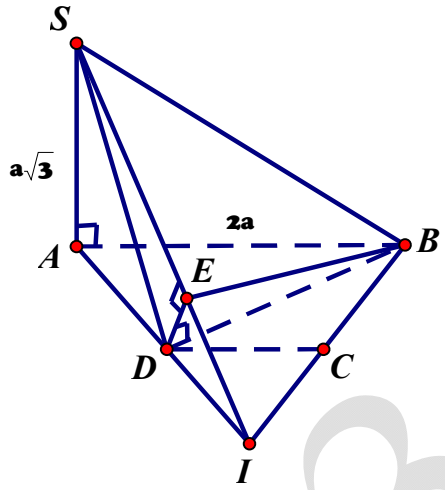
ΔBFK vuông tại $F \Rightarrow \tan\widehat{BKF} = \dfrac{FB}{FK} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a}{\sqrt{6}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BKF} = 60° = \widehat{\left((SAC),(SBC)\right)}$.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$, SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

A. $\sqrt{14}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi $J = AD \cap BC$, $ABCD$ là nửa lục giác đều nên $AD = DC = CB = a$, $AI = IB = a$.

$(SAD) \cap (SBC) = SI \Rightarrow \begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SI$.

Vì vậy theo trường hợp đặc biệt ta chỉ cần dựng $DE \perp SI$ với $E \in SI$.

Khi đó, $SI \perp (BED) \Rightarrow \left(\widehat{(SAD),(SSBC)}\right) = \left(\widehat{EB,ED}\right) = \widehat{BED}$, (Vì ΔBED vuông tại D)

ΔAIB đều nên $BD = a\sqrt{3}$

$SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = a\sqrt{7}$

Hai tam giác vuông SAI và DEI đồng dạng nên: $\dfrac{DE}{SA} = \dfrac{DI}{SI} \Rightarrow DE = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

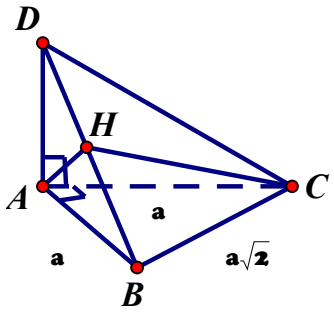
ΔBDE vuông tại $D \Rightarrow \tan\widehat{BED} = \dfrac{BD}{DE} = \sqrt{7}$ A

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$, trên đường thẳng d vuông góc với (ABC) tại điểm A ta lấy một điểm D. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC), trong trường hợp (DBC) là tam giác đều.

A. $\arccos\frac{1}{3}$ **B.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$

Đáp Án: B

Lời giải:



Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC).

Theo công thức diện tích hình chiếu của đa giác, ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta DBC}.\cos\varphi$

Mà: $S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2}DB.DC.\sin 60^0 = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Mặt khác: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}a^2$

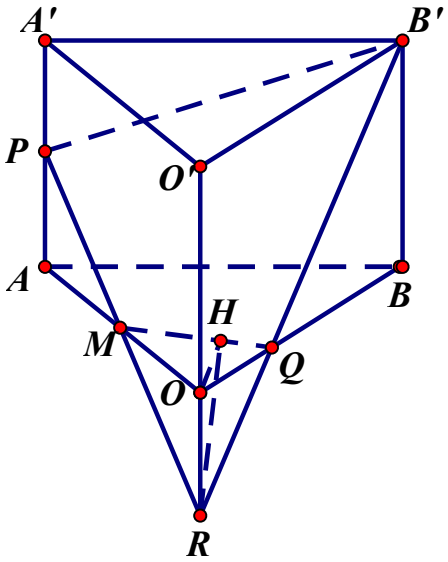
$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DBC}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ví Dụ 7: Cho lăng trụ đứng $OAB.O'A'B'$ có các đáy là các tam giác vuông cân $OA = OB = a, AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, P lần lượt là trung điểm các cạnh OA, AA'. Tính diện tích thiết diện khi cắt lăng trụ bởi $(B'MP)$?

A. $\frac{a^2\sqrt{15}}{12\sqrt{2}}$ B. $\frac{5a^2\sqrt{15}}{12\sqrt{2}}$ C. $\frac{5a^2\sqrt{15}}{6\sqrt{2}}$ D. $\frac{a^2\sqrt{15}}{6\sqrt{2}}$

Đáp Án: C

Lời giải:



Gọi R là giao điểm của MP và OO' , Q là giao điểm của $B'R$ với OB.

Thiết diện là tứ giác $MPB'Q$, ta có: $\frac{OQ}{O'B'}=\frac{RO}{RO'}=\frac{1}{3}\Rightarrow OQ=\frac{a}{3}$.

Tứ giác $AMQB$ là hình chiếu vuông góc của tứ giác $PMQB'$ trên mặt phẳng (OAB) nên:

$S_{PMQB'}=\frac{S_{AMQB}}{\cos\varphi}$.

Với φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (OAB) và $(MPB'Q)$.

