CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. LÝ THUYẾT

1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Cho các hàm số $u = u(x)$; $v = v(x)$ có đạo hàm tại điểm *x* thuộc khoảng xác định. Ta có:

1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(u - v)' = u' - v'$
3. $(u.v)' = u'v + v'u$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

STUDY TIP

Mở rộng:

1. $(u_1 \pm u_2 \pm ... \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm ... \pm u_n'$

2. $(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$

2. Đạo hàm của hàm số hợp

Cho hàm số $y = f(u(x)) = f(u)$ với $u = u(x)$. Khi đó: $\boxed{y_x' = y_u'.u_x'}$

3. Bảng công thức đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

Đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản	Đạo hàm các hàm hợp $u = u(x)$
$(c)' = 0$, *c* là hằng số	
$(x)' = 1$	
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha.u'.u^{\alpha-1}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'.(1 + \tan^2 x)$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\cot u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} = -u'.(1 + \cot^2 u)$

STUDY TIP

Với các hàm số đã cho trong bảng được xác định với điều kiện đầy đủ.

B. Các dạng toán về quy tắc tính đạo hàm

Đạo hàm của hàm đa thức - hữu tỉ - căn thức và hàm hợp

Phương pháp:

- Sử dụng các quy tắc, công thức tính đạo hàm trong phần lý thuyết.
- Nhận biết và tính đạo hàm của hàm số hợp, hàm số có nhiều biểu thức.
- Sử dụng đạo hàm để giải phương trình, bất phương trình, chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức..

Câu 1. Đạo hàm của hàm số $y=-2x^5+4\sqrt{x}$ bằng biểu thức nào dưới đây?

A. $-10x^4+\frac{1}{\sqrt{x}}$ **B.** $-10x^4+\frac{4}{\sqrt{x}}$ **C.** $-10x^4+\frac{2}{\sqrt{x}}$ **D.** $-10x^4-\frac{1}{\sqrt{x}}$

Lời giải

Đáp án C

Lời giải

$y' = -10x^4 + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Ví dụ 2. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ bằng biểu thức có dạng $\frac{a}{(x+2)^2}$. Khi đó a nhận giá trị nào sau đây:

A. $a = -3$. **B.** $a = 5$. **C.** $a = 3$. **D.** $a = -5$.

Lời giải

Đáp án C.

$$y' = \frac{(2x+1)'(x+2)-(2x+1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow a = 3.$$

STUDY TIP

$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ với $c \neq 0$ và $ad - bc \neq 0$

Ví dụ 3. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$ bằng biểu thức có dạng $\frac{ax^2+bx}{(x-1)^2}$. Khi đó $a.b$ bằng:

A. $a.b = -2$. **B.** $a.b = -1$. **C.** $a.b = 3$. **D.** $a.b = 4$.

Lời giải

Đáp án A.

Cách 1: $y' = \frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \Rightarrow a.b = -2.$

Cách 2: $y = x + \frac{1}{x-1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

STUDY TIP

Với $a.a' \neq 0$ ta có $\left(\frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}\right)' = \frac{aa'x^2+2ab'x+bb'-ac'}{(a'x+b')^2}$

Ví dụ 4. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2+x+3}{x^2+x-1}$ bằng biểu thức có dạng $\frac{ax+b}{(x^2+x-1)^2}$. Khi đó $a+b$ bằng:

A. $a+b = 4$. **B.** $a+b = 5$. **C.** $a+b = -10$. **D.** $a+b = -12$.

Lời giải

Đáp án D.

Cách 1: $y=\dfrac{x^2+x-1+4}{x^2+x-1}=1+\dfrac{4}{x^2+x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{-4(2x+1)}{(x^2+x-1)^2}=-\dfrac{8x+4}{(x^2+x-1)^2}$

Cách 2: Áp dụng $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$y'=\frac{(2x+1)(x^2+x-1)-(x^2+x+3)(2x+1)}{(x^2+x-1)^2}=\frac{-8x-4}{(x^2+x-1)^2}\Rightarrow a+b=-12$$

STUDY TIP

$$\left(\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}\right)'=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix}a & c\\ a_1 & c_1\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}b & c\\ b_1 & c_1\end{vmatrix}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}$$

Ví dụ 5. Đạo hàm của hàm số $y=ax^2+(a-1)x+a^3-a^2$ (với *a* là hằng số) tại mọi $x\in\mathbb{R}$ là:

A. $2x+a-1$. **B.** $2ax+1-a$. **C.** $2ax+3a^2-2a+1$. **D.** $2ax+a-1$.

Lời giải

Đáp án D. $y'=2ax+a-1$

STUDY TIP

Với *c* là hằng số thì $(c)'=0$

$(c.u)'=c.u'$

$(x^n)'=nx^{n-1}, n\in\mathbb{N}^*$

Ví dụ 6. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x^2+x+1}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax+b}{2\sqrt{x^2+x+1}}$. Khi đó $a-b$ bằng:

A. $a-b=2$. **B.** $a-b=-1$. **C.** $a-b=1$. **D.** $a-b=-2$.

Lời giải

Đáp án C. $y'=\dfrac{(x^2+x+1)'}{2\sqrt{x^2+x+1}}=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\Rightarrow a-b=1$

Ví dụ 7. Đạo hàm của hàm số $y=(x^2-x+1)^5$ là:

A. $4(x^2-x+1)^4(2x-1)$. **B.** $5(x^2-x+1)^4$.

C. $5(x^2-x+1)^4(2x-1)$. **D.** $(x^2-x+1)^4(2x-1)$.

Lời giải

Đáp án C. $y'=5(x^2-x+1)^4(x^2-x+1)'=5(x^2-x+1)^4(2x-1)$

STUDY TIP

Với $u=u(x)$: $\left(u^n\right)'=n.u'u^{n-1}, n\in\mathbb{N}^*$

$\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Ví dụ 8. Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+1\right)\left(5-3x^2\right)$ bằng biểu thức có dạng ax^3+bx. Khi đó $T=\dfrac{a}{b}$ bằng:

A. -1. **B.** -2. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải

Đáp án D.

$y'=\left(x^2+1\right)'\left(5-3x^2\right)+\left(x^2+1\right)\left(5-3x^2\right)'=2x\left(5-3x^2\right)+\left(x^2+1\right)(-6x)=-12x^3+4x$

STUDY TIP

Với $u=u(x), v=v(x)$: $(uv)'=u'v+uv'$

Ví dụ 9. Đạo hàm của hàm số $y=x^2(2x+1)(5x-3)$ bằng biểu thức có dạng ax^3+bx^2+cx. Khi đó $a+b+c$ bằng:

A. 31. **B.** 24. **C.** 51. **D.** 34.

Lời giải

Đáp án A.

