DÃY SỐ

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay còn gọi tắt là dãy số)

> Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1, u_2, ..., u_n, ...$, trong đó $u_n = u(n)$ hoặc viết tắt là (u_n).

Số hạng u_1 được gọi là số hạng đầu, u_n là số hạng tổng quát (số hạng thứ n) của dãy số.

2. Các cách cho một dãy số:

Người ta thường cho một dãy số bằng một trong các cách dưới đây:

- **Cách 1:** Cho dãy số bằng công thức của số hạng tổng quát.

Ví dụ 1. Cho dãy số (x_n) với $x_n = \dfrac{n}{3^{n+1}}$.

Dãy số cho bằng cách này có ưu điểm là chúng ta có thể xác định được ngay số hạng bất kỳ của dãy số. Chẳng hạn, $x_{10} = \dfrac{10}{3^{11}} = \dfrac{10}{177147}$.

- **Cách 2:** Cho dãy số bằng phương pháp truy hồi.

Ví dụ 2. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = 3a_n - 7, \forall n \ge 1$.

Ví dụ 3. Cho dãy số (b_n) xác định bởi $\begin{cases} b_1 = 1, b_2 = 3 \\ b_{n+2} = 4b_{n+1} + 5b_n, \forall n \ge 1 \end{cases}$.

> Với cách này, ta có thể xác định được ngay mối liên hệ giữa các số hạng hoặc nhóm các số hạng của dãy số thông qua hệ thức truy hồi. Tuy nhiên, để tính được các số hạng bất kỳ của dãy số thì chúng ta cần phải tích được các số hạng trước đó hoặc phải tìm được công thức tính số hạng tổng quát của dãy số.

- **Cách 3:** Cho dãy số bằng phương pháp mô tả hoặc diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hẩng dãy số.

Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n) gồm các số nguyên tố.

Ví dụ 5. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 4. Trên cạnh BC, ta lấy điểm A_1 sao cho $CA_1 = 1$. Gọi B_1 là hình chiếu của A_1 trên CA, C_1 là hình chiếu của B_1 trên AB, A_2 là hình chiếu của C_1 trên BC, B_2 là hình chiếu của A_2 trên CA,... và cứ tiếp tục như thế, Xét dãy số (u_n) với $u_n = CA_n$.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm, dãy số hằng:

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số hằng (hoặc dãy số không đổi) nếu ta có $u_{n+1} = u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 6. a) Cho dãy số (x_n) với $x_n = n^2 - 2n + 3$ là một dãy số tăng.

Chứng minh: Ta có $x_{n+1} = (n+1)^2 - 2(n+1) + 3 = n^2 + 2$.

Suy ra $x_{n+1} - x_n = (n^2+2) - (n^2 - 2n + 3) = 2n - 1 > 0, \forall n \ge 1$ hay $x_{n+1} > x_n, \forall n \ge 1$.

Vậy (x_n) là một dãy số tăng.

b) Dãy số (y_n) với $y_n = \dfrac{n+2}{5^n}$ là một dãy số giảm.

Chứng minh:

Cách 1: Ta có $y_{n+1} = \dfrac{n+3}{5^{n+1}}$. Suy ra $y_{n+1} - y_n = \dfrac{n+3}{5^{n+1}} - \dfrac{n+2}{5^n} = -\dfrac{4n+7}{5^{n+1}} < 0, \forall n \ge 1$ hay $y_{n+1} < y_n, \forall n \ge 1$. Vậy (y_n) là một dãy số giảm.

Cách 2: Với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có $y_n > 0$ nên ta xét tỉ số $\dfrac{y_{n+1}}{y_n}$.

Ta có $y_{n+1} = \dfrac{n+3}{5^{n+1}}$ nên $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{n+3}{5(n+2)} < 1, \forall n \ge 1$. Vậy (y_n) là một dãy số giảm.

c) Dãy số (z_n) với $z_n = (-1)^n$ không phải là một dãy số tăng cũng không phải là một dãy số giảm vì $z_{n+1} - z_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n = -2(-1)^n$ không xác định được dương hay âm. Đây là dãy số đan dấu.

STUDY TIP

Để chứng minh dãy số (b_n) là dãy số giảm hoặc dãy số tăng, chúng ta thường sử dụng một trong 2 hướng sau đây:

(1): Lập hiệu $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$. Sử dụng các biến đổi đại sốvà các kết quả đã biết để chỉ ra $\Delta u_n > 0$ (dãy số tăng) hoặc $\Delta u_n < 0$ (dãy số giảm)

(2): Nếu $u_n > 0, \forall n \ge 1$ thì ta có thể lập tỉ số $T_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Sử dụng các biến đổi đại số và các kết quả đã biết để chỉ ra $T_n > 1$ (dãy số tăng), $T_n < 1$ (dãy số giảm).

4. Dãy số bị chặn

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_m \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_m \ge m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số M, m sao cho $m \le u_m \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 7:

a) Dãy số (a_n) với $a_n = 2017 \sin \dfrac{(3n-1)\pi}{4}$ là một dãy số bị chặn vì $-2017 \le a_n \le 2017, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dãy số (b_n) với $b_n = \dfrac{2n+3}{3n+2}$ là một dãy số bị chặn vì $\dfrac{2}{3} < b_n \le 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Dãy số (c_n) với $c_n = (3n-2).7^{n+1}$ bị chặn dưới vì $a_n \geq 49, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) Dãy số (d_n) với $d_n = \sqrt{6+\sqrt{6+......+\sqrt{6}}}$ (n dấu căn), bị chặn trên vì $d_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

STUDY TIP

1) Nếu (u_n) là dãy số giảm thì bị chặn trên bởi u_1.

2) Nếu (u_n) là dãy số tăng thì bị chặn dưới bởi u_1.

B. Các bài toán điển hình

Câu 1. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = 2017\sin\frac{n\pi}{2} + 2018\cos\frac{n\pi}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $a_{n+6} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **B.** $a_{n+9} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. $a_{n+12} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **D.** $a_{n+15} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Đáp án C

Lời giải

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được đáp án đúng.