Ta có: $S_{AMQB}=S_{OAB}-S_{OMQ}=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{12}a^2=\frac{5}{12}a^2$

Hạ $OH\perp MQ$, ta có: $\begin{cases}MQ\perp OH\\MQ\perp OR\end{cases}\Rightarrow MQ\perp(OHR)$

Vậy: $\varphi=\widehat{OHR}$ ($\widehat{OHR}$ nhọn)

Ta có: $\cos\varphi=\cos\widehat{OHR}=\frac{OH}{RH}=\frac{OH}{\sqrt{OH^2+OR^2}}=\frac{\frac{a}{\sqrt{13}}}{\sqrt{\frac{a^2}{13}+\frac{a^2}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$

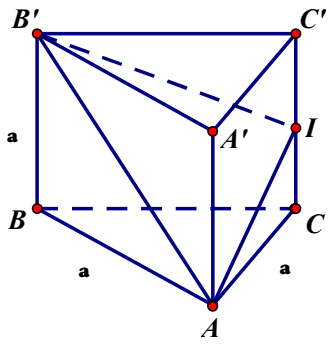
Vậy: $S_{PMQB'}=\frac{5a^2\sqrt{15}}{12\sqrt{2}}$

Ví dụ 8: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là một tam giác cân với $AB=AC=a,\widehat{BAC}=120^0$, cạnh bên $BB'=a$. Gọi I là trung điểm CC'. Chứng minh rằng tam giác $AB'I$ vuông ở A. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

A. $\frac{\sqrt{15}}{10}$. **B.** $\frac{\sqrt{30}}{10}$. **C.** $\frac{10}{\sqrt{30}}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{30}}$.

Đáp án B.

Lời giải



Áp dụng định lý cosin cho ΔABC ta có: $BC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos 120^0 = 3a^2$.

Áp dụng định lý Py – ta – go cho tam giác:

$\Delta B'BA$ có: $B'A^2 = 2a^2$.

ΔICA có: $AI^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$.

$\Delta B'C'I$ có: $B'I^2 = 3a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{4}$.

Ta có: $B'A^2 + AI^2 = 2a^2 + \frac{5a^2}{4} = \frac{13a^2}{4} = B'I^2 \Rightarrow \Delta AB'I$ vuông ở A.

Ta có: $S_{\Delta AB'I} = \frac{1}{2}AI.AB' = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2\sin 120^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$. Thì ta có:

$$\cos\varphi = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABI'}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{10}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Mệnh đề nào **đúng** trong các mệnh đề sau?

A. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

B. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

C. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).

D. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c.

Câu 2. Mệnh đề nào **đúng** trong các mệnh đề sau?

A. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

B. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) khi a và b song song (hoặc a trùng với b).

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a và b song song.

Câu 3. Mệnh đề nào **đúng** trong các mệnh đề sau?

A. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.

B. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (R) song song với mặt phẳng (Q) (hoặc (R) trùng với (Q)).

C. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) thì mặt phẳng (R) song song với mặt phẳng (Q).

D. Cả ba mệnh đề trên đều đúng.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a$. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ là α. Khi đó $\tan\alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau:

A. $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\tan\alpha=1$ **C.** $\tan\alpha=\sqrt{2}$. **D.** $\tan\alpha=\sqrt{3}$.

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xét mặt phẳng $(A'BD)$, trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng?**

A. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng nhau.

B. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng nhau.

C. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng α mà $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Câu 6. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và có một mặt bên vuông góc với đáy. Xét bốn mặt phẳng chứa bốn mặt bên và mặt phẳng chứa mặt đáy. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng?**

A. Có hai cặp mặt phẳng vuông góc nhau.

B. Có ba cặp mặt phẳng vuông góc nhau.

C. Có bốn cặp mặt phẳng vuông góc nhau.

D. Có năm cặp mặt phẳng vuông góc nhau.

Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$, hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DH}$?

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 120^0. **D.** 60^0.

Câu 8. Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c. Mệnh đề nào sau đây **đúng?**

A. Nếu a và b cùng vuông góc với c thì $a//b$.

B. Nếu $a//b$, $c \perp a$ thì $c \perp b$.

C. Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a//b$.

D. Nếu a và b cùng nằm trong mặt phẳng (α) và $c//(\alpha)$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa SB và AC.

A. 60^0. **B.** 120^0. **C.** 45^0. **D.** 90^0.

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC, ABD là các tam giác đều. Góc giữa AB và CD là

A. 120^0. **B.** 60^0. **C.** 90^0. **D.** 30^0.

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'CD'$. Giả sử tam giác $AB'C, A'DC'$ là các tam giác nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

B. $\widehat{AB'C}$. **B.** $\widehat{DA'C}$. **C.** $\widehat{BB'C}$. **D.** $\widehat{DAC}$.

Câu 12. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai.

B. Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, CA và BD. Khi đó góc giữa AB và CD là:

A. $\widehat{JIK}$. **B.** $\widehat{ABC}$. **C.** $\widehat{IJK}$. **D.** $\widehat{JKI}$.

Câu 14. Cho một hình thoi $ABCD$ cạnh a và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa hình thoi sao cho $SA=a$ và vuông góc với (ABC). Tính góc giữa SD và BC

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** $\arctan\sqrt{2}$.

Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$.Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của BC, AD và AC. Cho $AB=2a$, $CD=2a\sqrt{2}$ và $MN=a\sqrt{5}$. Tính góc $\varphi=\left(\widehat{AB,CD}\right)$

A. 135°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 45°.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $SA=a$, ΔABC đều cạnh a. Tính góc giữa SB và (ABC)

A. $\arctan 2$. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $SA=a$, ΔABC đều cạnh a. Tính $\tan\left(\widehat{SC,(SAB)}\right)$?

A. $\sqrt{\frac{3}{5}}$. **B.** $\sqrt{\frac{5}{3}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 18. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC). Tính $\cos\varphi$?

A. 3. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a; $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SBC)?

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a; $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC)?

A. $\frac{2\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{3}$.

Câu 21. Cho ba tia Ox, Oy, Oz trong không gian sao cho $\widehat{xOy}=120^\circ$, $\widehat{zOy}=90^\circ$, $\widehat{xOz}=60^\circ$ Trên ba tia ấy lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $OA=OB=OC=a$. Gọi α, β lần lượt là góc giữa mặt phẳng (ABC) với mặt phẳng (OBC) và mặt phẳng (OAC). Tính $\tan\alpha\cdot\tan\beta$?

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{\frac{3}{2}}$. **D.** 1.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SA và SC. Tính góc giữa hai đường thẳng IJ và BD

A. 90°. **B.** 60°. **C.** $\arctan\frac{1}{3}$. **D.** 45°.

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có $CD = \frac{4}{3}AB$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, AC, DB. Biết $IK = \frac{5}{6}AB$ .Tính góc giữa hai đường thẳng CD và IJ

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Câu 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và $C'D'$

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Câu 26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính góc giữa hai đường thẳng BD và AD'

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Câu 27. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, $C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và AP

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Câu 28. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, $C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng DN và $A'P$

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính cosin góc tạo bởi SC và mặt phẳng (SAB).

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{8}}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Câu 30. Cho hình chop $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với $(ABCD)$ cà $SA = a\sqrt{6}$. Tính sin của góc tạo bởi AC và mặt phẳng (SBC) .

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{7}}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Câu 31. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC cân đỉnh $A, \widehat{ABC}=\alpha$, BC' tạo đáy góc β . Gọi I là trung điểm của AA' , biết $\widehat{BIC}=90^0$. Tính $\tan^2\alpha+\tan^2\beta$

A. $\frac{1}{2}$. B. 2 . C. $\sqrt{3}$. D. 1 .

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đường cao và đáy là tam giác ABC vuông tại B . Cho $\widehat{BSC}=45^0$, gọi $\widehat{ASB}=\alpha$. Tìm $\sin\alpha$ để góc giữa hai mặt phẳng (ASC) và (BSC) bằng 60^0

A. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{5}$. B. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{9}$. D. $\sin\alpha=\frac{1}{5}$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. **Đáp án C.**

+) Đáp án A sai vì góc giữa hai đường thẳng có thể bằng hoặc bù với góc giữa hai véc tơ chỉ phương.

+) Đáp án B sai vì có thể là góc 90^0.

Câu 2. **Đáp án B.**

+) Đáp án A sai vì khi đường thẳng đó vg với mặt phẳng.

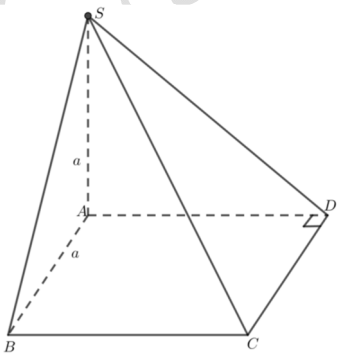
+) Đáp án C, D: Vẽ hình thấy có vô số đường thẳng và mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 3. **Đáp án B.**

+) Đáp án A sai vì vì có thể là vg.

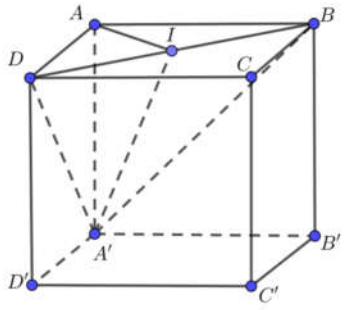
+) Đáp án C sai vì chẳng hạn (Q) và (R) cắt nhau, (P) là mặt phẳng phân giác.

Câu 4. **Đáp án B.**



Ta có: $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAD)\Rightarrow\alpha=\widehat{SDA}$. Mà $\triangle SDA$ vuông cân tại A nên $\widehat{SDA}=45^0$.

