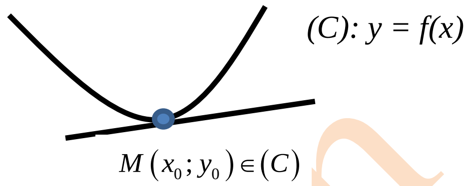
TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C); $M(x_0; y_0) \in (C)$

- Phương trình tiếp tuyến của (C) **tại** điểm $M(x_0; y_0)$ là

  $d:\ y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$



- Trong đó:
  - $M(x_0; y_0)$ gọi là tọa độ của **tiếp điểm**.
  - $k = f'(x_0)$ là **hệ số góc** của tiếp tuyến.

2. Ghi nhớ:

- Đường thẳng d: $y = \boxed{a}x + b\ (a \neq 0)$ thì có hệ số góc là $k = a$.
- Cho đường thẳng $d: y = ax + b(a \neq 0)$; $d': y = a'x + b'(a' \neq 0)$. Khi đó:
  - $d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} k_d = k_{d'} \\ b \neq b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$.
  - $d \perp d' \Leftrightarrow k_d.k_{d'} = -1 \Leftrightarrow a.a' = -1$.
- Nếu tiếp tuyến *song song* với đường thẳng $y = ax + b(a \neq 0)$ thì *hệ số góc* của tiếp tuyến là $k = a$.***(nhớ thử lại)***.
- Nếu tiếp tuyến *vuông góc* với đường thẳng $y = ax + b(a \neq 0)$ thì *hệ số góc* của tiếp tuyến là $k = -\dfrac{1}{a}$.
- Trục hoành (trục Ox): $y = 0$.
- Trục tung (trục Oy): $x = 0$.

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

Bài toán 1: Các dạng phương trình tiếp tuyến thường gặp.

Cho hàm số $y = f(x)$, gọi đồ thị của hàm số là (C).

Dạng 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ tại $M(x_o; y_o)$.

<u>Phương pháp</u>

- **Bước 1.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$ hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(x_0)$.
- **Bước 2**. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng:

$$\boxed{d: y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0}.$$

Chú ý:

- Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 thì khi đó ta tìm y_0 bằng cách thế vào hàm số ban đầu, tức $y_0 = f(x_0)$. Nếu đề cho y_0 ta thay vào hàm số để giải ra x_0.
- Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại các giao điểm của đồ thị $(C): y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = ax + b$. Khi đó các hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C).

☞ **Sử dụng máy tính:**

Phương trình tiếp tuyến cần tìm có dạng $d: y = ax + b$.

- **Bước 1:** Tìm hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(x_0)$. Nhập $\boxed{\frac{d}{dx}(f(x))\big|_{x=x_0}}$ bằng cách nhấn $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{\int_{\square}^{\square}\square}$ sau đó nhấn $\boxed{=}$ ta được a.
- **Bước 2:** Sau đó nhân với $\boxed{-X}$ tiếp tục nhấn phím $\boxed{+}$ $\boxed{f(x)}$ $\boxed{CALC}$ $X = x_o$ nhấn phím $\boxed{=}$ ta được b.

<u>**Ví dụ minh họa:**</u>

Ví dụ 1. Cho hàm số $(C): y = x^3 + 3x^2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;4)$ là:

A. $y = 9x - 5$. B. $y = 9x + 5$. C. $y = -9x - 5$. D. $y = -9x + 5$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow k = y'(1) = 9$. Phương trình tiếp tuyến tại $M(1;2)$ là:

$d: y = y'(x_0)(x - x_o) + y_o \Leftrightarrow y = 9(x-1) + 4 \Leftrightarrow y = 9x - 5$.

☞ ***Sử dụng máy tính:***

- Nhập $\boxed{\frac{d}{dx}(X^3 + 3X^2)\big|_{x=1}}$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được 9.
- Sau đó nhân với $(\boxed{-X})$ nhấn dấu $\boxed{+}$ $\boxed{X^3 + 3X^2}$ $\boxed{CALC}$ $X = 1$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được -5.

Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là: $y = 9x - 5$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M thuộc (C) và có hoành độ bằng 3.

A. $y = -18x + 49$. B. $y = -18x - 49$. C. $y = 18x + 49$. D. $y = 18x - 49$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = -6x^2 + 12x$

$$x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -5 \Rightarrow M(3;-5) \Rightarrow k = y'(3) = -18.$$

Phương trình tiếp tuyến tại M là: $y = -18(x-3) - 5 \Rightarrow y = -18x + 49$.

☞ ***Sử dụng máy tính:***

- Nhập $\boxed{\frac{d}{dx}\left(-2X^3+6X^2-5\right)\Big|_{x=3}}$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được -18.
- Sau đó nhân với $\left(\boxed{-X}\right)$ nhấn dấu $\boxed{+}$ $\boxed{-2X^3+6X^2-5}$ $\boxed{CALC}$ $X=3$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được 49.

Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là: $y=-18x+49$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $(C): y=\frac{1}{4}x^4-2x^2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ $x_0>0$, biết $y''(x_o)=-1$ là:

A. $y=-3x+\frac{5}{4}$. B. $y=-3x+1$. C. $y=-3x-2$. D. $y=-3x+\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=x^3-4x$, $y''=3x^2-4$.

Mà $y''(x_o)=-1 \Rightarrow 3{x_0}^2-4=-1 \Leftrightarrow {x_0}^2=1 \Leftrightarrow x_0=1$ (vì $x_0>0$).

$\Rightarrow y_0=-\frac{7}{4} \Rightarrow k=y'(1)=-3$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là: $d: y=-3(x-1)-\frac{7}{4} \Rightarrow y=-3x+\frac{5}{4}$.