Cách 1: $y'=2x(2x+1)(5x-3)+x^2.2(5x-3)+x^2(2x+1).5=40x^3-3x^2-6x$

Cách 2: Nhân vào rút gọn ta được $y=10x^4-x^3-3x^2\Rightarrow y'=40x^3-3x^2-6x$ nên $a+b+c=31$

STUDY TIP

$u=u(x), v=v(x), \omega=\omega(x)\Rightarrow(uv\omega)'=u'v\omega+uv'\omega+uv\omega'$

Ví dụ 10. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (a là hằng số) là:

A. $-\dfrac{a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$. **B.** $\dfrac{a^2}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^3}}$. **C.** $\dfrac{2a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$. **D.** $\dfrac{a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$.

Lời giải

Đáp án D.

$$y'=\frac{\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}=\frac{a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$$

Ví dụ 11. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$. Khi đó a nhận giá trị nào sau đây:

A. $a=-4$. **B.** $a=-1$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-3$.

Lời giải

Đáp án B.

$$y' = -\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1} = \frac{-\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}.\left(x^2+1\right)} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}.\left(x^2+1\right)} \Rightarrow a=-1$$

STUDY TIP

$$u = u(x): \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Ví dụ 12. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & khi\ \ x \le 1 \\ \sqrt{x-1}+3 & khi\ \ x > 1 \end{cases}$ là:

A. $f'(x) = \begin{cases} 2x & khi\ \ x<1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1 \end{cases}$.

B. $f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & khi\ \ x<1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1 \end{cases}$.

C. $f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & khi\ \ x \le 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1 \end{cases}$.

D. $f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & khi\ \ x<1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1 \end{cases}$.

Lời giải

Đáp án D.

Với $x<1: f'(x) = 2x+1$

Với $x>1: f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

Với $x=1$, ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} = +\infty$ nên không có đạo hàm tại $x=1$.

Vậy $f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & khi\ \ x<1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1 \end{cases}$

STUDY TIP

Loại bài toán kết hợp giữa tính đạo hàm bằng công thức và tính đạo hàm bằng định nghĩa tại 1 điểm x_0.

Ví dụ 13. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & khi\ \ x<1 \\ \dfrac{1}{x} & khi\ \ x \ge 1 \end{cases}$.

A. $f'(x) = \begin{cases} -x & khi\ \ x<1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & khi\ \ x>1 \end{cases}$.

B. $f'(x) = \begin{cases} -x & khi\ \ x<1 \\ -1 & khi\ \ x=1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & khi\ \ x>1 \end{cases}$.

C. $f'(x)=\begin{cases}-x & khi\ \ x<1\\ \dfrac{1}{x^2} & khi\ \ x>1\end{cases}$.

D. $f'(x)=\begin{cases}-x & khi\ \ x<1\\ 1 & khi\ \ x=1\\ -\dfrac{1}{x^2} & khi\ \ x>1\end{cases}$.

Lời giải

Đáp án B.

Với $x<1: f'(x)=-x$

Với $x>1: f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

Với $x=1$, ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3-x^2}{2}=1\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1=f(1)$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=1$.

Xét $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=-1\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{3-x^2}{2}-1}{x-1}=-1\end{cases}\Rightarrow f'(1)=-1$

Vậy $f'(x)=\begin{cases}-x & khi\ \ x<1\\ -1 & khi\ \ x=1\\ -\dfrac{1}{x^2} & khi\ \ x>1\end{cases}$

STUDY TIP

- Trên các khoảng xác định ta tính đạo hàm bằng quy tắc.
- Tại điểm $x=x_0$ ta xét đạo hàm bằng định nghĩa.

Ví dụ 14. Cho hàm số $f(x)=(3x^2-1)^2$. Giá trị $f'(1)$ là:

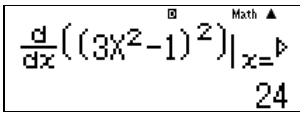
A. 4. **B.** 8. **C.** -4. **D.** 24.

Lời giải

Đáp án D.

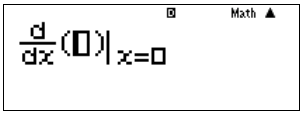
Cách 1: $f'(x)=2(3x^2-1)(3x^2-1)'=12x(3x^2-1)\Rightarrow f'(1)=24$

Cách 2: Sử dụng MTCT

Nhập vào màn hình: 

Nhận xét: Bằng cách 2 ta có thể tính nhanh chóng đạo hàm tại một điểm xác định $x = x_0$.

STUDY TIP

Dùng MTCT: 

Tính đạo hàm của hàm số tại một điểm chỉ ra $x = x_0$.

Ví dụ 15. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$. Đạo hàm của hàm số tại $x = 1$ là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Đáp án D.

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow$ Không tồn tại $f'(1)$ vì $f'(x)$ xác định với $x > 1$.

STUDY TIP

Với bài toán này nếu sử dụng MTCT thì kết quả là màn hình hiển thị thông báo "Math ERROR" và không tính được.

Ví dụ 16. Cho hàm số $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 1$. Tập các giá trị của x để $f'(x) < 0$ là:

A. $(-1;0) \cup (1;+\infty)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Đáp án A.

$$f'(x) = -8x^3 + 8x \Rightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$$

STUDY TIP

Nhận biết được loại bài toán kết hợp việc tính đạo hàm và giải bất phương trình.

Ví dụ 17. Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$. Tập các giá trị của x để $2x.f'(x) - f(x) \geq 0$ là:

A. $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. **D.** $\left[\frac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

Lời giải

Đáp án A.

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow 2x.f'(x)-f(x)\ge 0\Leftrightarrow 2x.\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}-f(x)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2x\ge\sqrt{x^2+1}\ \left(do\ \ f(x)>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\ge 0\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\3x^2\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy $x\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

STUDY TIP

- $|x|\ge x\Rightarrow |x|+x\ge 0$
- $\sqrt{f(x)}\le\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0,g(x)\ge 0\\f(x)\le g(x)\end{cases}$

Ví dụ 18. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2\sqrt{2}x^2+8x-1$. Tập các giá trị của x để $f'(x)=0$ là:

A. $\{-2\sqrt{2}\}$. **B.** $\{2;\sqrt{2}\}$. **C.** $\{-4\sqrt{2}\}$. **D.** $\{2\sqrt{2}\}$.

Lời giải

Đáp án D.

$$f'(x)=x^2-4\sqrt{2}x+8$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$$

STUDY TIP

- Nhận biết được loại bài toán kết hợp giữa việc tính đạo hàm và giải phương trình.
- Sau khi tính được đạo hàm ta có thể thử các đáp án vào phương trình để tìm ra kết quả.