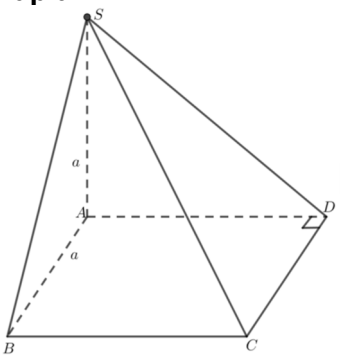
Câu 5. **Đáp án A.**



Đáp án B, C vì giả sử ta xác định góc giữa $(A'BD)$ và $(ABCD)$ là góc $\widehat{A'IA}$ với I là trung điểm của BD và $\cos\widehat{AIA'}=\dfrac{AI^2+A'I^2-AA'^2}{2.AI.A'I}=\dfrac{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2-a^2}{2.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{\dfrac{2a^2}{4}+\dfrac{6a^2}{4}-a^2}{\dfrac{2a^2\sqrt{12}}{4}}=\dfrac{4a^2}{2a^212}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

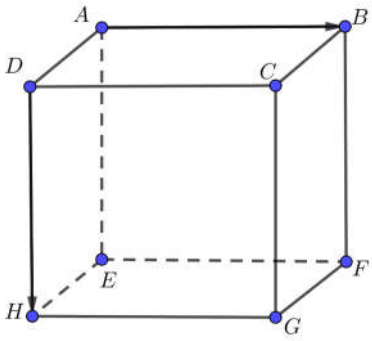
$\Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \tan\alpha\neq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 6. **Đáp án B.**



Giả sử hình chóp đó là $S.ABCD$. Ta có $(SAB)\perp(ABCD);(SAB)\perp(SAD);(SAD)\perp(ABCD)$

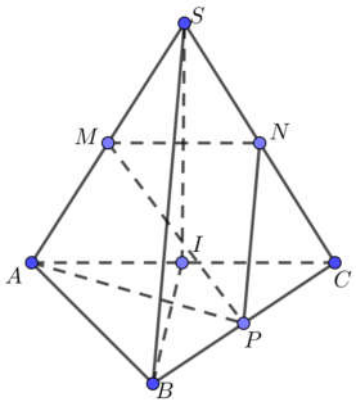
Câu 7. **Đáp án B.**



$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DH})=(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH})=90^0$.

Câu 8. **Đáp án B.**

Câu 9. **Đáp án D.**



Từ giả thiết suy ra các mặt của hình chóp đều là các tam giác đều. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của SA,SC,BC. Giả sử cạnh hình chóp đều là a thì $MN=NP=\frac{a}{2};MP\perp SA$ vì $\triangle SAP$ cân tại P.

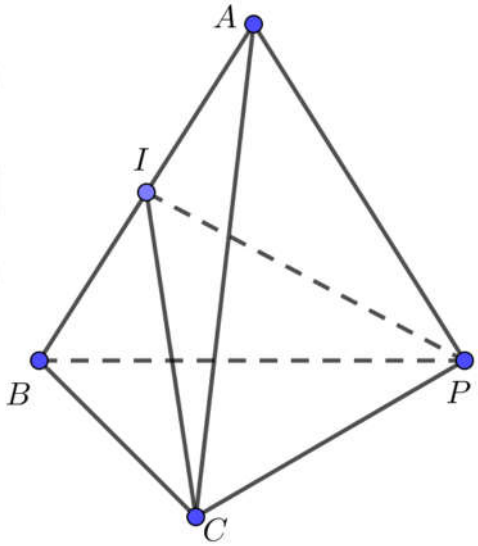
$$PM=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{2};\cos\widehat{MNP}=\frac{MN^2+NP^2-MP^2}{2.MN.NP}=\frac{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{2a^2}{4}}{2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}}$$

$\cos\widehat{MNP}=0\Rightarrow\left(\widehat{SB,AC}\right)=90^0$.

Cách 2: Lấy I là trung điểm của AC ta có: $AC\perp\left(SIB\right)\Rightarrow AC\perp SB$.

Cách 3: $\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{SB}\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}\right)=\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SA}=0$.

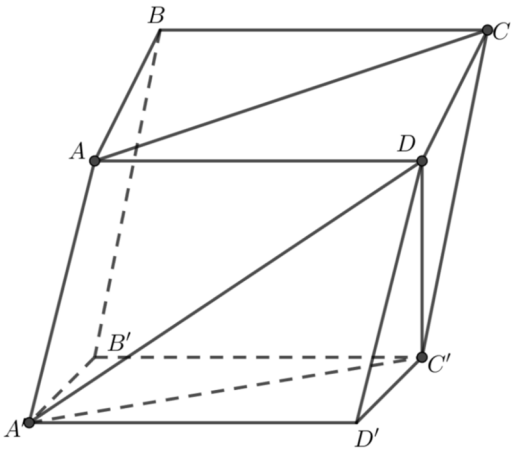
Câu 10. **Đáp án C.**



Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow AB\perp(IDC)\Rightarrow AB\perp CD$.

Ngoài ra ta cũng có thể sử dụng tích vô hướng để giải quyết bài toán này.