☞ ***Sử dụng máy tính:***

- Nhập $\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}X^4-2X^2\right)\Big|_{x=1}}$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được -3.
- Sau đó nhân với $\left(\boxed{-X}\right)$ nhấn dấu $\boxed{+}$ $\boxed{\frac{1}{4}X^4-2X^2}$ $\boxed{CALC}$ $X=1$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được $\frac{5}{4}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $d: y=-3x+\frac{5}{4}$.

Dạng 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y=f(x)$ có hệ số góc k cho trước.

Phương pháp

- **Bước 1.** Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm và tính $y'=f'(x)$.
- **Bước 2.** Hệ số góc tiếp tuyến là $k=f'(x_0)$. Giải phương trình này tìm được x_0, thay vào hàm số được y_0.
- **Bước 3.** Với mỗi tiếp điểm ta tìm được các tiếp tuyến tương ứng.

$$\boxed{d: y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0}$$

Chú ý: Đề bài thường cho hệ số góc tiếp tuyến dưới các dạng sau:

- Tiếp tuyến $d\,//\,\Delta: y=ax+b \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k=a$.
- Tiếp tuyến $d\perp\Delta: y=ax+b \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k=-\frac{1}{a}\cdot$
- Tiếp tuyến tạo với trục hoành một góc α thì hệ số góc của tiếp tuyến d là $k=\pm\tan\alpha$.

☞ **Sử dụng máy tính:**

Nhập: $k(-X)+f(x)$ $\boxed{CALC}$ $X=x_0$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được b. Phương trình tiếp tuyến là $d: y=kx+b$.

<u>Ví dụ minh họa:</u>

Ví dụ 1. Cho hàm số $(C): y=x^3-3x+2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng 9 là:

A. $\left[\begin{array}{l} y=9x-14 \\ y=9x+18 \end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l} y=9x+15 \\ y=9x-11 \end{array}\right.$. C. $\left[\begin{array}{l} y=9x-1 \\ y=9x+4 \end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l} y=9x+8 \\ y=9x+5 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=3x^2-3$, $k=y'(x_0)=9 \Leftrightarrow 3{x_0}^2-3=9 \Leftrightarrow {x_0}^2=4 \Leftrightarrow x_0=\pm 2$.

+ Với $x_0=2 \Rightarrow y_0=4$ ta có tiếp điểm $M(2;4)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là: $y=9(x-2)+4 \Rightarrow y=9x-14$.

+ Với $x_0=-2 \Rightarrow y_0=0$ ta có tiếp điểm $N(-2;0)$.

Phương trình tiếp tuyến tại N là: $y=9(x+2)+0 \Rightarrow y=9x+18$.

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là $y=9x-14$ và $y=9x+18$.

☞ **Sử dụng máy tính:**

+ Với $x_0=2$ ta nhập $9(-X)+X^3-3X^2+2$ $\boxed{CALC}$ $X=2$ nhấn dấu $\boxed{=}$

ta được $-14 \Rightarrow y=9x-14$.

+ Với $x_0=-2$ ta nhập $9(-X)+X^3-3X^2+2$ $\boxed{CALC}$ $X=-2$ nhấn dấu $\boxed{=}$

ta được $18 \Rightarrow y=9x+18$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $(C): y=\frac{2x+1}{x+2}\cdot$ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng có phương trình $\Delta: 3x-y+2=0$.

A. $y=3x+14$. B. $y=3x-2$. C. $y=3x+5$. D. $y=3x-8$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}$, $\Delta: 3x-y+2=0 \Rightarrow y=3x+2$. Do tiếp tuyến song song với đường thẳng Δ

nên $k=\dfrac{3}{(x_0+2)^2}=3 \Leftrightarrow (x_0+2)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0+2=1 \\ x_0+2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=-3 \end{array}\right.$.

+ Với $x_0=-1$ nhập $3(-X)+\dfrac{2X+1}{X+2}$ $\boxed{CALC}$ $X=-1$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được 2

$\Rightarrow d_1: y=3x+2$ (loại do trùng với Δ).

+ Với $x_0=-3$ $\boxed{CALC}$ $X=-3$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được 14 $\Rightarrow d: y=3x+14$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $d: y=3x+14$.

$\boxed{\text{Dạng 3.}}$ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y=f(x)$ biết tiếp tuyến đi qua $A(x_A; y_A)$.

<u>Phương pháp</u>

Cách 1.

- **Bước 1:** Phương trình tiếp tuyến đi qua $A(x_A; y_A)$ hệ số góc k có dạng:

$$d: y=k(x-x_A)+y_A \quad (*)$$

- **Bước 2:** d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x)=k(x-x_A)+y_A \\ f'(x)=k \end{cases}.$$

- **Bước 3:** Giải hệ này tìm được x suy ra k và thế vào phương trình $(*)$, ta được tiếp tuyến cần tìm.

Cách 2.

- **Bước 1.** Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm và tính hệ số góc tiếp tuyến $k=y'(x_0)=f'(x_0)$ theo x_0.
- **Bước 2**. Phương trình tiếp tuyến có dạng: $d: y=y'(x_0).(x-x_0)+y_0$ $(**)$

  Do điểm $A(x_A; y_A)\in d$ nên $y_A=y'(x_0).(x_A-x_0)+y_0$ giải phương trình này sẽ tìm được x_0.
- **Bước 3**. Thế x_0 vào $(**)$ ta được tiếp tuyến cần tìm.

Chú ý: Đối với dạng viết phương trình tiếp tuyến đi qua điểm việc tính toán tương đối mất thời gian. Ta có thể sử dụng máy tính thay các đáp án:

Cho $f(x)$ bằng kết quả các đáp án. Vào $\boxed{MODE} \to \boxed{5} \to \boxed{4}$ nhập hệ số phương trình. *Thông thường máy tính cho số nghiệm thực nhỏ hơn số bậc của phương trình là 1 thì ta chọn đáp án đó.*

Ví dụ minh họa:

Ví dụ. Cho hàm số $(C): y=-4x^3+3x+1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1;2)$.