+ Ta có $a_{n+6} = 2017\sin\frac{(n+6)\pi}{2} + 2018\cos\frac{(n+6)\pi}{3} = -2017\sin\frac{n\pi}{2} + 2018\cos\frac{n\pi}{3} \neq a_n$

+ Ta có $a_{n+6} = 2017\sin\frac{(n+9)\pi}{2} + 2018\cos\frac{(n+9)\pi}{3} = 2017\sin\frac{n\pi}{2} - 2018\cos\frac{n\pi}{3} \neq a_n$.

+ Ta có $a_{n+12} = 2017\sin\frac{(n+12)\pi}{2} + 2018\cos\frac{(n+12)\pi}{3} = 2017\sin\frac{n\pi}{2} + 2018\cos\frac{n\pi}{3} = a_n$.

+ Ta có $a_{n+15} = 2017\sin\frac{(n+15)\pi}{2} + 2018\cos\frac{(n+15)\pi}{3} = -2017\sin\frac{n\pi}{2} - 2018\cos\frac{n\pi}{3} \neq a_n$.

Vậy phương án đúng là C.

Nhận xét: *Từ kết quả trong ví dụ này, chúng ta có thể trả lời được các câu hỏi trắc nghiệm sau đây*

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = 2017\sin\frac{n\pi}{2} + 2018\cos\frac{n\pi}{3}$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây:

Câu 1: Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất để $a_{n+p} = a_p, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Câu 2: Số hạng thứ 2017 của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. 3026. **B.** $2017+1009\sqrt{3}$. **C.** $-2017+1009\sqrt{3}$. **D.** -3026.

Câu 2. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_{n+1} = -\frac{3}{2}a_n^{\,2} + \frac{5}{2}a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng thứ 201 của dãy số (a_n) có giá trị bằng bao nhiêu?

A. $a_{2018} = 2$. **B.** $a_{2018} = 1$. **C.** $a_{2018} = 0$. **D.** $a_{2018} = 5$.

Đáp án A

Lời giải

Nhận thấy dãy số trên là dãy số cho bởi công thức truy hồi.

Ta có $a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 0; a_4 = 1; a_2 = 2; a_6 = 0; +1$.

Từ đây chúng ta có thể dự đoán $a_{n+3} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chúng ta khẳng định dự đoán đó bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy:

Với $n = 1$ thì $a_1 = 1$ và $a_4 = 1$. Vậy đẳng thức đúng với $n = 1$.

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là $a_{k+3} = a_k$.

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với $n = k+1$, nghĩa là chứng minh $a_{k+4} = a_{k+1}$.

Thật vậy, ta có $a_{k+4} = -\dfrac{3}{2}a_{k+3}^2 + \dfrac{5}{2}a_{k+3} + 1$ (theo hệ thức truy hồi).

Theo giả thiết quy nạp thì $a_{k+3} = a_k$ nên $a_{k+4} = -\dfrac{3}{2}a_k^2 + \dfrac{5}{2}a_k + 1 = a_{k+1}$.

Vậy đẳng thức đúng với $n = k+1$. Suy ra $a_{n+3} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Từ kết quả phần trên, ta có : nếu $m \equiv p \pmod{3}$ thì $a_m = a_p$.

Ta có $2018 \equiv 2 \pmod{3}$ nên $a_{2018} = 2$.

Vậy phương án đúng là A.

Nhận xét: *Việc chứng minh được hệ thức $a_{n+3} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ giúp ta giải quyết được bài toán tính tổng hoặc xác định được số hạng tùy ý của dãy số. Vì vậy, việc phát hiện ra tính chất đặc biệt của một dãy số sẽ giúp chúng ta giải quyết các yêu cầu liên quan đến dãy số một cách thuận lợi và dễ dàng hơn. Chúngta cùng kiểm nghiệm qua các câu hỏi trắc nghiệm khách quan dưới đây nhé:*

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_{n+1} = -\dfrac{3}{2}{a_n}^2 + \dfrac{5}{2}a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây:

Câu 1. Tính tổng S của sáu số hạng đầu tiên của dãy (a_n)

A. $S = 0$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = 4$. **D.** $S = 5$.

Câu 2. Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất để $a_{n+p} = a_p, \forall n \in \mathbb{N}^*$

A. $p = 9$. **B.** $p = 2$. **C.** $p = 6$. **D.** $p = 3$.

Câu 3. Tính tổng S của 2018 số hạng đầu tiên của dãy (a_n)

A. $S = 2016$. **B.** $S = 2019$. **C.** $S = 2017$. **D.** $S = 2018$.

Câu 4. Tính tổng bình thường của 2018 số hạng đầu tiên của dãy (a_n)

A. $S = 3360$. **B.** $S = 3361$. **C.** $S = 3364$. **D.** $S = 3365$.

Câu 3. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_{n+1} = \sqrt{{a_n}^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (a_n).

A. $a_n = \sqrt{2}$. **B.** $a_n = \sqrt{2n-1}$. **C.** $a_n = \sqrt{3n-2}$. **D.** $a_n = \sqrt{n}$.

Đáp án D

Lời giải

Ta có $a_2=\sqrt{2};a_3=\sqrt{3};a_4=\sqrt{4};a_5=\sqrt{5}$.

Từ 5 số hạng đầu của dãy ta dự đoán được $a_n=\sqrt{n}$. Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được $a_n=\sqrt{n}$. Vậy phương án đúng là D.