Câu 11. **Đáp án B.**

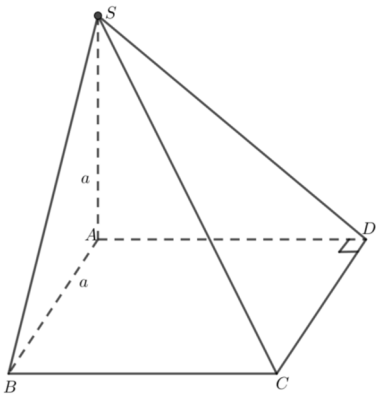


Ta có: $AC//A'C' \Rightarrow \left(\widehat{AC,A'D}\right)=\left(\widehat{A'C',A'D}\right)=\widehat{DA'C'}$ (góc nhọn).

Câu 12. **Đáp án A.**

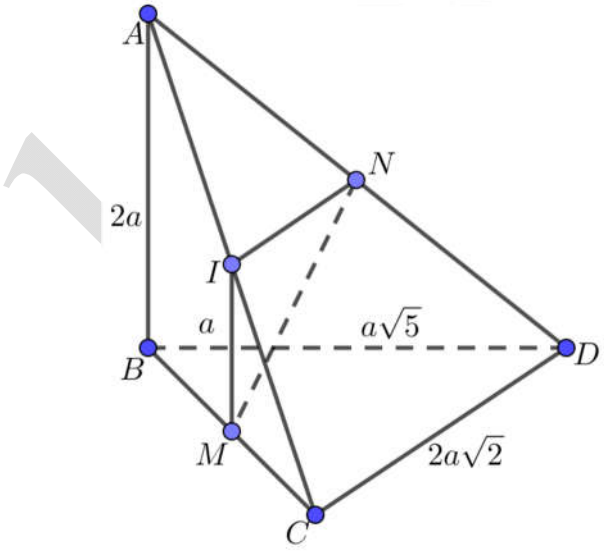
Câu 13. **Đáp án A.**

Câu 14. **Đáp án C.**



Ta có: $AD//BC \Rightarrow \left(\widehat{SD,BC}\right)=\left(\widehat{SD,AD}\right)=\widehat{ADS}=45^0$.

Câu 15. **Đáp án D.**

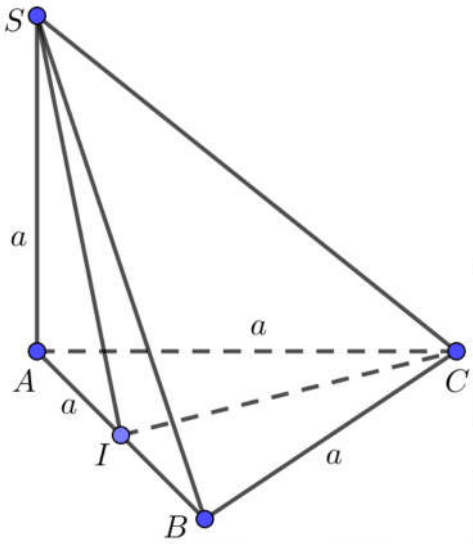


Theo tính chất đường trung bình trong tam giác: $\begin{cases} IN//CD; IN=\dfrac{1}{2}CD=a\sqrt{2} \\ IM//AB; IM=\dfrac{1}{2}AB=a \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi=\left(\widehat{AB,CD}\right)=\left(\widehat{IM,IN}\right)$. Áp dụng định lý cosin ta có:

$\cos\varphi=\left|\dfrac{IM^2+IN^2-MN^2}{2.IM.IN}\right|=\left|-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=45^0$.

Câu 16. **Đáp án C.**



Ta có $SA\perp(ABC)\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên mặt phẳng

$(ABC)\Rightarrow\varphi=\widehat{ASB}=\left(\widehat{SD,AD}\right)=45^0$.

Câu 17. **Đáp án A.**

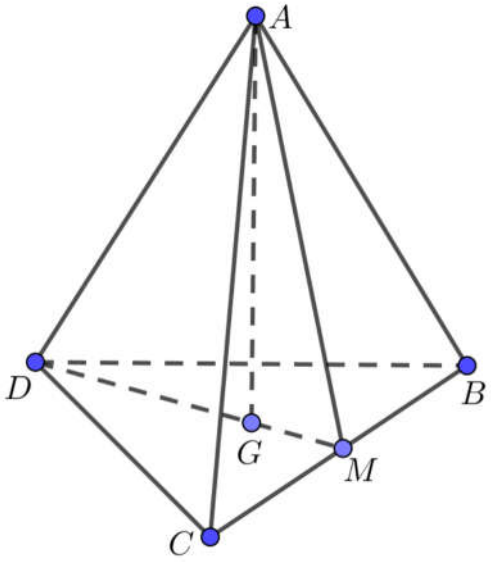
Hình câu 16.