A. $\left[\begin{array}{l} y=-9x-7 \\ y=2 \end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l} y=4x+2 \\ y=x+1 \end{array}\right.$. C. $\left[\begin{array}{l} y=x-7 \\ y=3x-5 \end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l} y=-x-5 \\ y=2x-2 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=-12x^2+3$.

+ Gọi d là phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua $A(-1;2)$ với hệ số góc k có phương trình là: $d: y=k(x+1)+2$.

+ d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} -4x^3+3x+1=k(x+1)+2 & (1) \\ -12x^2+3 \quad =k & (2) \end{cases}$$

Thay k từ (2) vào (1) ta được $-4x^3+3x+1=(-12x^2+3)(x+1)+2$

$$\Leftrightarrow 8x^3+12x^2-4=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

+ Với $x=-1 \Rightarrow k=-9$. Phương trình tiếp tuyến là: $y=-9x+7$.

+ Với $x=\frac{1}{2} \Rightarrow k=0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y=2$.

Dạng 4. **Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị hàm số $(C_1): y=f(x)$ và $(C_2): y=g(x)$.**

Phương pháp

- **Bước 1.** Gọi d tiếp tuyến chung của $(C_1),(C_2)$ và x_0 là hoành độ tiếp điểm của d và (C_1) thì phương trình d có dạng:

$$y=f'(x_0).(x-x_0)+f(x_0) \quad (***)$$

- **Bước 2**. Dùng điều kiện tiếp xúc của d và (C_2), tìm được x_0.
- **Bước 3**. Thế x_0 vào $(***)$ ta được tiếp tuyến cần tìm.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ. Cho hai hàm số:

$$(C_1): y=f(x)=2\sqrt{x},\ x>0 \text{ và } (C_2): y=g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{8-x^2},\ -\sqrt{8}<x<\sqrt{8}.$$

Phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị hàm số là:

A. $y=\frac{1}{2}x+2.$ B. $y=\frac{1}{2}x-1.$ C. $y=\frac{1}{2}x+5.$ D. $y=\frac{1}{2}x-3.$

Hướng dẫn giải

\+ Gọi d là phương trình tiếp tuyến chung của $(C_1),(C_2)$ và x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (C_1) thì phương trình d là:

$$y=f'(x)(x-x_0)+y_0=\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+2\sqrt{x_0}$$

\+ d tiếp xúc với (C_2) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm: $\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{8-x^2}=\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\sqrt{x_0} & (1)\\ \frac{-x}{2\sqrt{8-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{x_0}} & (2)\end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được phương trình hoành độ tiếp điểm của d và (C_2).

$$\frac{1}{2}\sqrt{8-x^2}=-\frac{x^2}{2\sqrt{8-x^2}}-\frac{2\sqrt{8-x^2}}{x}\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{8}<x<\sqrt{8}\\ x\neq 0\\ x(8-x^2)=-x^3-4(8-x^2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{8}<x<\sqrt{8}\\ x\neq 0\\ x^2-2x-8=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-2.$$

Thay $x=-2$ vào (2) ta được $\frac{1}{\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_0=4.$

Vậy phương trình tiếp tuyến chung cần tìm là: $y=\frac{1}{2}x+2$.

Bài toán 2: Một số công thức nhanh và tính chất cần biết.

Bài toán 2.1: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0,\ x\neq -\dfrac{d}{c}\right)$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến Δ tại M thuộc (C) và I là giao điểm 2 đường tiệm cận. Ta luôn có:

(I). Nếu $\Delta\perp IM$ thì chỉ tồn tại 2 điểm M thuộc 2 nhánh của đồ thị (C) đối xứng qua I và $x_M=\dfrac{\pm\sqrt{|ad-bc|}-d}{c}$.

(II). M luôn là trung điểm của AB (với A, B là giao điểm của Δ với 2 tiệm cận).

(III). Diện tích tam giác IAB không đổi với mọi điểm M và $S_{\Delta IAB}=2\dfrac{|bc-ad|}{c^2}$.

(IV). Nếu E, F thuộc 2 nhánh của đồ thị (C) và E, F đối xứng qua I thì tiếp tuyến tại E, F song song với nhau. (suy ra một đường thẳng d đi qua E, F thì đi qua tâm I).

Chứng minh:

- Ta có: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$; $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ là giao điểm của 2 tiệm cận.
- Gọi $M\left(x_M;\dfrac{a\,x_M+b}{cx_M+d}\right)\in(C)\left(x_M\neq -\dfrac{d}{c}\right)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$\Delta: y=\frac{ad-bc}{(c\,x_M+d)^2}(x-x_M)+\frac{ax_M+b}{cx_M+d}.$$

Chứng minh (I):

- $\overrightarrow{IM}\left(x_M+\dfrac{d}{c};\dfrac{bc-ad}{c(cx_M+d)}\right)$; $\vec{u}_\Delta\left(1;\dfrac{ad-bc}{(cx_M+d)^2}\right)$
- $\Delta\perp IM\Rightarrow \overrightarrow{IM}.\vec{u}_\Delta=0\Leftrightarrow x_M+\dfrac{d}{c}+\dfrac{bc-ad}{c(cx_M+d)}.\dfrac{ad-bc}{(cx_M+d)^2}=0$

$$\Leftrightarrow\frac{(cx_M+d)^4-(ad-bc)^2}{c(cx_M+d)^3}=0\Leftrightarrow x_M=\frac{\pm\sqrt{|ad-bc|}-d}{c}.$$

- *Cách nhớ:* $\underbrace{cx_M+d}_{\text{mẫu số của hàm số}}=\pm\underbrace{\sqrt{|ad-bc|}}_{\text{tử số của đạo hàm}}$

Chứng minh (II):

- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là: $A\left(2x_M+\dfrac{d}{c};\ \dfrac{a}{c}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là: $B\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{ac\,x_M+2bc-ad}{c(c\,x_M+d)}\right)$.