Nhận xét: *Với kết quả của ví dụ này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi trắc nghiệm dưới đây:*

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=1;a_{n+1}=\sqrt{a_n{}^2+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây:

Câu 1. Rút gọn biểu thức $s_n=\dfrac{1}{a_1+a_2}+\dfrac{1}{a_2+a_3}+...+\dfrac{1}{a_{n-1}+a_n},n\ge 2$ ta được

A. $S_n=\sqrt{n}+1$. **B.** $S_n=\sqrt{n}-1$. **C.** $S_n=\dfrac{n}{\sqrt{n}+1}$. **D.** $S_n=\dfrac{n}{\sqrt{n}-1}$.

Câu 2. Mệnh đề nào dưới đây là đúng

A. Dãy số (a_n) là dãy số giảm. **B.** Dãy số (a_n) không là dãy số giảm.

C. Dãy số (a_n) là dãy số tăng. **D.** Dãy số (a_n) không là dãy số tăng.

Câu 3. Rút gọn biểu thức $S_n=a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$

A. $S_n=n(n-1)$. **B.** $S_n=n(n+1)$. **C.** $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. **D.** $S_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

STUDY TIP

Ngoài cách làm bên, ta có thể kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng thông qua việc xác định một vài số hạng đầu của dãy

+ Với $a_1=1$ thì loại ngay được phương án A.

+Ta có $a_2=\sqrt{2}$ thì loại ngay được các phương án B và C.

Câu 4. Cho dãy số (a_n) có tổng của n số hạng đầu tiên bằng $S_n=n^3$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. (a_n) là dãy số tăng và $a_n=3n^2-3n+1$.

B. (a_n) là dãy số giảm và $a_n=3n^2+3n+1$.

C. (a_n) là dãy số tăng và $a_n=3n^2+3n+1$.

D. (a_n) là dãy số tăng và $a_n=3n^2-3n+1$.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $a_1+a_2+...+a_n=S_n=n^3$ và $a_1+a_2+...+a_{n-1}=S_{n-1}=(n-1)^3$.

Suy ra $a_n=S_n-S_{n-1}=n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$.

Ta có $a_n = 3n^2 - 3n + 1$ và $a_{n-1} = 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1 = 3n^2 - 9n + 7$.

Do đó $a_n - a_{n-1} = 6n - 1 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $n - 1 = 0$ hay $n = 1$. suy ra dãy số (a_n) là dãy số tăng.

Vậy phương án đúng là A.

Câu 5. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_{n+1} = 3a_n + 10, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng thứ 15 của dãy số (a_n).

A. $a_{15} = 28697809$. **B.** $a_{15} = 28697814$.

C. $a_{15} = 9565933$. **D.** $a_{15} = 86093437$.

Đáp án A

Lời giải

Chúng ta đi tìm công thức xác định số hạng tổng quát của dãy số (a_n).

Đặt $b_n = a_n + 5$ khi đó $b_{n+1} = a_{n+1} + 5$.

Từ hệ thức truy hồi $a_{n+1} = 3a_n + 10, \forall n \in \mathbb{N}^*$ suy ra $b_{n+1} - 5 = 3(b_n - 5) + 10 \Leftrightarrow b_{n+1} = 3b_n$.

Như vậy ta có $b_1 = a_1 + 5 = 6; b_{n+1} = 3b_n$.

Ta có $b_2 = 3b_1$; $b_3 = 3b_2 = 3^2 b_1$ $b_{43} = 3b_3 = 3^3 b_1$. Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được rằng $b_n = 3^{n-1} b_1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra $a_n = 2.3^n - 5, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó $a_{15} = 28697809$. Vậy suy ra phương án đúng là A.

STUDY TIP

Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1; a_{n+1} = qa_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^*$

-Nếu $q \neq 1$ thì số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = aq^{n-1} + \dfrac{d(1-q^{n-1})}{1-q}$.

-Nếu $q = 1$ thì số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = a + (n-1)d$.

Cho dãy số (a_n) xác định bởi và $a_{n+1} = 3a_n + 10, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây.

Câu 1. Số hạng thứ ba, thứ năm và thứ bảy của dãy số (a_n) lần lượt là:

A. $13, 49, 157$. **B.** $49, 481, 4369$. **C.** $49, 157, 1453$. **D.** $49, 1453, 4369$.

Câu 2. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (a_n).

A. $a_n = 2.3^n - 5$. **B.** $a_n = 2.3^{n+1} - 5$. **C.** $a_n = 2.3^n - 5$. **D.** $a_n = 2.3^n + 5$.

Câu 3. Số 2324522929 có là số hạng của dãy số (a_n) không, nếu có thì nó là số hạng thứ bao nhiêu?

A. Không. **B.** Có, 18. **C.** Có, 19. **D.** Có, 20.

Câu 4. (a_n) là một dãy số:

A. Giảm và bị chặn trên. **B.** Tăng và bị chặn trên.

C. Tăng và bị chặn dưới. **D.** Giảm và bị chặn dưới.

Ví dụ 6. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5, a_2 = 0$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n, \forall n \geq 1$. Số hạng thứ 14 của dãy là số hạng nào?

A. 3164070. **B.** 9516786. **C.** 1050594. **D.** 9615090.

Đáp án A

Lời giải

+ Ta có $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n), \forall n \geq 1$.

Do đó ta có $b_1 = a_2 + 2a_1 = 10$ và $b_{n+1} = 3b_n, \forall n \geq 1$.

Từ hệ thức truy hồi của dãy số (b_n), ta có $b_2 = 3b_1; b_3 = 3b_2 = 3^2 b_1; b_4 = 3b_3 = 3^3 b_1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng:

$b_n = 3^{n-1} b_1 = 10.3^{n-1}, \forall n \geq 1$.

+ Ta có $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n), \forall n \geq 1$.

Do đó ta có: $c_1 = a_2 - 3a_1 = -15$ và $c_{n+1} = -2c_n, \forall n \geq 1$.

Từ hệ thức truy hồi của dãy số (c_n), ta có $c_2 = -2c_1; c_3 = (-2)^2 c_1; c_4 = (-2)^3 c_1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng:

$c_n = (-2)^{n-1} c_1 = -15.(-2)^{n-1}, \forall n \geq 1$.