Gọi I là trung điểm của AB. Ta có: $\begin{cases} CI\perp AB \\ CI\perp SA \end{cases}\Rightarrow CI\perp(SAB)$

$\Rightarrow SI$ là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(SAB)\Rightarrow\beta=\widehat{CSI}=\left(\widehat{SC,(SAB)}\right)$

$\Rightarrow\tan\beta=\dfrac{CI}{SI}=\dfrac{CI}{\sqrt{SA^2+AI^2}}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

Câu 18. **Đáp án B.**

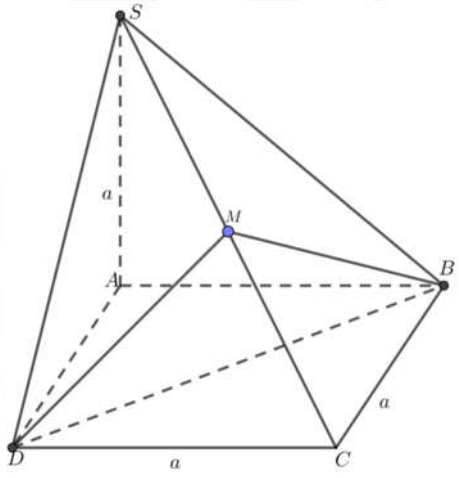


Gọi M là trung điểm CB và G là trọng tâm tam giác BCD nên ta có

$BC \perp (AGM) \Rightarrow \varphi = \widehat{AMG}$. Có $DM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow GM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}; AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{GM}{AM} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{6}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 19. **Đáp án A.**



Ta có giao tuyến $BC \perp (SBA) \Rightarrow \varphi = \widehat{SBA}$ (góc nhọn). Mà ΔSBA vuông cân tại A nên $\varphi = 45^0$

Câu 20. **Đáp án D.**

(Hình vẽ của câu 19)

Hai tam giác vuông SBC và SDC nên có chung chân đường cao M kẻ từ B và D

$\Rightarrow \beta = (\widehat{MB, MD})$. Ta đi tính góc $\widehat{BMD}$.

Trong tam giác vuông SBC ta có:

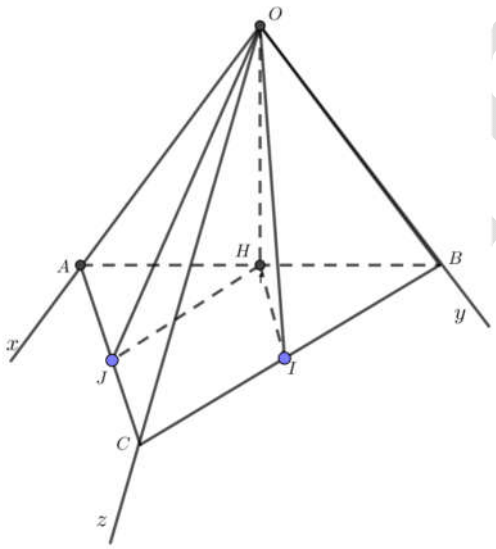
$\frac{1}{BM^2}=\frac{1}{SB^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow BM^2=\frac{2a^2}{3}$. Tương tự $DM^2=\frac{2a^2}{3}$.

Áp dụng định lý cosin cho ΔBMD ta có:

$$\cos\widehat{BMD}=\frac{MB^2+MD^2-BD^2}{2.MB.MD}=\frac{\frac{4a^2}{4}-2a^2}{2.\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BMD}=120^0\Rightarrow\beta=180^0-120^0=60^0$$

Hay $\frac{\pi}{3}$.

Câu 21. **Đáp án A.**



ΔOAB đều $\Rightarrow AC=a$. Tam giác OBC vuông $BC=a\sqrt{2}$. Áp dụng định lý cosin cho ΔOAB

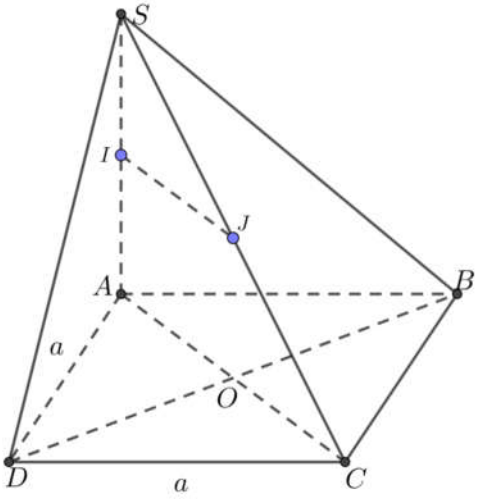
$\Rightarrow AB=a\sqrt{3}\Rightarrow\Delta ABC$ có $AB^2=AC^2+BC^2\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại C.

Gọi H là trung điểm của $AB\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC\Rightarrow OH\perp(ABC)$

$\Rightarrow\alpha=\widehat{OIH};\beta=\widehat{OJH}$ (với I,J lần lượt là trung điểm của BC và AC).

$$\Rightarrow\tan\alpha.\tan\beta=\frac{OH}{HI}.\frac{OH}{HJ}=\frac{OH^2}{HI.HJ}=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 22. **Đáp án A.**



Vì $BC//AD, \widehat{SAD}=90^0 \Rightarrow \left(\widehat{SD,BC}\right)=\widehat{SDA} \Rightarrow \tan\widehat{SDA}=\dfrac{SA}{SD}=\sqrt{3} \Rightarrow \left(SD,BC\right)=60^0$.