- Xét $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M + \dfrac{d}{c} - \dfrac{d}{c} = 2x_M \\ y_A + y_B = \dfrac{a}{c} + \dfrac{ac\,x_M + 2bc - ad}{c(c\,x_M + d)} = 2.\dfrac{ax_M + b}{cx_M + d} = 2y_M \end{cases}$.
- Vậy M luôn là trung điểm của AB.

Chứng minh (III):

- $\overrightarrow{IA}\left(\dfrac{2(cx_M + d)}{c};\ c\right)$ và $\overrightarrow{IB}\left(0;\ \dfrac{2(bc - ad)}{c(c\,x_M + d)}\right)$.
- ΔIAB vuông tại I

$$\Rightarrow S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{IA}\right|.\left|\overrightarrow{IB}\right| = \frac{1}{2}.\left|\frac{2(cx_M + d)}{c}\right|.\left|\frac{2(bc - ad)}{c(c\,x_M + d)}\right| = 2\frac{|bc - ad|}{c^2} = \text{hằng số.}$$

- Vậy diện tích ΔIAB không đổi với mọi điểm M.

Chứng minh (IV):

- Gọi $E\left(x_E; \dfrac{a\,x_E + b}{cx_E + d}\right) \in (C)\left(x_E \neq -\dfrac{d}{c}\right) \Rightarrow F\left(-\dfrac{2d}{c} - x_E;\ \dfrac{2a}{c} - \dfrac{ax_E + b}{cx_E + d}\right)$

  (E, F đối xứng qua I).
- Phương trình tiếp tuyến tại E có hệ số góc: $k_E = \dfrac{ad - bc}{(cx_E + d)^2}$ (1).
- Phương trình tiếp tuyến tại F có hệ số góc:

$$k_F = \frac{ad - bc}{\left[c\left(-\dfrac{2d}{c} - x_E\right) + d\right]^2} = \frac{ad - bc}{(-2d - cx_E + d)^2} = \frac{ad - bc}{(-d - cx_E)^2} = \frac{ad - bc}{(cx_E + d)^2}\ (2).$$

- Từ (1, 2) suy ra $k_E = k_F$.

Bài toán 2.2: Cho hàm số: $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ có đồ thị là (C), $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$.Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ trên (C), biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $OA = n.OB$.

Khi đó x_0 thoả: $cx_0 + d = \pm\sqrt{n.|ad - bc|}$.

Hướng dẫn giải:

- Xét hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$. Ta có $y' = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)\in(C)$ là điểm cần tìm. Gọi Δ tiếp tuyến với (C) tại M ta có phương trình. $\Delta: y=f^{'}(x_0)(x-x_0)+\dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}\Rightarrow y=\dfrac{ad-bc}{(cx_0+d)^2}(x-x_0)+\dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}$.

- Gọi $A=\Delta\cap Ox\Rightarrow A\left(-\dfrac{acx_0^2+2bcx_0+bd}{ad-bc};0\right)$.

  $B=\Delta\cap Oy\Rightarrow B\left(0;\dfrac{acx_0^2+2bcx_0+bd}{(cx_0+d)^2}\right)$.

- Ta có $OA=\left|\dfrac{acx_0^2+2bcx_0+bd}{ad-bc}\right|=\dfrac{\left|acx_0^2+2bcx_0+bd\right|}{|ad-bc|}$

  $OB=\left|\dfrac{acx_0^2+2bcx_0+bd}{(cx_0+d)^2}\right|=\dfrac{\left|acx_0^2+2bcx_0+bd\right|}{(cx_0+d)^2}$

  (vì A,B không trùng O nên $acx_0^2+2bcx_0+bd\neq 0$).

- Ta có

  $OA=n.OB\Leftrightarrow\dfrac{\left|acx_0^2+2bcx_0+bd\right|}{|ad-bc|}=n.\dfrac{\left|acx_0^2+2bcx_0+bd\right|}{(cx_0+d)^2}$

  $\Leftrightarrow\dfrac{1}{|ad-bc|}=n.\dfrac{1}{(cx_0+d)^2}\Leftrightarrow(cx_0+d)^2=n.|ad-bc|\Leftrightarrow cx_0+d=\pm\sqrt{n.|ad-bc|}$.

Các em bắt đầu theo dõi phần trắc nghiệm ở dưới nhé. Bắt đầu làm từ bài dễ đến bài khó.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

I. NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 1. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại điểm $A(3;1)$ là

A. $y=9x-26$. B. $y=-9x-26$. C. $y=-9x-3$. D. $y=9x-2$.

Hướng dẫn giải: Tính $y'=3x^2-6x\Rightarrow y'(3)=9\Rightarrow pttt: y=9x-26$.

Câu 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2+1$ tại điểm $B(1;-2)$ là

A. $y=-4x+2$. B. $y=4x+2$. C. $y=-4x+6$. D. $y=4x+6$.

Hướng dẫn giải: Tính $y'=4x^3-8x\Rightarrow y'(1)=-4\Rightarrow pttt: y=-4x+2$.

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ tại điểm $C(-2;3)$ là

A. $y=2x+7$. B. $y=-2x+7$. C. $y=2x+1$. D. $y=-2x-1$.

Hướng dẫn giải: Tính $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}\Rightarrow y'(-2)=2\Rightarrow pttt: y=2x+7$.

Câu 4. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x-2$ tại điểm D có hoành độ bằng 2 có phương trình là

A. $y=-9x+14$. B. $y=9x+14$. C. $y=-9x+22$. D. $y=9x+22$.

Hướng dẫn giải:

Tính $y_0=y(2)=-4$ và $y'=-3x^2+3\Rightarrow y'(2)=-9\Rightarrow pttt: y=-9x+14$.