Ví dụ 19. Cho hàm số $f(x)=\frac{x^3}{x-1}$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ là:

A. $\left\{0;\frac{2}{3}\right\}$. **B.** $\left\{0;-\frac{2}{3}\right\}$. **C.** $\left\{0;\frac{3}{2}\right\}$. **D.** $\left\{0;-\frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải

Đáp án C.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x^3-3x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{3}{2}\end{array}\right.\text{(thỏa mãn)}$$

Ví dụ 20. Cho hàm số $f(x)=\frac{mx^3}{3}-mx^2+(3m-1)x+1$. Tập các giá trị của tham số m để $y'\le 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ là:

A. $\left(-\infty;\sqrt{2}\right]$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Đáp án C.

$y'=mx^2-2mx+3m-1$

$y'\le 0\Leftrightarrow mx^2-2mx+3m-1\le 0\ (1)$

+ Với $m=0$ thì (1) trở thành $-1\le 0$ nên đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$.

+ Với $m\ne 0$ khi đó (1) đúng với $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ 1-2m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m<0$

Vậy $m\le 0$

STUDY TIP

Cho $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\ne 0$

$f(x)\ge 0,\forall x\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}$

$f(x)\le 0,\forall x\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases}$

Ví dụ 21. Cho hàm số $f(x)=2mx-mx^3$. Số $x=1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x)\le 1$ khi và chỉ khi:

A. $m\le -1$. **B.** $m>-1$. **C.** $-1\le m\le 1$. **D.** $m\ge -1$.

Lời giải

Đáp án D.

$f'(x)=2m-3mx^2$

Số $x=1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x)\le 1\Leftrightarrow 2m-3m\le 1\Leftrightarrow m\ge -1$.

DẠNG 2. ĐẠO HÀM CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Phương pháp chung:

- Vận dụng các công thức đạo hàm bốn hàm số $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$ và hàm hợp của nó.

- Vận dụng phối hợp các quy tắc đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương và hàm số hợp

- Vận dụng các phương trình lượng giác cơ bản, phương trình bậc nhất với sin*x và* cos*x, phương trình tích số…để giải phương trình* $y'=0$

Chú ý: Biến đổi lượng giác để thu gọn các hàm số, biểu thức lượng giác

STUDY TIP

$$(\sin^n u)'=n\sin^{n-1}u.(\sin u)'$$

$$(\cos^n u)'=n\cos^{n-1}u.(\cos u)'$$

$$(\tan^n u)'=n\tan^{n-1}u.(\tan u)'$$

$$(\cot^n u)'=n\cot^{n-1}u.(\cot u)'$$

Câu 2. Đạo hàm của hàm số $y=2\sin 3x.\cos 5x$ có biểu thức nào sau đây?

A. $30\cos 3x.\sin 5x$. **B.** $-8\cos 8x+2\cos 2x$.

C. $8\cos 8x-2\cos 2x$. **D.** $-30\cos 3x+30\sin 5x$.

Đáp án C

Lời giải

Cách 1: Ta có $y=\sin 8x-\sin 2x\Rightarrow y'=8\cos 8x-2\cos 2x$

Cách 2: $y'=6\cos 3x.\cos 5x-10\sin 3x.\sin 5x$

$=3\cos 8x+3\cos 2x-5\cos 2x+5\cos 8x$

$=8\cos 8x-2\cos 2x$

Nhận xét: Nếu dùng cách 1 sử dụng công thức biến đổi từ tích sang tổng rút gọn rồi sau đó việc tính đạo hàm y' sẽ đơn giản hơn.

STUDY TIP

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)]$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$$

Câu 3. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ có biểu thức dạng $\dfrac{a}{(\sin x-\cos x)^2}$. Vậy giá trị *a* là:

A. $a=1$. **B.** $a=-2$. **C.** $a=3$. **D.** $a=2$.

Đáp án B

Lời giải

$$y'=\frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}=\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}.$$

$\Rightarrow a=-2$

STUDY TIP

Áp dụng quy tắc: $(\frac{u}{v})'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ và $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

Câu 4. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\cot x}$ là:

A. $\dfrac{-1}{\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$. **B.** $\dfrac{-1}{2\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$. **C.** $\dfrac{1}{2\sqrt{\cot x}}$. **D.** $\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cot x}}$.

Đáp án B

Lời giải

Cách 1: $y'=\dfrac{(\cot x)'}{2\sqrt{\cot x}}=\dfrac{-1}{2\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$

Cách 2: Học sin có thể sử dụng MTCT tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\cot x}$ tại một điểm $x=\dfrac{\pi}{4}$ ta được kết quả -1

Với $x=\dfrac{\pi}{4}$ thay vào từng đáp án ta được đáp án B

STUDY TIP

Câu 5. Đạo hàm của hàm số $y=\cos^2(\sin^3 x)$ là biểu thức nào sau đây?

A. $-\sin(2\sin^3 x).\sin^2 x.\cos x$. **B.** $-6\sin(2\sin^3 x).\sin^2 x.\cos x$.

C. $-7\sin(2\sin^3 x).\sin^2 x.\cos x$. **D.** $-3\sin(2\sin^3 x).\sin^2 x.\cos x$.

Đáp án D

Lời giải

Cách 1: $y=\cos^2 u$, với $u=\sin^3 x$ $\Rightarrow y'=-3\sin(2\sin^3 x).\sin^2 x.\cos x$

Cách 2: Sử dụng MTCT

- Nhập biểu thức của hàm số $y=\cos^2(\sin^3 x)$ ở đơn vị radian

- Thay $x=\dfrac{\pi}{4}$ vào từng đáp án ta được đáp án D

Nhận xét: Với bài toán này việc sử dụng MTCT trở nên phức tạp hơn nhiều với việc giải tự luận thuần túy

STUDY TIP

Câu 6. Đạo hàm của hàm số $y=-\dfrac{\cos x}{3\sin^3 x}+\dfrac{4}{3}\cot x$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\cot^3 x-1$. **B.** $3\cot^4 x-1$. **C.** $\cot^4 x-1$. **D.** $\cot^4 x$.

Đáp án C

Lời giải

Ta rút gọn hàm số đã cho $y=-\dfrac{1}{3}\cot x(1+\cot^2 x)+\dfrac{4}{3}\cot x=-\dfrac{1}{3}\cot^3 x+\cot x$

$\Rightarrow y'=\cot^2 x(1+\cot^2 x)-1-\cot^2 x=\cot^4 x-1$

STUDY TIP

Học sinh cần biến đổi hàm số đã cho về dạng đơn giản hơn thì việc tính toán đạo hàm sẽ nhanh hơn.

Câu 7. Đạo hàm của hàm số $y=\tan^2 x-\cot^2 x$ là:

A. $2\dfrac{\tan x}{\cos^2 x}+2\dfrac{\cot x}{\sin^2 x}$. **B.** $2\dfrac{\tan x}{\cos^2 x}-2\dfrac{\cot x}{\sin^2 x}$. **C.** $2\dfrac{\tan x}{\sin^2 x}+2\dfrac{\cot x}{\cos^2 x}$. **D.** $2\tan x-2\cot x$.