Câu 23. **Đáp án A.**

(Hình vẽ như câu 22)

Ta có $\text{IJ}//AC, \left(\widehat{\text{IJ},BD}\right)=\widehat{AOB}=90^0$.

Câu 24. **Đáp án A.**

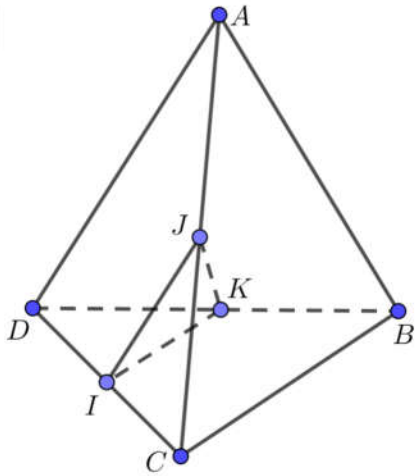
Đặt $AB=a$. Ta có: $\text{IJ}=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$.

$IK=\dfrac{CD}{2}=\dfrac{2}{3}AB=\dfrac{2a}{3}; JK=\dfrac{5}{6}AB=\dfrac{5a}{6}$.

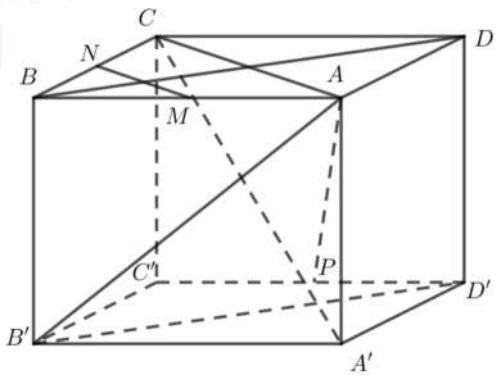
Ta có: $\text{IJ}^2+IK^2=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{4a^2}{9}=\dfrac{25a^a}{16}=JK^2$.

Vậy $\Delta \text{IJ}K$ vuông tại I.

Ta có $IK//CD \Rightarrow \left(\widehat{AB,CD}\right)=\widehat{JIK}=90^0$.



Câu 25. **Đáp án B.**



Ta có: $AB//C'D' \Rightarrow \left(\widehat{MN,C'D'}\right)=\left(\widehat{MN,AB}\right)=\widehat{BMN}=45^0$.

Câu 26. **Đáp án C.**

(Hình vẽ câu 25)

Có $B'D'//BD \Rightarrow \left(\widehat{BD,AD'}\right)=\left(\widehat{B'D',AD'}\right)=\widehat{AD'B'}=60^0$ vì $\Delta AB'D'$ đều cạnh $a\sqrt{2}$.

Câu 27. **Đáp án B.**

(Hình vẽ câu 25)

$MN//AC \Rightarrow \left(\widehat{MN,AP}\right)=\left(\widehat{AC,AP}\right)=\widehat{CAP}$ (góc nhọn). Ta có: $AC=a\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông $CC'P$ có $CP=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. Trong tam giác vuông APA' có $AP=\dfrac{3a}{2}$.

Áp dụng định lý cosin cho ΔCAP ta có: $\cos\widehat{CAP}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\widehat{MN,AP}\right)=45^0$.

Câu 28. **Đáp án A.**

(Hình vẽ câu 25)

Gọi N' là trung điểm của $B'C'$. Ta có

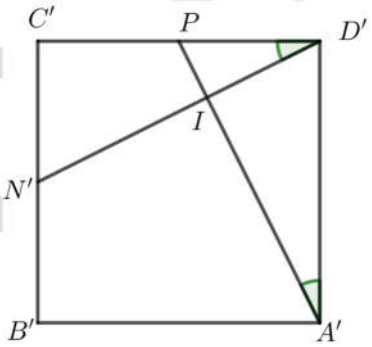
$ND//N'D' \Rightarrow \left(\widehat{ND,A'P}\right)=\left(\widehat{N'D',A'P}\right)$.

Có $\triangle N'C'D'=\triangle PD'A' \Rightarrow \widehat{C'D'N'}=\widehat{D'A'P'}$

Mà $\widehat{C'D'N'}+\widehat{A'D'N'}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{D'A'P}+\widehat{A'D'N'}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{DIA'}=90^0$ hay $\left(\widehat{DN,A'P}\right)=90^0$.