Câu 5. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^4+8x^2$ tại điểm E có hoành độ bằng -3 có phương trình là

A. $y=60x+171$. B. $y=-60x+171$.

C. $y=60x+189$. **D.** $y=-60x+189$.

Hướng dẫn giải:

Tính $y_0=y(-3)=-9$ và $y'=-4x^3+16x\Rightarrow y'(-3)=60\Rightarrow pttt: y=60x+171$.

Câu 6. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ tại điểm F có hoành độ bằng 2 có phương trình là

A. $y=-x+5$ B. $y=x+5$. C. $y=-x-1$. D. $y=x-1$.

Hướng dẫn giải: Tính $y_0=y(2)=3$ và $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}\Rightarrow y'(2)=-1\Rightarrow pttt: y=-x+5$.

Câu 7. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2x^3+3x^2$ tại điểm G có tung độ bằng 5 có phương trình là

A. $y=12x-7$. B. $y=-12x-7$. C. $y=12x+17$. D. $y=-12x+17$.

Hướng dẫn giải: Giải pt:

$2x_0^3+3x_0^2=5\Leftrightarrow x_0=1$ và $y'=6x^2+6x\Rightarrow y'(1)=12\Rightarrow pttt: y=12x-7$.

Câu 8. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$ tại điểm H có tung độ bằng 21 có phương trình là

A. $\left[\begin{array}{l} y = 40x - 59 \\ y = -40x - 101 \end{array}\right.$.
B. $\left[\begin{array}{l} y = 40x - 101 \\ y = -40x - 59 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y = 40x + 59 \\ y = -40x + 101 \end{array}\right.$.
D. $\left[\begin{array}{l} y = -40x - 59 \\ y = 40x + 101 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải: Giải pt:

$x_0^4 + 2x_0^2 - 3 = 21 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$ và $y' = 4x^3 + 4x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y'(2) = 40 \\ y'(-2) = -40 \end{array}\right. \Rightarrow pttt: \left[\begin{array}{l} y = 40x - 59 \\ y = -40x - 101 \end{array}\right.$.

Câu 9. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x-1}$ tại điểm I có tung độ bằng 1 có phương trình là

A. $y = -\frac{1}{5}x + \frac{8}{5}$.
B. $y = -\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$.
C. $y = \frac{1}{5}x + \frac{8}{5}$.
D. $y = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải: Giải pt:

$\dfrac{x_0+2}{2x_0-1} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 3$ và $y' = \dfrac{-5}{(2x-1)^2} \Rightarrow y'(3) = \dfrac{-1}{5} \Rightarrow pttt: y = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{8}{5}$.

Câu 10. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$ có hệ số góc bằng k = -3 có phương trình là

A. $y = -3x - 1$.
B. $y = -3x + 7$.
C. $y = -3x + 1$.
D. $y = -3x - 7$.

Hướng dẫn giải: Giải pt:

$y'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y(1) = -4 \Rightarrow pttt: y = -3x - 1$.

Câu 11. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -\dfrac{1}{4}x^4 + 2x^2$ có hệ số góc bằng $k = -48$ có phương trình là

A. $y = -48x + 160$.
B. $y = -48x + 192$.
C. $y = -48x - 160$.
D. $y = -48x - 192$.

Hướng dẫn giải:

pt: $y'(x_0) = -48 \Leftrightarrow -x_0^3 + 4x_0 + 48 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 4 \Rightarrow y(4) = -32 \Rightarrow pttt: y = -48x + 160$.

Câu 12. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{1-x}$ biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 4.

A. $\left[\begin{array}{l} y=4x+3 \\ y=4x-13 \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} y=4x-3 \\ y=4x-13 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y=4x+3 \\ y=4x+13 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} y=4x-3 \\ y=4x+13 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải:

Giải pt: $y'(x_0)=4 \Leftrightarrow \dfrac{4}{(1-x_0)^2}=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \Rightarrow y(0)=3 \Rightarrow pttt: y=4x+3 \\ x_0=2 \Rightarrow y(2)=-5 \Rightarrow pttt: y=4x-13 \end{array}\right.$.

Câu 13. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y=-x^3+2x^2$ mà song song với đường thẳng $y=x$?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải: Giải pt:

$$y'(x_0)=1 \Leftrightarrow -3x_0^2+4x_0-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \Rightarrow y(1)=1 \Rightarrow pttt: y=x \text{ (trùng)} \\ x_0=\dfrac{1}{3} \Rightarrow y\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{27} \Rightarrow pttt: y=x-\dfrac{4}{27} \end{array}\right..$$

Câu 14. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=-36x+5$ của đồ thị hàm số $y=x^4+x^2-2$ có phương trình là

A. $y=-36x-54$. B. $y=-36x+54$. C. $y=-36x-90$. D. $y=-36x+90$.

Hướng dẫn giải:

pt: $y'(x_0)=-36 \Leftrightarrow 4x_0^3+2x_0+36=0 \Leftrightarrow x_0=-2 \Rightarrow y(-2)=18 \Rightarrow pttt: y=-36x-54$.