Đáp án A

Lời giải

$$y' = 2\tan x.\frac{1}{\cos^2 x} - 2\cot x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{2\tan x}{\cos^2 x} + \frac{2\cot x}{\sin^2 x}$$

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3.\sin\frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Đạo hàm $f'(x)$ là biểu thức nào sau đây?

A. $f'(x) = \begin{cases} x^2.\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ -1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$.

B. $f'(x) = \begin{cases} 3x^2.\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$.

C. $f'(x) = \begin{cases} 3x^2.\sin\frac{1}{x} + x\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$.

D. $f'(x) = \begin{cases} 3x^2.\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$.

Đáp án D

Lời giải

Với $x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$

Với $x = 0 \Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2.\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

STUDY TIP

Bạn đọc nhận biết loại bài toán tính đạo hàm của hàm số có nhiều biểu thức:

- Với $x \neq x_0$ tính đạo hàm bằng công thức
- Với $x = x_0$ tính đạo hàm bằng định nghĩa

Câu 9. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{3\tan^2 x + \cot 2x}$ là:

A. $\frac{3\tan x(1+\tan^2 x) - (1+\cot^2 2x)}{3\sqrt{3\tan^2 x + \cot 2x}}$.

B. $\frac{3\tan x(1+\tan^2 x) - (1+\cot^2 2x)}{2\sqrt{3\tan^2 x + \cot 2x}}$.

C. $\frac{3\tan x(1+\tan^2 x) + (1+\cot^2 2x)}{\sqrt{3\tan^2 x + \cot 2x}}$.

D. $\frac{3\tan x(1+\tan^2 x) - (1+\cot^2 2x)}{\sqrt{3\tan^2 x + \cot 2x}}$.

Đáp án D

Lời giải

Ta có: $y = \sqrt{u}$ với $u = 3\tan^2 x + \cot 2x \Rightarrow y' = \frac{3\tan x(1+\tan^2 x) - (1+\cot^2 2x)}{\sqrt{3\tan^2 x + \cot 2x}}$

STUDY TIP

Vận dụng giữa các quy tắc tính đạo hàm và đạo hàm của hàm số hợp $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{1 + 2\sin x}$, chọn kết quả sai?

A. $f'(\frac{\pi}{6})=-\frac{5}{4}$. **B.** $f'(0)=-2$. **C.** $f'(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{3}$. **D.** $f'(\pi)=-2$.

Đáp án A

Lời giải

Cách 1: Ta có $f'(x)=\frac{-\sin x-2}{(1+2\sin x)^2}\Rightarrow f'(\frac{\pi}{6})=-\frac{5}{8}$

Cách 2: Sử dụng MTCT tính đạo hàm của hàm số tại một điểm

STUDY TIP

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)-\cos^2 x$ với $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong 4 biểu thức dưới đây, biểu thức nào xác định $f(x)$ thỏa mãn $y'=1\forall x\in\mathbb{R}$?

A. $x+\frac{1}{2}\cos 2x$. **B.** $x-\frac{1}{2}\cos 2x$. **C.** $x-\sin 2x$. **D.** $x+\sin 2x$.

Đáp án A

Lời giải

Ta có: $y'=f'(x)+2\cos x\sin x=f'(x)+\sin 2x$

$y'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)+\sin 2x=1\Leftrightarrow f'(x)=1-\sin 2x\Rightarrow f(x)=x+\frac{1}{2}\cos 2x$

STUDY TIP

Bài toán ngược xác định hàm số $f(x)$ khi biết được $f'(x)$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$. Khi đó $f'(x)$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2 . **C.** 0. **D.** -1.

Đáp án C

Lời giải

Cách 1: $f'(x)=6\sin^5 x\cos x-6\cos^5 x\sin x+3(2\sin x\cos^3 x-2\cos x\sin^3 x)$

$=6\sin x\cos x(\sin^4 x-\cos^4 x+\cos^2 x-\sin^2 x)$

$=6\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x)=0$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính đạo hàm tại điểm *x* bất kì ta được kết quả $f'(x)=0$

STUDY TIP

Ta có thể rút gọn biểu thức rồi tính đạo hàm sau

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x; g(x)=\frac{1}{4}\cos 4x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f'(x)-g'(x)=0$. **B.** $f(x)=g(x)+\frac{1}{4}$.

C. $2f'(x)-3g'(x)=1$. **D.** $3f'(x)+2g'(x)=-1$.

Đáp án A

Lời giải

Ta có:

$f'(x)=4\sin^3 x\cos x+4\cos^3 x(-\sin x)=4\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)=-\sin 4x$.

$g'(x)=-\sin 4x$.

Vậy $f'(x)-g'(x)=0$

STUDY TIP

Dùng biến đổi lượng giác thì ta được $f(x)=g(x)+\frac{3}{4}$ do 2 hàm số khác nhau một hằng số nên cùng đạo hàm.

Câu 14. Cho hàm số $y=\cos^2 x+\sin x$. Phương trình $y'=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$

A. 1 nghiệm. **B.** 2 nghiệm. **C.** 3 nghiệm. **D.** 4 nghiệm.

Đáp án C

Lời giải

$y'=-2\cos x\sin x+\cos x=\cos x(1-2\sin x)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.;(k\in\mathbb{Z})$$

Vì $x\in(0;\pi)\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right\}$. Vậy có 3 nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$

STUDY TIP

Loại bài toán kết hợp giữa tính đạo hàm và giải phương trình lượng giác

Câu 15. Cho hàm số $y=(m+1)\sin x+m\cos x-(m+2)x+1$. Tìm giá trị của *m* để $y'=0$ có nghiệm?

A. $\left[\begin{array}{l}m\le -1\\ m\ge 3\end{array}\right.$. **B.** $m\ge 2$. **C.** $-1\le m\le 3$. **D.** $m\le -2$.

Đáp án A

Lời giải

$y'=(m+1)\cos x-m\sin x-(m+2)$

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow(m+1)\cos x-m\sin x=(m+2)$

Điều kiện phương trình có nghiệm là $a^2+b^2\ge c^2$

$$\Leftrightarrow(m+1)^2+m^2\ge(m+2)^2\Leftrightarrow m^2-2m-3\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -1\\ m\ge 3\end{array}\right.$$

STUDY TIP

Phương trình bậc nhất với $\sin x$ và $\cos x$ $a\sin x+b\cos x=c$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2\ge c^2$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Dạng 1: Đạo hàm của hàm đa thức – hữu tỷ - căn thức và hàm hợp

Câu 1. Đạo hàm của hàm số $y=2x^3-9x^2+12x-4$ là:

A. $5x^2-11x-4$. **B.** $6x^2-18x+12$. **C.** $6x^2+18x-12$. **D.** $6x^2-9x-12$.

Câu 2. Đạo hàm của hàm số $y=-x^3+3mx^2+3(1-m^2)x+m^3-m^2$ (với *m* là tham số) bằng:

A. $-3x^2+6mx+1-m^2$. **B.** $-x^2+3mx-1-3m$.

C. $3x^2-6mx-3+3m^2$. **D.** $-3x^2+6mx+3-3m^2$.

Câu 3. Đạo hàm của hàm số $y=(x^2+1)^2(3+5x^2)$ bằng biểu thức có dạng ax^5+bx^3+cx. Khi đó $a-b+c$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 4. Đạo hàm của hàm số $y=(x^2+1)(x^3+2)(x^4+3)$ bằng biểu thức có dạng $ax^8+bx^6+cx^5+15x^4+dx^3+ex^2+gx$. Khi đó $a-b+c-d+e-g$ bằng:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 5. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{a}{(x-1)^2}$. Khi đó a nhận giá trị nào sau đây?