+ Từ các kết quả trên, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{n+1} + 2a_n = 10.3^{n-1} \\ a_{n+1} - 3a_n = 15.(-2)^{n-1} \end{cases} \Rightarrow a_n = 2.3^{n-1} + 3.(-2)^{n-1}.$$

Do đó số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = 2.3^{n-1} + 3.(-2)^{n-1}, \forall n \geq 1$.

Vậy suy ra $a_{14} = 3164070$. Vậy phương án đúng là **A**.

Nhận xét: *Với kết quả trong ví dụ này, chúng ta có thể trả lời các câu hỏi trắc nghiệm khách quan dưới đây:*

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5; a_2 = 0$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n, \forall n \geq 1$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây.

Câu 1. Tính số hạng thứ năm của dãy số (a_n).

A. $a_5 = 210$. **B.** $a_5 = 66$. **C.** $a_5 = 36$. **D.** $a_5 = 360$.

Câu 2. Số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là:;

A. $a_n = 2.3^{n-1} + 3.(-2)^{n-1}$. **B.** $a_n = 2.3^n + 3.(-2)^n$.

C. $a_n = 2.3^{n-1} - 3.2^{n-1}$. **D.** $a_n = 2.3^n - 3.2^n$.

STUDY TIP

Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = a, a_2 = b$ và $a_{n+2} = \alpha.a_{n+1} + \beta.a_n$, với mọi $n \geq 1$, trong đó phương trình $t^2 - \alpha t - \beta = 0$ có hai nghiệm phân biệt là t_1 và t_2. Khi đó số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = m_1.t_1^{n-1} + m_2.t_2^{n-1}$, trong đó m_1, m_2 thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} m_1 + m_2 = a \\ m_1.t_1 + m_2.t_2 = b \end{cases}$.

Ví dụ 7. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = -3$ và $a_{n+1} = a_n + n^2 - 3n + 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Số 1391 là số hạng thứ mấy của dãy số đã cho?

A. 18. **B.** 17. **C.** 20. **D.** 19

Đáp án A.

Lời giải

Từ hệ thức truy hồi của dãy số (a_n) ta có:

$$a_n = a_1 + \left[1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2\right] - 3\left[1 + 2 + ... + (n-1)\right] + 4(n-1) \Leftrightarrow a_n = \frac{n^3 - 6n^2 + 17n - 21}{3}$$

.

Suy ra số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = \dfrac{n^3 - 6n^2 + 17n - 21}{3}$.

Giải phương trình $a_n = 1391$ ta được $n = 18$

Vậy phương án đúng là **A**.

STUDY TIP

Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = a$ và $a_{n+1} = a_n + f(n), \forall n \geq 1$.

Số hạng tổng quát của dãy số (a_n) được tính theo công thức: $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$.

Ví dụ 8. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 2$ và $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + 1), \forall n \geq 1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. (a_n) là một dãy số giảm và bị chặn.

B. (a_n) là một dãy số tăng và bị chặn.

C. (a_n) là một dãy số giảm và không bị chặn dưới.

D. (a_n) là một dãy số tăng và không bị chặn trên.

Đáp án A

Lời giải

Ta có $a_1 = 2 > a_2 = \dfrac{3}{2} > a_3 = \dfrac{5}{4}$. Do đó ta loại được các phương án **B** và **D**.

+ Ta có $a_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-1} + 1)$ nên $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) = \dfrac{1}{2^{n-1}}(a_2 - a_1) < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $a_{n+1} < a_n, \forall n \geq 1$ nên (a_n) là dãy số giảm.

+ Vì (a_n) là một dãy số giảm nên dãy số này bị chặn trên bởi $a_1 = 2$.

Ta có $\frac{1}{2}(1-a_n)=a_{n+1}-a_n<0,\forall n\ge 1\Rightarrow a_n>1,\forall n\ge 1$.

Vậy phương án đúng là **A**.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Dạng 1: Bài tập về xác định số hạng của dãy số

Câu 1. Cho dãy số (x_n) có $x_n=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $x_{n+1}=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+5}$. **B.** $x_{n+1}=\left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$. **C.** $x_{n+1}=\left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$. **D.** $x_{n+1}=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+1}$.

Câu 2. Cho dãy số (y_n) xác định bởi $y_n=\sin^2\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{2n\pi}{3}$. Bốn số hạng đầu của dãy số đó là:

A. $0,\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}$. **B.** $1,\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}$. **C.** $1,\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}$. **D.** $0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$.

Câu 3. Cho dãy số (y_n) xác định bởi $y_1=y_2=1$ và $y_{n+2}=y_{n+1}+y_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là:

A. $1,1,2,4,7$. **B.** $2,3,5,8,11$. **C.** $1,2,3,5,8$. **D.** $1,1,2,3,5$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=-1$ và $u_n=2.n.u_{n-1}$ với mọi $n\ge 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $u_{11}=2^{10}.11!$. **B.** $u_{11}=-2^{10}.11!$. **C.** $u_{11}=2^{10}.11^{10}$. **D.** $u_{11}=-2^{10}.11^{10}$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=\frac{1}{2}$ và $u_n=u_{n-1}+2n$ với mọi $n\ge 2$. Khi đó u_{50} bằng:

A. $1274,5$. **B.** $2548,5$. **C.** $5096,5$. **D.** $2550,5$.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) có $u_n=\frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy số (u_n) ?

A. 8. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 7. Cho dãy số (a_n) có $a_n=-n^2+4n+11,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số hạng lớn nhất của dãy số (a_n).

A. 14. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 12.

Câu 8. Cho dãy số (a_n) có $a_n=\frac{n}{n^2+100},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số hạng lớn nhất của dãy số (a_n).