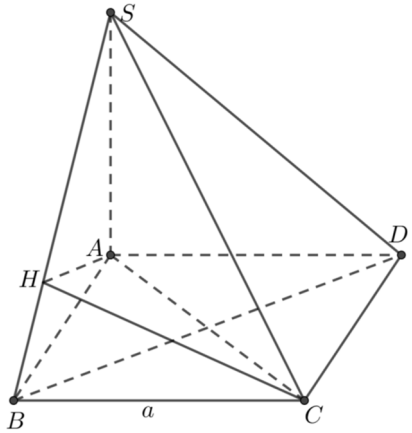
Câu 29. **Đáp án C.**

Ta có: $CB \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (SAB)

$\Rightarrow \left(\widehat{SC,(SAB)}\right)=\left(\widehat{SC,SB}\right)=\widehat{CSB}$.

Do ΔCSB vuông tại B nên:

$\sin\widehat{CSB}=\dfrac{BC}{SC}=\dfrac{BC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\dfrac{a}{a\sqrt{8}}=\dfrac{1}{\sqrt{8}}$.



Câu 30. **Đáp án D.**

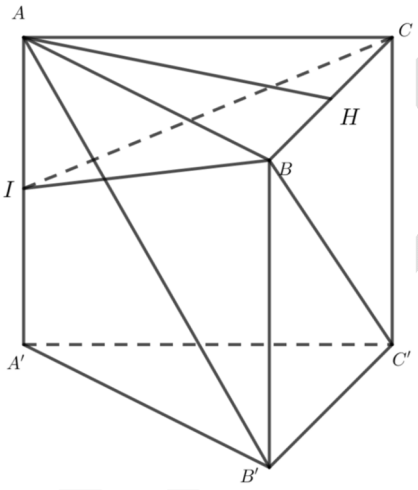
(Hình vẽ giống câu 29)

Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH$ là hình chiếu của AC lên mặt phẳng $(SBC) \Rightarrow \left(\widehat{AC,(SBC)}\right)=\left(\widehat{AC,HC}\right)=\widehat{ACH}$.

Tam giác SAB vuông $\Rightarrow AH=\dfrac{SA.AB}{SB}=\dfrac{a\sqrt{6}.a}{a\sqrt{7}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

Vì ΔAHC vuông tại $H\Rightarrow \sin\widehat{ACH}=\dfrac{AH}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Câu 31. **Đáp án D.**



Ta có: $\tan\beta=\dfrac{BB'}{B'C'}$. $\triangle AHB$ vuông tại H (H là trung điểm của BC)

$\Rightarrow \tan\alpha=\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{2AH}{BC}$

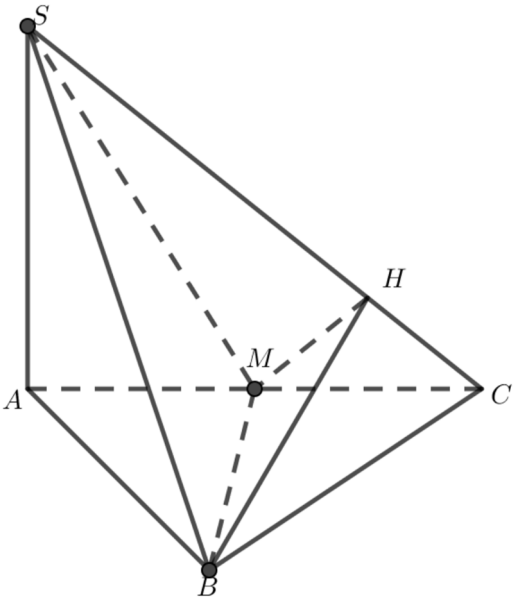
$\Rightarrow \tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{4\left(AI^2+AH^2\right)}{BC^2}$ (*)

Mà $\triangle AIH$ vuông tại A nên $AI^2+AH^2=IH^2$.

$\triangle BIC$ vuông tại $I\Rightarrow IH=\dfrac{BC}{2}\Rightarrow BC^2=4IH^2$. Thay vào (*)

Ta có: $\tan^2\alpha+\tan^2\beta=1$.

Câu 32. **Đáp án A.**



Dựng $BJ\perp SC(1), BI\perp AC\Rightarrow SA\perp BI$

$\Rightarrow BI\perp(SAC)\Rightarrow BI\perp SC\ (2)$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow SC\perp(BIJ)\Rightarrow IJ\perp SC$

$\Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (ASC) và (BSC) là $\varphi=\widehat{BJI}$.

Do $\triangle BIJ$ vuông tại I nên $\widehat{BJI}=60^0$

$\Rightarrow BI=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BJ\Rightarrow\dfrac{1}{BI^2}=\dfrac{4}{3}.\dfrac{1}{BJ^2}\ (3)$

ΔSBC có $\widehat{BSC}=45^0\Rightarrow\Delta SBC$ vuông cân tại B. Trong tam giác SJB vuông tại J có

$\widehat{JSB}=45^0\Rightarrow SB=\sqrt{2}BJ\Rightarrow\dfrac{1}{BJ^2}=\dfrac{2}{BC^2}$

Từ (3) và $(4)\Rightarrow\dfrac{1}{BC^2}\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+1\right)=\dfrac{4}{3}.\dfrac{2}{BC^2}$

Giải phương trình ta được $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.