A. $a=-2$. **B.** $a=-1$. **C.** $a=-3$. **D.** $a=3$.

Câu 6. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-3}{2(x-1)}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax^2+bx}{2(x-1)^2}$. Khi đó $a.b$ bằng:

A. -2. **B.** -1. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 7. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x-1}{x^2-5x+2}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax^2+bx+c}{(x-5x+2)^2}$. Khi đó $a+b+c$ bằng:

A. -1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -2.

Câu 8. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x+3}{x^3-2}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{(x^3-2)^2}$. Khi đó $a+b+c+d+e$ bằng:

A. -12. **B.** -10. **C.** 8. **D.** 5.

Câu 9. Đạo hàm của hàm số $y=(x-2)\sqrt{x^2+1}$ biểu thức có dạng $\dfrac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x^2+1}}$. Khi đó $a.b.c$ bằng:

A. -2. **B.** -4. **C.** -6. **D.** -8.

Câu 10. Đạo hàm của hàm số $y=(x^6-3x^4)^2$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $12x^{11}-52x^9+64x^7$. **B.** $12x^{11}-73x^9+49x^7$.

C. $12x^{11}-62x^9+70x^7$. **D.** $12x^{11}-60x^9+72x^7$.

Câu 11. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{5x^2-2x+1}$ biểu thức có dạng $\dfrac{ax+b}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$. Khi đó $T=\dfrac{a}{b}$ bằng:

A. $T=-5$. **B.** $T=5$. **C.** $T=-10$. **D.** $T=10$.

Câu 12. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\dfrac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}$. **B.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}}$.

C. $\dfrac{1}{4\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{4\sqrt{x-1}}$. **D.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Câu 13. Đạo hàm của hàm số $y=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ biểu thức có dạng $\frac{ax+b}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. Khi đó $P=a.b$ bằng:

A. $P=1$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2$.

Câu 14. Đạo hàm của hàm số $y=\frac{x+\sqrt{x}-\frac{1}{x}}{x-\sqrt{x}}$ bằng biểu thức nào sau đây?.

A. $\frac{4\sqrt{x}-2x^2-3}{2\sqrt{x^3}(x-\sqrt{x})^2}$. **B.** $\frac{4\sqrt{x}+2x^2-3}{x\sqrt{x}(x-\sqrt{x})^2}$. **C.** $\frac{\sqrt{x}-2x^2-2}{2x\sqrt{x}(x-\sqrt{x})^2}$. **D.** $\frac{\sqrt{x}+2x^2+1}{2x\sqrt{x}(x-\sqrt{x})^2}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=\frac{3x^2+2x+1}{2\sqrt{3x^2+2x+1}}$. Giá trị $f'(0)$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** Không tồn tại.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\frac{1-x}{2x+1}$ thì $f'(-\frac{1}{2})$ có giá trị là:

A. 0. **B.** 3. **C.** -3 . **D.** Không tồn tại.

Câu 17: Cho $f(x)=\frac{x}{(x-1)(x-2)\cdots(x-2017)}$ thì $f'(0)$

A. $\frac{1}{2017!}$. **B.** $2017!$. **C.** $-\frac{1}{2017!}$. **D.** $-2017!$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2 & khi\, x\ge 1 \\ 2x-1 & khi\, x<1 \end{cases}$. Hãy chọn đáp án sai:

A. $f'(1)=1$. **B.** Hàm số có đạo hàm tại $x_0=1$.

C. Hàm số liên tục tại $x_0=1$. **D.** $f'(x)=\begin{cases} 2x & khi\, x\ge 1 \\ x & khi\, x<1 \end{cases}$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$. Tập các giá trị của x để $f'(x)>0$ là:

A. $(-\infty;0)$. **B.** $\left[-2;\sqrt{2}\right)$. **C.** $(-2;2]$. **D.** $\left(-2;\sqrt{2}\right)$

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=\frac{x}{x^3+1}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x)\le 0$ là:

A. $\left(-\infty;\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. **B.** $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$. **D.** $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}};+\infty\right)$.

Câu 21: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$.

B. $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$.

C. $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$.

D. $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1-\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$.

Câu 22: Cho $f(x)=x^5+x^3-2x-3$. Tính $f'(1)+f'(-1)+4f'(0)$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2$. Tính $f'(1)$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 24: Cho hàm số $y=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$. Hàm số có đạo hàm $f'(x)$ bằng:

A. $\frac{3}{2}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$.

B. $x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}$.

C. $\frac{3}{2}\left(-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$.

D. $\frac{3}{2}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$.

Câu 25: Đạo hàm của hàm số $y=\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}.\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$.

B. $2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.\frac{-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$.

C. $\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\frac{-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$.

D. $2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$.

Câu 26: Cho hàm số $y=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$. Đạo hàm y' bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{3(2x+1)^2}{(x-1)^4}$. **B.** $\frac{(2x+1)^2}{(x-1)^4}$. **C.** $\frac{-(2x+1)^2}{(x-1)^4}$. **D.** $\frac{-9(2x+1)^2}{(x-1)^4}$.

Câu 27: Cho hàm số $y=(m-1)x^3-3(m+2)x^2-6(m+2)x+1$. Tập giá trị của m để $y'\ge 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ là

A. $[3;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\left[4\sqrt{2};+\infty\right)$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x+1}{x+1} & khi\, x\ge 0\\ x^2+ax+b & khi\, x<0\end{cases}$. Tìm a, b để hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

A. $a=0$, $b=11$. **B.** $a=10$, $b=11$. **C.** $a=20$, $b=21$. **D.** $a=0$, $b=1$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)=-\frac{mx^2}{3}+\frac{mx^2}{2}-(3-m)x+2$. Tìm m để $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

A. $m\in\left[\frac{3}{2};2\right]$. **B.** $m\in(-\infty;3)$. **C.** $m\in\left(\frac{12}{5};3\right)$. **D.** $m\in\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)=\frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}$. Đạo hàm $f'(x)$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\begin{cases}-\frac{1}{x^2} & khi\, x<-1, x>1\\ 1 & khi -1<x<1\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}\frac{2}{x^2} & khi\, x<-1, x>1\\ 1 & khi -1\le x\le 1\end{cases}$.