Câu 15. Cho hàm $y=\dfrac{-x+5}{x+2}$ có đồ thị là *(C)*. Viết phương trình tiếp tuyến của *(C)* sao cho tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $d: y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{5}{7}$

A. $y=-\dfrac{1}{7}x-\dfrac{23}{7}$.

B. $\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{5}{7} \\ y=-\dfrac{1}{7}x-\dfrac{23}{7} \end{array}\right.$.

C. $y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{23}{7}$.

D. $\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{7}x+-\dfrac{5}{7} \\ y=-\dfrac{1}{7}x+\dfrac{23}{7} \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải:

$$pt\text{: } y'(x_0) = -\frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{-7}{(x_0+2)^2} = \frac{-1}{7} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 5 \Rightarrow y(5) = 0 \Rightarrow pttt: y = -\frac{1}{7}x + \frac{5}{7}\ (\text{trùng}) \\ x_0 = -9 \Rightarrow y(-9) = -2 \Rightarrow pttt: y = -\frac{1}{7}x - \frac{23}{7} \end{array}\right.$$

Câu 16. Cho hàm $y = 2x^3 - 3x - 1$ có đồ thị là *(C)*. Tiếp tuyến của đồ thị *(C)* và vuông góc với đường thẳng $x + 21y - 2 = 0$ có phương trình là

A. $\left[\begin{array}{l} y = 21x - 33 \\ y = 21x + 31 \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} y = -21x - 33 \\ y = -21x + 31 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{21}x - 33 \\ y = \frac{1}{21}x + 31 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} y = \frac{-1}{21}x - 33 \\ y = \frac{-1}{21}x + 31 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải: Giải pt:

$$y'(x_0) = 21 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \Rightarrow y(2) = 9 \quad \Rightarrow pttt: y = 21x - 33 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y(-2) = -11 \Rightarrow pttt: y = 21x + 31 \end{array}\right.$$

Câu 17. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ và vuông góc với đường thẳng $x - 8y + 2017 = 0$ có phương trình là

A. $y = -8x + 8$.   B. $y = 8x + 8$.   C. $y = -\frac{1}{8}x + 8$.   D. $y = \frac{1}{8}x - 8$.

Hướng dẫn giải: *giải pt:* $y'(x_0) = -8 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y(1) = 0 \Rightarrow pttt: y = -8x + 8$.

Câu 18. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-2}{x+2}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng y = - 6x +1 là

A. $\left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{6}x - 1 \end{array}\right.$.   B. $y = \frac{1}{6}x - 1$.   C. $\left[\begin{array}{l} y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{6}x - 1 \end{array}\right.$.   D. $y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải: *giải pt:*

$$y'(x_0) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 4 \Rightarrow y(4) = 1 \quad \Rightarrow pttt: y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3} \\ x_0 = -8 \Rightarrow y(-8) = 3 \quad \Rightarrow pttt: y = \frac{1}{6}x - \frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Câu 19. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2$ tại giao điểm với trục *Ox* ?

A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Hướng dẫn giải: Ta giải phương trình

$$x^4-4x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0 & \Rightarrow y'(0)=0\Rightarrow pttt:\ y=0\\ x=2 & \Rightarrow y'(2)=16\Rightarrow pttt:\ y=16x-32\\ x=-2 & \Rightarrow y'(-2)=-16\Rightarrow pttt:\ y=-16x-32\end{array}\right..$$

Câu 20. Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị *(C)*. Tiếp tuyến của đồ thị *(C)* tại giao điểm của *(C)* với trục hoành có phương trình là

A. $\left[\begin{array}{l}y=0\\ y=-9x-18\end{array}\right.$. B. $y=-9x-18$. C. $y=-9x+18$. D. $\left[\begin{array}{l}y=0\\ y=-9x+18\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải: Ta giải phương trình

$$-x^3+3x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=1 & \Rightarrow y'(1)=0\quad \Rightarrow pttt:\ y=0\\ x=-2 & \Rightarrow y'(-2)=-9\Rightarrow pttt:\ y=-9x-18\end{array}\right..$$

Câu 21. Gọi *(d)* là tiếp tuyến của đồ thị *(C)* của hàm số $y=\dfrac{x-5}{-x+1}$ tại giao điểm *A* của *(C)* và trục hoành. Khi đó, phương trình của đường thẳng *(d)* là

A. $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$. B. $y=-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$. C. $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$. D. $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải: Ta giải phương trình

$$\frac{x-5}{-x+1}=0\Leftrightarrow x=5\ \Rightarrow y'(5)=-\frac{1}{4}\Rightarrow pttt:\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}.$$

Câu 22. Tại giao điểm của đồ thị *(C)* của hàm số $y=2x^3-6x+1$ và trục *Oy* ta lập được tiếp tuyến có phương trình là

A. $y=-6x+1$. B. $y=-6x-1$. C. $y=6x+1$. D. $y=6x-1$.

Hướng dẫn giải:

Ta có giao điểm của *(C)* và *Oy* là: $A(0;1)\Rightarrow y'(0)=-6\Rightarrow pttt:\ y=-6x+1$.

Câu 23. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị *(C)* của hàm số $y=-\dfrac{1}{4}x^4+3x^2-2$ tại điểm *M* là giao của *(C)* và trục tung là

A. $y=-2$. B. $y=2$. C. $\left[\begin{array}{l}y=-2\\ y=2\end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l}y=-2\\ y=0\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải:

Ta có giao điểm của (C) và Oy là: $M(0;-2) \Rightarrow y'(0)=0 \Rightarrow pttt:\ y=-2$.

Câu 24. Gọi *(d)* là tiếp tuyến của đồ thị *(C)* của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$ tại giao điểm *A* của *(C)* và trục tung. Khi đó, phương trình của đường thẳng *(d)* là

A. $y=-\dfrac{7}{9}x-\dfrac{1}{3}$. B. $y=-\dfrac{7}{9}x+\dfrac{1}{3}$. C. $y=\dfrac{7}{9}x-\dfrac{1}{3}$. D. $y=\dfrac{7}{9}x+\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có giao điểm của (C) và Oy là: $A\left(0;-\dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow y'(0)=-\dfrac{7}{9} \Rightarrow pttt:\ y=-\dfrac{7}{9}x-\dfrac{1}{3}$.