A. $\frac{1}{20}$. **B.** $\frac{1}{30}$. **C.** $\frac{1}{25}$. **D.** $\frac{1}{21}$.

Câu 9. Cho dãy số (y_n) xác định bởi $y_1=2$ và $y_{n+1}=2y_n+n^2-3n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Tổng S_4 của 4 số hạng đầu tiên của dãy số là:

A. $S_4=20$. **B.** $S_4=10$. **C.** $S_4=30$. **D.** $S_4=14$.

Câu 10. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 5$ và $x_{n+1} = x_n + n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng tổng quát của dãy số (x_n) là:

A. $x_n = \dfrac{n^2 - n + 10}{2}$. **B.** $x_n = \dfrac{5n^2 - 5n}{2}$. **C.** $x_n = \dfrac{n^2 + n + 10}{2}$. **D.** $x_n = \dfrac{n^2 + 3n + 12}{2}$.

Câu 11. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \dfrac{2}{3}$ và $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $x_{100} = \dfrac{2}{39999}$. **B.** $x_{100} = \dfrac{39999}{2}$. **C.** $x_{100} = \dfrac{2}{40001}$. **D.** $x_{100} = \dfrac{2}{40803}$.

Dạng 2: Bài tập về xét tính tăng, giảm của dãy số.

Câu 12. Trong các dãy số dưới đây dãy số nào là dãy số tăng ?

A. Dãy (a_n), với $a_n = (-1)^{n+1}.\sin\dfrac{\pi}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. Dãy (b_n), với $b_n = (-1)^{2n}.(5^n + 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy (c_n), với $c_n = \dfrac{1}{n + \sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

D. Dãy (d_n), với $d_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 13. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là dãy số giảm ?

A. Dãy (a_n), với $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. **B.** Dãy (b_n) với $b_n = \dfrac{n^2 + 1}{n}$.

C. Dãy (c_n), với $c_n = \dfrac{1}{n^3 + 1}$. **D.** Dãy (d_n), với $d_n = 3.2^n$.

Câu 14. Cho dãy số (x_n) với $x_n = \dfrac{an + 4}{n + 2}$. Dãy số (x_n) là dãy số tăng khi:

A. $a = 2$. **B.** $a > 2$. **C.** $a < 2$. **D.** $a > 1$.

Câu 15. Cho hai dãy số (x_n) với $x_n = \dfrac{(n+1)!}{2^n}$ và (y_n) với $y_n = n + \sin^2(n+1)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. (x_n) là dãy số giảm, (y_n) là dãy số giảm.

B. (x_n) là dãy số giảm, (y_n) là dãy số tăng.

C. (x_n) là dãy số tăng, (y_n) là dãy số giảm.

D. (x_n) là dãy số tăng, là dãy số tăng.

Dạng 3: Bài tập về xét tính bị chặn của dãy số.

Câu 16. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \frac{3n-1}{3n+7}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. Dãy (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy (u_n) bị chặn trên và bị chặn dưới.

D. Dãy (u_n) không bị chặn.

Câu 17. Trong các dãy số sau dãy số nào là dãy bị chặn ?

A. Dãy (a_n), với $a_n = \sqrt{n^2+16}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. Dãy (b_n), với $b_n = n + \frac{1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy (c_n), với $c_n = 2^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

D. Dãy (d_n), với $d_n = \frac{n}{n^2+4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 18. Trong các dãy số dưới đây dãy số nào bị chặn trên ?

A. Dãy (a_n), với $a_n = 3n+1$.

B. Dãy (b_n), với $b_n = \frac{1}{n(2n+1)}$.

C. Dãy (c_n), với $c_n = 3.2^{n+1}$.

D. Dãy (d_n), với $d_n = (-2)^n$.

Câu 19. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào bị chặn dưới ?

A. Dãy (x_n), với $x_n = (-1)^n.(n^2+2n+3)$.

B. Dãy (y_n), với $y_n = -(n^2+6n)$.

C. Dãy (z_n), với $z_n = \frac{2018^n}{2017^{n+1}}$.

D. Dãy (w_n), với $w_n = (-2017)^n$.

Dạng 4: Bài tập về tính chất của dãy số.

Câu 20. Cho dãy số (x_n), xác định bởi: $x_n = 2.3^n - 5.2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$. **B.** $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 5x_n$.

C. $x_{n+2} + 5x_{n+1} - 6x_n = 0$. **D.** $x_{n+2} + 6x_{n+1} - 5x_n = 0$.

Câu 21. Cho dãy số (u_n), với $u_n = 3^n$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $\frac{u_1+u_9}{2} = u_5$. **B.** $\frac{u_2.u_4}{2} = u_3$.

C. $1 + u_1 + u_2 + ... + u_{100} = \frac{u_{100}-1}{2}$. **D.** $u_1.u_2...u_{100} = u_{5050}$.

Câu 22. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = 2017\cos\dfrac{(3n+1)\pi}{6}$. Mệnh đề nào dưới đây là sai ?

A. $a_{n+12} = a_n, \forall n \ge 1$. **B.** $a_{n+8} = a_n, \forall n \ge 1$. **C.** $a_{n+9} = a_n, \forall n \ge 1$. **D.** $a_{n+4} = a_n, \forall n \ge 1$.

Câu 23. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = -\dfrac{3}{2}{a_n}^2 + \dfrac{5}{2}a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

A. $a_{2018} = a_2$. **B.** $a_{2018} = a_1$. **C.** $a_{2018} = a_3$. **D.** $a_{2018} = a_4$.

Câu 24. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1, a_2 = 2$ và $a_{n+2} = \sqrt{3}.a_{n+1} - a_n, \forall n \ge 1$. Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất sao cho $a_{n+p} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

A. $p = 9$. **B.** $p = 12$. **C.** $p = 24$. **D.** $p = 18$.

Câu 25. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **SAI** ?

A. Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = \dfrac{2018}{a_n + 2017}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ là một dãy số không đổi.

B. Dãy số (b_n), với $b_n = \tan(2n+1)\dfrac{\pi}{4}$, có tính chất $b_{n+2} = b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy số (c_n), với $c_n = \tan(n\pi) + 1$, là một dãy số bị chặn.