C. $\begin{cases}\frac{1}{x^2} & khi\, x<-1, x>1\\ -1 & khi -1\le x\le 1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}-\frac{3}{x^2} & khi\, x<-1, x>1\\ 2 & khi -1<x<1\end{cases}$.

Dạng 2: Đạo hàm các hàm số lượng giác

Câu 31: Hàm số $y=\cos x.\sin^2 x$ có đạo hàm là biểu thức nào sau đây?

A. $\sin x\left(3\cos^2 x+1\right)$. **B.** $\sin x\left(3\cos^2 x-1\right)$. **C.** $\sin x\left(\cos^2 x-1\right)$. **D.** $\sin x\left(\cos^2 x+1\right)$.

Câu 32: Hàm số $y=\frac{1}{2}(1+\tan x)^2$ có đạo hàm là biểu thức nào sau đây?

A. $(1+\tan x)^2$. **B.** $1+\tan^2 x$.

C. $(1+\tan x)\left(1+\tan^2 x\right)$. **D.** $1+\tan x$.

Câu 33: Đạo hàm của hàm số $y=\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $-\dfrac{1+\sin^2 x}{2\sin^3 x}$. **B.** $-\dfrac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$. **C.** $\dfrac{1+\sin^2 x}{2\sin^3 x}$. **D.** $\dfrac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$. Giá trị của $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-f'\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ là

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{9}$. **C.** $\dfrac{8}{9}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Câu 35: Hàm số $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$ có $y'=\dfrac{ax^2+bx+c}{(\cos x+x\sin x)^2}$. Hỏi $T=a+b+c$ bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 36: Cho hàm số $y=\cos 2x.\sin^2\dfrac{x}{2}$. Xét hai kết quả:

(I) $y'=-2\sin 2x.\sin^2\dfrac{x}{2}+\sin x.\cos 2x$ (II) $y'=2\sin 2x.\sin^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin x.\cos 2x$.

Cách nào đúng?

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II). **C.** Cả 2 đều đúng. **D.** Không có cách nào.

Câu 37: Đạo hàm của hàm số $y=\cot^2(\cos x)+\sqrt{\sin x-\dfrac{\pi}{2}}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $-2\cot(\cos x)\dfrac{1}{\sin^2(\cos x)}+\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\dfrac{\pi}{2}}}$. **B.** $2\cot(\cos x)\dfrac{1}{\sin^2(\cos x)}\sin x+\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\dfrac{\pi}{2}}}$.

C. $-2\cot(\cos x)\dfrac{1}{\sin^2(\cos x)}+\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x-\dfrac{\pi}{2}}}$. **D.** $2\cot(\cos x)\dfrac{1}{\sin^2(\cos x)}\sin x+\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x-\dfrac{\pi}{2}}}$.

Câu 38: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x}{\sin x}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $(x\cos x-\sin x)\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$. **B.** $(x\cos x+\sin x)\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

C. $(x\sin x-\cos x)\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$. **D.** $(x\sin x+\cos x)\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

Câu 39: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{|\sin x|}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\dfrac{-\cot x}{|\sin x|}$. **B.** $\dfrac{\cot x}{|\sin x|}$. **C.** $\dfrac{\cot x}{\sin x}$. **D.** $\dfrac{-\cot x}{\sin x}$.

Câu 40: Cho hàm số $y=\sin\left(\cos^2 x\right).\cos\left(\sin^2 x\right)$. Đạo hàm $y'=a.\sin 2x.\cos\left(\cos 2x\right)$. Giá trị của a là số nguyên thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(-1;5)$. **C.** $(-3;2)$. **D.** $(4;7)$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm với mọi x và thỏa mãn $f(2x)=4\cos x.f(x)-2x$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0)=0$. **B.** $f'(0)=1$. **C.** $f'(0)=-2$. **D.** $f'(0)=3$.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x)=0$ trên đường tròn lượng giác ta được mấy điểm phân biệt?

A. 1 điểm. **B.** 2 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** 6 điểm.

Câu 43: Cho hàm số $y=\cot 2x$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $y'+2y^2+2=0$. **B.** $y'-2y^2-2=0$. **C.** $y'+3y^2+5=0$. **D.** $y'+3y^2+7=0$.

Câu 44: Tìm số nguyên dương n sao cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^n.\sin\dfrac{1}{x} & khi\ x\neq 0 \\ 0 & khi\ x=0 \end{cases}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

A. $n=1$. **B.** $n=2$. **C.** $n\geq 2$. **D.** $n=3$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)=\sin^2 x+\sin 2x$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.

A. $m=-\sqrt{2}$, $M=\sqrt{2}$. **B.** $m=-1$, $M=1$. **C.** $m=-2$, $M=2$. **D.** $m=-\sqrt{5}$, $M=\sqrt{5}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=-\cos x+\sin x-\cos 2x$. Phương trình $f'(x)=1$ tương đương với phương trình nào sau đây?

A. $\sin x=0$. **B.** $\sin x-1=0$.

C. $(\sin x-1)(\cos x-1)=0$. **D.** $\cos x=0$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)=\sin^2 x+3\cos^2 x$. Tập giá trị của hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. $[-4;4]$. **B.** $[-2;2]$. **C.** $[-1;1]$. **D.** $[-3;3]$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)=2\dfrac{\cos^3 x}{3}+\sin^3 x-2\cos x-3\sin x$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x)$ trên đường tròn ta được mấy điểm phân biệt?

A. 1 điểm. **B.** 2 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** 6 điểm.

Câu 49: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có đạo hàm là $\sin^2 x$?

A. $y=\dfrac{\sin^3 x}{3}$. **B.** $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\sin 2x$. **C.** $y=x-\dfrac{\sin^3 x}{3}$. **D.** $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2x$.

Câu 50: Hàm số nào sau đây có đạo hàm luôn bằng 0?

A. $y=1-\sin^2 x$. **B.** $y=\sin^2 x-\cos^2 x$.

C. $y=\sin^2 x+\cos^2 x$. **D.** $y=\cos 2x$.

Câu 51: Hàm số nào sau đây có đạo hàm $y'=x.\sin x$?

A. $y=x\cos x$. **B.** $y=x\cos x-\sin x$.

C. $y=\sin x-x\cos x$. **D.** $y=\frac{1}{2}x^2.\sin x$.

Câu 52: Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{\cos 2x}$. Chọn câu sai:

A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$. **B.** $f'(x)=\frac{-2\sin 2x}{3\sqrt[3]{\cos^2 2x}}$.

C. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. **D.** $3y^2.y'+2\sin 2x=0$.

Câu 53: Cho hàm số $y=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}}}$ với $x\in(0;\pi)$ có y' là biểu thức có dạng $a.\sin\frac{x}{8}$. Khi đó a nhận giá trị nào sau đây:

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $-\frac{1}{8}$.