Câu 25. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ song song với đường thẳng $y=3x+2016$ là

A. $\left[\begin{array}{l} y=3x-\dfrac{2}{3} \\ y=3x-8 \end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l} y=3x-\dfrac{2}{3} \\ y=3x+8 \end{array}\right.$. C. $\left[\begin{array}{l} y=3x-8 \\ y=3x+\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l} y=3x+\dfrac{2}{3} \\ y=3x+8 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải: Ta giải pt: $y'(x_0)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_0=1 \Rightarrow y(1)=\dfrac{7}{3} & \Rightarrow pttt: y=3x-\dfrac{2}{3} \\ x_0=3 \Rightarrow y(3)=1 & \Rightarrow pttt: y=3x-8 \end{array}\right.$.

Câu 26. Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x-5$ là

A. Song song với trục hoành. B. Song song với đường thẳng $x=1$.

C. Có hệ số góc dương. D. Có hệ số góc bằng -1.

Hướng dẫn giải:

Ta giải pt: $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \Rightarrow y(1)=\dfrac{-11}{3} \\ x_0=3 \Rightarrow y(3)=-5 \Rightarrow y'(3)=0 \Rightarrow tt\ song\ song\ Ox \end{array}\right.$.

Câu 27. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ tại điểm có tung độ bằng 3 là

A. $x+2y-9=0$. B. $x+y-8=0$.

C. $2x-y-9=0$. D. $x-2y-7=0$.

Hướng dẫn giải:

Theo giả thiết ta có: $y_0 = 3 \Rightarrow x_0 = 3$ và $y'(3) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow pttt: x + 2y - 9 = 0$.

Câu 28. Cho đường cong $(C): y = x^3 - 3x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm thuộc (C) và có hoành độ $x_0 = -1$.

A. $y = 9x + 5$. B. $y = -9x + 5$. C. $y = 9x - 5$. D. $y = -9x - 5$.

Hướng dẫn giải:

Theo giả thiết ta có: $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -4$ và $y'(-1) = 9 \Rightarrow pttt: y = 9x + 5$.

Câu 29. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 3x^3 - x^2 - 7x + 1$ tại điểm $A(0;1)$ là

A. $y = -7x + 1$. B. $y = x + 1$. C. $y = 1$. D. $y = 0$.

Hướng dẫn giải:

Theo giả thiết ta có: $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$ và $y'(0) = -7 \Rightarrow pttt: y = -7x + 1$.

Câu 30. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ (C). Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 5 là

A. $y = 45x - 174$. B. $y = -45x + 174$.
C. $y = 45x + 276$. D. $y = -45x + 276$.

Hướng dẫn giải:

Theo giả thiết ta có: $x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = 51$ và $y'(5) = 45 \Rightarrow pttt: y = 45x - 174$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

II. CÂU HỎI VẬN DỤNG THẤP

Câu 31. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất có phương trình là

A. $y = 3x + 2$. B. $y = -3x + 2$. C. $y = -3x + 8$. D. $y = 3x + 8$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x-1)^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow \min y' = 3$ khi $x = x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = y(1) = 5$

Khi đó phương trình tiếp tuyến $y = 3(x-1) + 5 = 3x + 2$.

Câu 32. Cho hàm số $y = -x^3 + 6x^2 + 3x - 1$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất có phương trình là:

A. $y = 15x + 55$. B. $y = -15x - 5$. C. $y = 15x - 5$. D. $y = -15x + 55$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = -3x^2 + 12x + 3 = -3(x+2)^2 + 15 \le 15 \Rightarrow \max y' = 15$ khi $x = x_0 = -2$ $\Rightarrow y_0 = y(-2) = 25$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến $y = 15(x+2) + 25 = 15x + 55$.

Câu 33. Cho hàm số $y = x^3 + x + 1$ có đồ thị (C). Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. Trên (C) tồn tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho hai tiếp tuyến của (C) tại A và B vuông góc.

B. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 có phương trình là $y = 4x - 1$.

D. Đồ thị (C) chỉ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có: $y' = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} y'(x_1) = 3x_1^2 + 1 > 0 \\ y'(x_2) = 3x_2^2 + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow y'(x_1).y'(x_2) > 0$

hay $y'(x_1).y'(x_2) \ne -1$. Suy ra 2 tiếp tuyến A và B không vuông góc.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Ta có $y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in R$

Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và cắt trục hoành tại một điểm duy nhất $\rightarrow$ **B, D đúng**.

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y'(1) = 4, y_0 = 3 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = 4(x-1) + 3$ $\Leftrightarrow y = 4x - 1 \rightarrow$ **C đúng**.

Câu 34. Đường thẳng $y = ax - b$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - x + 2$ tại điểm $M(1;0)$. Khi đó ta có:

A. $ab = 36$. B. $ab = -6$. C. $ab = -36$. D. $ab = -5$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 3x^2 + 4x - 1 \Rightarrow y'(1) = 6$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại $M(1;0)$ là:

$$y = 6(x-1) \Leftrightarrow y = 6x - 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow ab = 36.$$

Câu 35. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2x + 5$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất, thì hệ số góc của tiếp tuyến đó là

A. $\frac{5}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 3x^2 - 2x + 2 = 3(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}) + \frac{5}{3} = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} \geq \frac{5}{3} \Rightarrow \min y' = \frac{5}{3}$ khi $x = x_0 = \frac{1}{3}$.

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{3}x}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tạo với trục hoành góc 60^0 có phương trình là

A. $\left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3}x \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3}x \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3}x \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{3}x - 4\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3}x \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = \frac{-\sqrt{3}}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$. Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ tạo với Ox góc 60^0

$\Rightarrow y'(x_0) = \pm \tan 60^0 = \pm\sqrt{3} \xrightarrow{y'<0} y'(x_0) = -\sqrt{3} \Rightarrow \frac{-\sqrt{3}}{(x_0-1)^2} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2\sqrt{3} \\ x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3}x \end{array}\right.$.

Câu 37. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m+1)x + 1$ (1), m là tham số. Kí hiệu (C_m) là đồ thị hàm số (1) và K là điểm thuộc (C_m), có hoành độ bằng -1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm K song song với đường thẳng $d: 3x + y = 0$.