D. Dãy số (d_n), với $d_n = \cos(n\pi)$, là một dãy số giảm.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2$ và $u_2 = 2u_{n+1} - 1, \forall n \in N^*$, có tính chất

A. Là dãy số tăng và bị chặn dưới. **B.** Là dãy số giảm và bị chặn trên.

C. Là dãy số giảm và bị chặn dưới. **D.** Là dãy số tăng và bị chặn trên.

Câu 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n^2}, \forall n \ge 1$. Tổng $S_{2018} = u_1^2 + u_2^2 + ... + u_{2018}^2$ là

A. $S_{2018} = 2015^2$. **B.** $S_{2018} = 2018^2$. **C.** $S_{2018} = 2017^2$. **D.** $S_{2018} = 2016^2$.

Câu 8. Cho dãy số (z_n) xác định bởi $z_n = \sin\dfrac{n\pi}{2} + 2\cos\dfrac{n\pi}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong các số hạng của dãy số (z_n). Tính giá trị biểu thức $T = M^2 + m^2$.

A. $T = 13$. **B.** $T = 5$. **C.** $T = 18$. **D.** $T = 7$.

Câu 9. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = \dfrac{1}{2}; u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}, n \ge 1. S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n < \dfrac{2017}{2018}$ khi n có giá trị nguyên dương lớn nhất.

A. 2017. **B.** 2015. **C.** 2016. **D.** 2014.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Dạng 1: Bài tập về xác định số hạng của dãy số

Câu 1. **Đáp án C.**

Ta có $x_n=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$ nên $x_{n+1}=\left(\frac{(n+1)-1}{(n+1)+1}\right)^{2(n+1)+3}=\left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Câu 2. **Đáp án A.**

Ta có $y_1=\sin^2\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2\pi}{3}=0; y_2=\sin^2\frac{\pi}{4}+\cos\frac{4\pi}{3}=\frac{1}{2}$. (loại phương án B và D) và

$y_3=\sin^2\frac{3\pi}{4}+\cos 2\pi=\frac{3}{2}$. (loại phương án C).

Câu 3. **Đáp án D.**

Ta có $y_3=2; y_4=3$ nên loại các phương án còn lại.

Câu 4. **Đáp án B.**

Ta có $u_2=2^2u_1; u_3=6u_2=2^2.2.3u_1; u_4=8u_3=2^3.2.3.4u_1$. Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng $u_n=2^{n-1}.n!u_1=-2^{n-1}.n!$. Do đó $u_{11}=-2^{10}.11!$.

Câu 5. **Đáp án D.**

Ta có $u_n=\frac{1}{2}+2(1+2+..+n)=\frac{1}{2}+n(n+1)$. Suy ra $u_{50}=\frac{1}{2}+50.51=2550,5$.

Câu 6. **Đáp án D.**

Giải phương trình $\frac{n+1}{2n+1}=\frac{8}{15}$ ta được $n=7$.

Câu 7. **Đáp án B.**

Ta có $a_n=-(n-2)^2+15\le 15, \forall n\ge 1$. Dấu bằng xảy ra khi $n-2=0\Leftrightarrow n=2$.

Vậy số hạng lớn nhất của dãy số là số hạng bằng 15.

Câu 8. **Đáp án A.**

Ta có $a_n=\frac{n}{n^2+100}\le\frac{n}{2\sqrt{n^2.100}}=\frac{1}{20}$. Dấu bằng xảy ra khi $n^2=100\Leftrightarrow n=10$.

Vậy số hạng lớn nhất của dãy là số hạng bằng $\frac{1}{20}$.

Câu 9. **Đáp án A.**

Ta tính được $y_2=2; y_3=4; y_4=12\Rightarrow S_4=20$.

Câu 10. **Đáp án A.**

Cách 1: Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

Ta có $x_n=x_1+(1+2+...+n-1)\Leftrightarrow x_n=5+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+10}{2}$.

Cách 2: Kiểm tra từng phương án cho đến khi tìm được phương án đúng.

Phương án A: $x_{n+1}=\frac{(n+1)^2-(n+1)+10}{2}=\frac{n^2+n+10}{2}=\frac{n^2-n+10}{2}+n=x_n+n.$

Cách 3: Với $n=1\Rightarrow x_1=5$ loại các phương án còn lại B, C, D.

Câu 11. **Đáp án A.**

Ta có $x_n>0,\forall n\ge 1$ và $\frac{1}{x_{n+1}}=2(2n+1)+\frac{1}{x_n},\forall n\ge 1.$

Suy ra $\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_1}+4(1+2+...+n-1)+2(n-1)=\frac{3}{2}+2n(n-1)+2(n-1)=\frac{4n^2-1}{2}.$

Suy ra $x_n=\frac{2}{4n^2-1}$. Do đó $x_{100}=\frac{2}{39999}.$

Dạng 2: Bài tập về xét tính tăng giảm của dãy số

Câu 12. **Đáp án B.**

- Dãy số (a_n) là dãy đan dấu nên không phải là dãy số tăng cũng không phải là dãy số giảm.
- Với dãy (b_n), ta có $b_n=5^n+1$ (do $(-1)^{2n}=1$). Vì $b_{n+1}=5^{n+1}+1=5.5^n+1>b_n,\forall n\ge 1$ nên (b_n) là một dãy số tăng.
- Dãy số (c_n) là một dãy số giảm vì $c_{n+1}=\frac{1}{n+1+\sqrt{n+2}}<\frac{1}{n+\sqrt{n+1}}=c_n,\forall n\ge 1.$
- Dãy số (d_n) là một dãy số giảm vì $d_{n+1}=\frac{n+1}{n^2+2n+2}<\frac{n}{n^2+1}=d_n,\forall n\ge 1.$

Câu 13. **Đáp án C.**

- Dãy số (a_n) là dãy đan dấu nên không phải là dãy số tăng cũng không phải là dãy số giảm.
- Dãy số (b_n) là một dãy số tăng vì $b_n=n+\frac{1}{n}<n+1+\frac{1}{n+1}=b_{n+1},\forall n\ge 1.$
- Dãy số (c_n) là một dãy số giảm vì $c_n=\frac{1}{n^3+1}>\frac{1}{(n+1)^3+1}=c_{n+1},\forall n\ge 1.$
- Dãy số (d_n) là một dãy số tăng vì $d_n=3.2^n<3.2^{n+1}=d_{n+1},\forall n\ge 1.$