Câu 54: Cho hàm số $f(x)=\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)-2\sin^2 x$. Hàm số có $f'(x)$ bằng:

A. 6. **B.** $2\sin 2x$. **C.** 0. **D.** $2\cos 2x$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Đạo hàm của hàm đa thức

Câu 1: **Đáp án** **B.**

$y'=6x^2-18x+12$.

Câu 2: **Đáp án** **D.**

$y'=-3x^2+6mx+3(1-m^2)$.

Câu 3: **Đáp án** **A.**

$y'=2(x^2+1)+2x.(3+5x^2)+(x^2+1)^2.10x$

$=(4x^3+4x)(3+5x^2)+10x^5+20x^3+10x$

$=30x^5+52x^3+22x.$

$\Rightarrow a-b+c=0$.

Câu 4: **Đáp án** **C.**

$y'=2x\left(x^3+2\right)\left(x^4+3\right)+3x^2\left(x^2+1\right)\left(x^4+3\right)+4x^3\left(x^2+1\right)\left(x^3+2\right)$

$=2x\left(x^7+2x^4+3x^3+6\right)+3x^2\left(x^6+x^4+3x^2+3\right)+4x^3\left(x^5+x^3+2x^2+2\right)$

$=9x^8+7x^6+12x^5+15x^4+8x^3+9x^2+12x.$

$\Rightarrow a-b+c-d+e-g=3$.

Câu 5: **Đáp án** **C.**

Câu 6: **Đáp án** **A.**

$$y'=\frac{(-2x+3)(x-1)-\left(-x^2+3x-3\right)}{2(x-1)^2}=\frac{-x^2+2x}{2(x-1)^2}.$$

Câu 7: **Đáp án** **D.**

$$y'=\frac{\left(6x^2+3\right)\left(x^2-5x+2\right)-\left(2x^3+3x-1\right)(2x-5)}{\left(x^2-5x+2\right)^2}=\frac{-13x^2+10x+1}{\left(x^2-5x+2\right)^2}.$$

$\Rightarrow a+b+c=-2$.

Câu 8: **Đáp án** **A.**

$$y'=\frac{(-2x+2)\left(x^3-2\right)-3x^2\left(-x^2+2x+3\right)}{\left(x^3-2\right)^2}=\frac{x^4-4x^3-9x^2+4x-4}{\left(x^3-2\right)^2}$$

$\Rightarrow a+b+c+d+e=-12$

Câu 9: **Đáp án** **B.**

$$y'=\sqrt{x^2+1}+(x-2).\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Câu 10: **Đáp án** **D.**

$$y'=2\left(x^6-3x^4\right)\left(6x^5-12x^3\right)=12x^{11}-60x^9+72x^7.$$

Câu 11: **Đáp án** **A.**

$$y'=\frac{10x-2}{2\sqrt{5x^2-2x+1}}=\frac{5x-1}{\sqrt{5x^2-2x+1}}\Rightarrow T=\frac{a}{b}=-5.$$

Câu 12: **Đáp án** **C.**

Nhân liên hợp ta có: $y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\Rightarrow y'=\frac{1}{4\sqrt{x+1}}-\frac{1}{4\sqrt{x-1}}$.

Câu 13: **Đáp án** **A.**

$$y'=\frac{\sqrt{x^2+1}-(x-1).\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2+x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}=\frac{x+1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}.$$

$\Rightarrow P=a.b=1$.

Câu 14: **Đáp án** **A.**

$$y'=\frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)\left(x-\sqrt{x}\right)-\left(x+\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{2x\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}=\frac{4\sqrt{x}-2x^2-3}{2x\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x}\right)^2}.$$

Câu 15: **Đáp án** **C.**

Cách 1: Tính $f'(x)=\frac{9x^4+6x^3-9x^2+8x+4}{4\left(3x^3+2x^2+1\right)\sqrt{3x^3+2x^2+1}}\Rightarrow f'(0)=1$.

Cách 2: Dùng MTCT ta được kết quả.

Câu 16: **Đáp án** **D.**

Câu 17: **Đáp án** **C.**

Ta có: $f'(x)=\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-2017)-x\left[(x-1)(x-2)\ldots(x-2017)\right]'}{\left[(x-1)(x-2)\ldots(x-2017)\right]^2}$

$$\Rightarrow f'(0)=\frac{(-1)(-2)\ldots(-2017)}{\left[(-1)(-2)\ldots(-2017)\right]^2}=-\frac{1}{2017!}.$$

Câu 18: **Đáp án** **A.**

Ta có: $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ $\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=1$.

Khi $x>1$: $f'(x)=2x$.

$x<1$: $f'(x)=2$.

Với $x=1$, ta xét: $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2$; $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$.

Vậy $f'(1)=2$.

Câu 19: **Đáp án** **B.**

Điều kiện: $x\in[-2;2]$.

$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; $f'(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}>x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le x<0\\ 0\le x<\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow -2\le x<\sqrt{2}$.

Câu 20: Đáp án D.

$f'(x)=\frac{-2x^3+1}{(x^3+1)^2} \Rightarrow f'(x)\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}-2x^3+1\le 0\\ x\ne -1\end{cases} \Leftrightarrow x\ge \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 21: Đáp án A.

Ta có: $y=\sqrt{u}$ với $u=x+\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(x+\sqrt{x}\right)'\right]=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right].$$

Câu 22: Đáp án A.

Ta có: $f'(x)=5x^4+3x^2-2 \Rightarrow f'(1)+f'(-1)+4f'(0)=4$.

Câu 23: Đáp án A.

Ta có: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+2x \Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$.

Câu 24: Đáp án D.

Ta có: $f'(x)=3\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)=\frac{3}{2}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$.

Câu 25: Đáp án B.

Ta có: $y=u^2$ với $u=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

$$y'=2.\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)'=2.\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=2.\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\frac{-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

.

Câu 26: Đáp án D.

Ta có: $y=u^3$, $u=\frac{2x+1}{x-1}$, $u'=\frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow y'=\frac{-9(2x+1)^2}{(x-1)^4}$.

Câu 27: Đáp án C.

$y'=3\left[(m-1)x^2-2(m+2)x-2(m+2)\right]$.

$y'\ge 0 \Leftrightarrow (m-1)x^2-2(m+2)x-2(m+2)\ge 0$ (1)

Với $m=1$ thì $(1) \Leftrightarrow -6x-6\ge 0 \Leftrightarrow x\le -1 \Rightarrow m=1$ (loại).

Với $m \neq 1 \Rightarrow (1)$ đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m+2)3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m$ vô nghiệm.

Câu 28: Đáp án D.

Với $x \neq 0$ hàm số luôn có đạo hàm.

Để hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải có đạo hàm tại $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = b \Rightarrow b = 1$.

Để hàm số liên tục tại $x = 0 \Rightarrow b = 1$.

Xét $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\dfrac{x^2 + x + 1}{x+1} - 1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 + ax + b - 1}{x} = a$.

$\Rightarrow a = 0$. Vậy $a = 0$, $b = 1$.

Câu 29: Đáp án C.

$f'(x) = -mx^2 + mx - (3 - m)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -mx^2 + mx - (3 - m) = 0 \quad (1)$.

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 5m^2 - 12m > 0 \\ \dfrac{3 - m}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{12}{5} < m < 3$.

Câu 30: Đáp án A.

Lập bảng dấu ta được: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & khi\, x < -1, x > 1 \\ x & khi -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$.

- Với $x < -1$ hoặc $x > 1 \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

- Với $-1 < x < 1 \Rightarrow f'(x) = 1$.

Ta có $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -1$ nên hàm số liên tục tại $x = -1$.

Xét $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = -1$, $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = 1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x = -1$.

Bằng cách tương tự ta cũng chỉ ra được hàm số không có đạo hàm tại $x = 1$.

Vậy $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & khi\, x < -1, x > 1 \\ x & khi -1 < x < 1 \end{cases}$.

Dạng 2: Đạo hàm các hàm số lượng giác

Câu 31: **Đáp án** **B.**

$y' = 2\sin x.\cos^2 x - \sin^3 x = \sin x\left(3\cos^2 x - 1\right)$.

Câu 32: **Đáp án** **C.**

$y' = (1+\tan x)(1+\tan x)' = (1+\tan x)\left(1+\tan^2 x\right)$.

Câu 33: **Đáp án** **B.**

$$y' = \frac{-\sin^3 x - 2\sin x.\cos x.\cos x}{2\sin^4 x} = -\frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{2\sin^3 x} = -\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}.$$

Câu 34: **Đáp án** **A.**

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{1-\sin x} \Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - f'\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{4}{3}$.

Câu 35: **Đáp án** **A.**

$$y' = \frac{x\sin x(\cos x + x\sin x) - x\cos x(\sin x - x\cos x)}{(\cos x + x\sin x)^2} = \frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2} \Rightarrow a = 1,\ b = 0,\ c = 0.$$

Vậy $T = a + b + c = 1$.

Câu 36: **Đáp án** **D.**

$y' = -2\sin 2x.\sin^2\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\sin x.\cos 2x$.

Câu 37: **Đáp án** **B.**

$$y' = 2\cot(\cos x)\left[\cot(\cos x)\right]' + \frac{\left(\sin x - \frac{\pi}{2}\right)'}{2\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}} = 2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}.$$

Câu 38: **Đáp án** **A.**

$$y' = \frac{x.\cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = (x.\cos x - \sin x)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

Câu 39: **Đáp án** **A.**

Ta có: $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^2 x}}$ nên $y' = \dfrac{-2\sin x.\cos x}{\sin^2 x.\sqrt{\sin^2 x}} = -\dfrac{\cot x}{|\sin x|}$.

Câu 40: **Đáp án C**

$$y' = -2\sin x.\cos x.\cos(\cos^2 x).\cos(\sin^2 x) - 2\sin x.\cos x.\sin(\cos^2 x).\sin(\sin^2 x)$$

$= -\sin(2x).\cos(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\sin(2x).\cos(\cos 2x)$

$\Rightarrow a = -1$.

Câu 41. **Đáp án B.**

Lấy đạo hàm 2 vế ta có: $2f'(2x) - 4\sin x.f(x) + 4\cos x.f'(x) - 2$

Thay $x = 0 \Rightarrow 2 \cdot f'(0) = 4 \cdot f'(0) - 2 \Leftrightarrow f'(0) = 1$.

Câu 42. **Đáp án B.**

$$f'(x) = \frac{-\sin x.\sqrt{\cos 2x} - \cos x \dfrac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(-\sin 2x)}{\cos 2x} = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos 2x}}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in Z$.

Ta biểu diễn được 2 điểm phân biệt trên đường tròn lượng giác.

Câu 43. **Đáp án A.**

$y' = -2(1 + \cot^2 2x)$. Do đó: $y' + 2y^2 + 2 = -2(1 + \cot^2 2x) + 2\cot^2 2x + 2 = 0$

Câu 44. **Đáp án C.**

Ta có: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left(x^n \cdot \sin\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0}\left(x^{n-1} \cdot \sin\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0\ (1)$

Với $n = 1$ thì giới hạn (1) không tồn tại và $n \geq 2$ thì: $\lim\limits_{x \to 0}\left(x^{n-1} \cdot \sin\frac{1}{x}\right) = 0$.

Vậy hàm số có đạo hàm trên R khi $n \geq 2$.

Câu 45. **Đáp án D.**

$f'(x) = 2\sin x.\cos x + 2\cos 2x = \sin 2x + 2\cos 2x$

Đặt $t = \sin 2x + 2\cos x$.

Điều kiện phương trình có nghiệm là: $1^2 + 2^2 \geq t^2 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq t \leq \sqrt{5}$.

Vậy $M = \sqrt{5}, m = -\sqrt{5}$.

Câu 46. **Đáp án C.**

$f'(x) = \sin x + \cos x + 2\sin 2x$

$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin 2x = 1$

Đặt $t = \sin x + \cos x \quad \left(|t| \leq \sqrt{2}\right) \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{3}{2} \quad (l) \end{array}\right.$

Với $t = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in Z)$.

Nghiệm trên cũng là nghiệm của phương trình $(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$.

Câu 47. **Đáp án B.**

$f'(x) = -2\sin 2x \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 2$

Vậy tập giá trị của hàm số $f'(x)$ là $[-2; 2]$.

Câu 48. **Đáp án B.**

$f'(x)=2\sin^3 x-3\cos^3 x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \tan^3 x=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \tan x=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

Vậy có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 49. **Đáp án D.**

$y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x \Rightarrow y'=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin^2 x$

Câu 50. **Đáp án C.**

$y=\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow y'=0\ \forall x$.

Câu 51. **Đáp án C.**

$y=\sin x-\cos x \Rightarrow y'=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$

Câu 52. **Đáp án C.**

$f(x)=\sqrt[3]{\cos 2x} \Rightarrow f^3(x)=\cos 2x \Rightarrow 3.f^2(x).f'(x)=(\cos 2x)' \Rightarrow f'(x)=\frac{-2\sin 2x}{3\sqrt[3]{\cos^2 2x}}$

Nên **B** đúng. Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt[3]{\cos\pi}=-1$ nên **C** sai.

Câu 53. **Đáp án D.**

Ta có: $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}=\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}}=\cos\frac{x}{2}$

Tương tự ta có biểu thức tiếp theo: $y=\sqrt{\cos^2\frac{x}{8}}=\cos\frac{x}{8} \Rightarrow y'=-\frac{1}{8}\sin\frac{x}{8}$

Câu 54. **Đáp án C.**

$$f'(x)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)-\sin\left(\frac{4\pi}{3}+2x\right)-2\sin 2x$$

$$=-2\cos\frac{2\pi}{3}.\sin 2x-2\cos\frac{4\pi}{3}.\sin 2x-2\sin 2x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right)2\sin 2x=0$$