Câu 14. **Đáp án B.**

Ta có $x_{n+1}=\frac{a(n+1)+4}{n+3}$. Xét hiệu $x_{n+1}-x_n=\frac{a(n+1)+4}{n+3}-\frac{an+4}{n+2}=\frac{2a-4}{(n+2)(n+3)}.$

(x_n) là dãy tăng khi và chỉ khi $x_{n+1}-x_n>0,\forall n\ge 1\Leftrightarrow 2a-4>0\Leftrightarrow a>2.$

Câu 15. **Đáp án D.**

Ta có $x_n>0,\forall n\ge 1$ và $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n+2}{2}>1,\forall n\ge 1$ nên (x_n) là dãy số tăng.

Ta có $y_{n+1}-y_n=\sin^2(n+1)+1-\sin^2 n>0,\forall n\ge 1$ nên (y_n) cũng là dãy số tăng.

Dạng 3: Bài tập về xét tính bị chặn của dãy số

Câu 16. **Đáp án C.**

Ta có $u_n = 1 - \frac{8}{3n+7} < 1 - \frac{8}{3n+10} = u_{n+1}, \forall n \geq 1$ nên (u_n) là một dãy số tăng. Suy ra nó bị chặn dưới bởi $u_1 = \frac{1}{5}$. Lại do $u_n = 1 - \frac{8}{3n+7} < 1, \forall n \geq 1$ nên dãy số u_n bị chặn trên bởi 1.

Câu 17. **Đáp án D.**

- Dãy số (a_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì $a_n = \sqrt{n^2+16} \geq \sqrt{17}, \forall n \geq 1$.
- Dãy số (b_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì $b_n = n + \frac{1}{2n} > 2\sqrt{n.\frac{1}{2n}} = \sqrt{2}, \forall n \geq 1$.
- Dãy số (c_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì $c_n = 2^n + 3 \geq 5, \forall n \geq 1$.
- Dãy số (d_n) là dãy số bị chặn vì $0 < d_n \leq \frac{1}{4}, \forall n \geq 1.$ $\left(do 0 < \frac{n}{n^2+4} \leq \frac{n}{4n} = \frac{1}{4} \right)$.

Câu 18. **Đáp án B.**

- Dãy số (a_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì $u_1 = 4$.
- Dãy số (b_n) có $0 < b_n < 1, \forall n \geq 1$ nên dãy số (b_n) là dãy số bị chặn.
- Dãy số (c_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới bởi $c_1 = 12$.
- Dãy số (d_n) là dãy đan dấu và $d_{2n} = (-2)^{2n} = 4^n$ lớn tùy ý khi n đủ lớn, còn $d_{2n+1} = (-2)^{2n+1} = -2.4^n$ nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.

Câu 19. **Đáp án C.**

- Dãy số (x_n) là dãy đan dấu và x_{2n} lớn tùy ý khi n đủ lớn, x_{2n+1} nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.
- Dãy số (y_n) là dãy số giảm và y_n nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.
- Dãy số (z_n) là dãy số tăng nên nó bị chặn dưới bởi $z_1 = \frac{2018}{2017^2}$.
- Dãy số (w_n) là dãy đan dấu và w_{2n} lớn tùy ý khi n đủ lớn, w_{2n+1} nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.

Dạng 4: Bài tập về tính chất của dãy số.

Câu 20. **Đáp án A.**

Ta có $x_{n+2} = 2.3^{n+2} - 5.2^{n+2} = 18.3^n - 20.2^n; x_{n+1} = 2.3^{n+1} - 5.2^{n+1} = 6.3^n - 10.2^n$.

- Phương án A: $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$.
- Phương án B: $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 5x_n = -8.3^n + 15.2^n \neq 0$.
- Phương án C: $x_{n+2} + 5x_{n+1} - 6x_n = 36.3^n - 40.2^n \neq 0$.
- Phương án D: $x_{n+2} + 6x_{n+1} - 5x_n = 44.3^n - 55.2^n \neq 0$.

Câu 21. **Đáp án D.**

- Phương án A: $\frac{u_1 + u_9}{2} = \frac{3+3^9}{2} \neq 3^5 = u_5$.
- Phương án B: $\frac{u_2.u_4}{2} = \frac{3^6}{2} \neq 3^3 = u_3$.
- Phương án C: $1 + u_1 + u_2 + ... + u_{100} > u_{100} > \frac{u_{100} - 1}{2}$.
- Phương án D: $u_1.u_2...u_{100} = 3^{1+2+...+100} = 3^{5050} = u_{5050}$.

Câu 22. **Đáp án C.**

- Phương án A:

$$a_{n+12}=2017\cos\frac{\left[3(n+12)+1\right]\pi}{6}=2017\cos\left(\frac{(3n+1)\pi}{6}+6\pi\right)=2017\cos\frac{(3n+1)\pi}{6}=a_n.\forall n\ge 1.$$

- Phương án B:

$$a_{n+8}=2017\cos\frac{\left[3(n+8)+1\right]\pi}{6}=2017\cos\left(\frac{(3n+1)\pi}{6}+4\pi\right)=2017\cos\frac{(3n+1)\pi}{6}=a_n.\forall n\ge 1.$$

- Phương án C:

$$a_{n+9}=2017\cos\frac{\left[3(n+9)+1\right]\pi}{6}=2017\cos\left(\frac{(3n+4)\pi}{6}+4\pi\right)=2017\cos\frac{(3n+4)\pi}{6}\ne a_n.\forall n\ge 1.$$

- Phương án D:

$$a_{n+4}=2017\cos\frac{\left[3(n+4)+1\right]\pi}{6}=2017\cos\left(\frac{(3n+1)\pi}{6}+2\pi\right)=2017\cos\frac{(3n+1)\pi}{6}=a_n.\forall n\ge 1.$$

Lưu ý: Quan sát vào các chỉ số dưới của số hạng tổng quát, ta thấy ở C có sự khác biệt so với ba phương án trên nên ta có thể kiểm tra ngay phương án C trước.

Câu 23. **Đáp án A.**

Sáu số hạng đầu tiên của dãy là 1;2;0;1;2;0.

Từ đây ta dự đoán $a_{n+3}=a_n,\forall n\ge 1$. Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được rằng $a_{n+3}=a_n,\forall n\ge 1$.

Mặt khác $2018=3.672+2$ nên $a_{2018}=a_2$.

Câu 24. **Đáp án B.**

Trước hết ta kiểm tra phương án với p nhỏ nhất. Viết 10 số hạng đầu tiên của (a_n):

$a_1=1;a_1=2;a_3=2\sqrt{3}-1;a_4=4-\sqrt{3};a_5=2\sqrt{3}-2;a_6=2-\sqrt{3};a_7=-1;$

$a_8=-2;a_9=1-2\sqrt{3};a_{10}=\sqrt{3}-4.$

Dễ dàng thấy $a_{10}=\sqrt{3}-4\ne 1=a_1$ nên phương án A là sai.

Cách 1: Ta viết thêm 4 số hạng nữa của dãy (a_n): ta được

$(a_n):a_1=1;a_1=2;a_3=2\sqrt{3}-1;a_4=4-\sqrt{3};a_5=2\sqrt{3}-2;a_6=2-\sqrt{3};a_7=-1;$

$a_8=-2;a_9=1-2\sqrt{3};a_{10}=\sqrt{3}-4;a_{11}=2-2\sqrt{3};a_{12}=\sqrt{3}-2;a_{13}=1;a_{14}=2.$

Từ đây ta dự đoán được $a_{n+12}=a_n,\forall n\ge 1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được $a_{n+12}=a_n,\forall n\ge 1$. Vậy số nguyên dương cần tìm là $p=12$.

Cách 2: Sau khi viết 10 số hạng của dãy ta có thể đoán được $a_{n+6}=-a_n,\forall n\ge 1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta chứng minh được rằng $a_{n+6}=-a_n,\forall n\ge 1$. Như vậy 6 là số nguyên dương nhỏ nhất để $a_{n+6}=-a_n,\forall n\ge 1$. Do đó $a_{n+12}=a_{(n+6)+6}=-a_{n+6}=a_n,\forall n\ge 1$.

Suy ra số cần tìm là $p=12$.

Câu 25. **Đáp án D.**

- Phương án A: Ta có $a_1=1;a_2=\dfrac{2018}{1+2017}=1;a_3=1$. Từ đây ta dự đoán $a_n=1,\forall n\ge 1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng $a_n = 1, \forall n \geq 1$. Suy ra (a_n) là dãy số không đổi. Do đó phương án A đúng.

- Phương án B: Ta có
$$b_{n+2} = \tan\left[2(n+2)+1\right]\frac{\pi}{4} = \tan\left[(2n+1)\frac{\pi}{4}+\pi\right] = \tan(2n+1)\frac{\pi}{4} = a_n, \forall n \geq 1.$$
Vậy $b_{n+2} = b_n, \forall n \geq 1$. Do đóphương án B là đúng.
- Phương án C: Ta có $c_n = 1, \forall n \geq 1$. nên dãy số (c_n) là dãy số không đổi. Suy ra (c_n) là dãy số bị chặn. Do đó phương án C là đúng.
- Phương án D: Ta có $d_{2n} = \cos(2n\pi) = 1 = \cos(4n\pi) = d_{4n}$. Suy ra khẳng định (d_n) là một dãy số giảm là khẳng định sai.

Câu 26. **Đáp án C.**

Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) = \ldots = \frac{1}{2^{n-1}}(u_2 - u_1)$. Từ đó ta tính được $u_n = 1 + \frac{1}{2^{n-1}}$.

Do $u_{n+2} - u_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = -\frac{1}{2^n} < 0, \forall n \geq 1$ nên (u_n) là dãy số giảm

Ta có $1 < u_n = 1 + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 2, \forall n \geq 1$ nên (u_n) là dãy số bị chặn. Suy ra phương án đúng là C.

Câu 27. **Đáp án B.**

Từ hệ thức truy hồi của dãy số, ta có ${u_{n+1}}^2 = u_n^2 + 2, \forall n \geq 1$. Suy ra $u_n^2 = u_1^2 + 2(n-1) = 2n - 1$.

Do đó $S_n = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = 2(1 + 2 + \ldots + n) - n = n(n+1) - n = n^2$.

Vậy $S_{2018} = 2018^2$.

Câu 28. **Đáp án A.**

Dựa vào chu kì của hàm số $y = \sin x; y = \cos x$, ta có $z_{n+12} = z_n, \forall n \geq 1$.

Do đó tập hợp các phần tử của dãy số là $S = \{z_1; z_2; \ldots; z_{12}\} = \{-3; -2; -1; 0; 2\}$.

Suy ra $M = 2; m = -3$. Do đó $T = 13$.

Câu 29. **Đáp án C.**

Dễ chỉ ra được $u_n > 0, \forall n \geq 1$. Từ hệ thức truy hồi của dãy số, ta có $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + 2n + 2, \forall n \geq 1$.

Suy ra
$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_1} + 2(1 + 2 + .. + n - 1) + 2(n-1) \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} = 2 + n(n-1) + 2(n-1) = n^2 + n \Rightarrow u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Do đó $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 1$.

Vậy $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$. Vì $S_n < \frac{2017}{2018}$ nên $\frac{n}{n+1} < \frac{2017}{2018} \Rightarrow n < 2017$.

Suy ra số nguyên dương lớn nhất để $S_n < \frac{2017}{2018}$ là $n = 2016$. Vì vậy phương án đúng là C.