A. $m \in \varnothing$.   B. $m = -1$.   C. $m = -1$ hoặc $m = -\frac{1}{3}$.   D. $m = -\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m+1)$. Do $K \in (C_m)$ và có hoành độ bằng -1, suy ra $K(-1; -6m-3)$.

Khi đó tiếp tuyến tại K có phương trình:

$$\Delta: y = y'(-1)(x+1) - 6m - 3 \Leftrightarrow \Delta: y = (9m+6)x + 3m + 3$$

Đường thẳng Δ song song với đường thẳng d

$$\Rightarrow 3x + y = 0 \Leftrightarrow y = -3x \Leftrightarrow \begin{cases} 9m+6 = -3 \\ 3m+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

Câu 38. Cho hàm số $y = x^4 + \frac{1}{2}mx^2 + m - 1$ có đồ thị (C). Biết tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 vuông góc với đường thẳng có phương trình $x - 3y + 1 = 0$. Khi đó giá của m là

A. $m = -1$. B. $m = 0$. C. $m = -\frac{13}{3}$. D. $m = -\frac{11}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = 4x^3 + mx$ và đường thẳng $x - 3y + 1 = 0$ viết thành $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

Theo bài ra ta có: $y'(-1) = -3 \Leftrightarrow -4 - m = -3 \Leftrightarrow m = -1$.

Câu 39. Cho hàm số $y = \sqrt{2x+1}$ có đồ thị (C). Biết tiếp tuyến d của đồ thị (C) vuông góc với đường thẳng $y = -3x + 2017$. Hỏi hoành độ tiếp điểm của d và (C) là bao nhiêu ?

A. 4. B. 1. C. $-\frac{4}{9}$. D. - 4.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của d và (C).

Theo bài ra ta có: $y'(x_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2x_0+1}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x_0 + 1 = 9 \Leftrightarrow x_0 = 4$

Câu 40. Cho hàm số $y = 3x - 4x^3$ có đồ thị (C). Từ điểm $M(1;3)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số (C) ?

A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng đi qua $M(1;3)$ có hệ số góc k có dạng: $y = k(x-1) + 3 \quad (d)$.

Điều kiện để (d) là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$\begin{cases} 3x - 4x^3 = k(x-1) + 3 & (1) \\ 3 - 12x^2 = k & (2) \end{cases}$. Thay (2) vào (1) ta được:

$$3x - 4x^3 = (3 - 12x^2)(x-1) + 3 \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 3 \\ k = -24 \end{array}\right.$$

Vậy có 2 tiếp tuyến.

Câu 41. Cho hàm số $y = x^3 + x + 2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến tại điểm $N(1;4)$ của (C) cắt đồ thị (C) tại điểm thứ hai là M. Khi đó tọa độ điểm M là

A. $M(-2;-8)$. B. $M(-1;0)$. C. $M(0;2)$. D. $M(2;12)$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $y' = 3x^2 + 1 \Rightarrow y'(1) = 4$, suy ra tiếp tuyến tại $N(1;4)$ là: $\Delta : y = 4x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C) là:

$$x^3 + x + 2 = 4x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \Rightarrow y = -8 \end{array}\right..$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

$2x_N + x_M = -\frac{b}{a}$ (Với $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là hàm số ban đầu)

$\Leftrightarrow 2 + x_M = 0 \Leftrightarrow x_M = -2 \Rightarrow M(-2;-8)$.

Câu 42. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + x + 1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến tại điểm N của (C) cắt đồ thị (C) tại điểm thứ hai là $M(-1;-2)$. Khi đó tọa độ điểm N là

A. $(1;2)$. B. $(2;5)$. C. $(-1;-4)$. D. $(0;1)$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1;-2)$ có hệ số góc k có dạng

$$\Delta : y = k(x+1) - 2.$$

Δ là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$\begin{cases} x^3 - x^2 + x + 1 = k(x+1) - 2 & (1) \\ 3x^2 - 2x + 1 = k & (2) \end{cases}$. Thay (2) vào (1) ta được:

$$x^3 - x^2 + x + 1 = (3x^2 - 2x + 1)(x+1) - 2 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow N(1;2)$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

$2x_N + x_M = -\frac{b}{a}$ (Với $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là hàm số ban đầu)

$\Leftrightarrow 2x_N + (-1) = 1 \Leftrightarrow x_N = 1 \Rightarrow N(1;2)$.

Câu 43. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C). Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 đi qua $A(1;3)$?

A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{7}{9}$. C. $m = -\frac{1}{2}$. D. $m = -\frac{7}{9}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 6mx + m + 1$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần lập.

Khi đó $x_0 = -1 \Rightarrow \begin{cases} y'(-1) = 4 - 5m \\ y_0 = 2m - 1 \end{cases}$ suy ra phương trình tiếp tuyến là:

$$\Delta : y = (4 - 5m)(x + 1) + 2m - 1$$

Do $A(1;3) \in \Delta \Rightarrow 3 = (4 - 5m)(1 + 1) + 2m - 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Câu 44. Cho hàm số $y = \frac{x - m}{x + 1}$ có đồ thị (C). Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 0 song song với đường thẳng $y = 3x + 1$.

A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = -2$. D. $m = 3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = \frac{1 + m}{(x + 1)^2}$ khi đó $y'(0) = 3 \Leftrightarrow 1 + m = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

III. CÂU HỎI VẬN DỤNG CAO

Câu 45. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ có đồ thị (*C*) và gốc tọa độ *O*. Gọi Δ là tiếp tuyến của (*C*), biết Δ cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt *A*, *B* và tam giác *OAB* cân. Phương trình Δ là

A. $y=x+4$. B. $y=x+1$. C. $y=x-4$. D. $y=x$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\neq -1$. Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần lập.

Tam giác *OAB* cân tại *O* nên *OA* = *OB*, suy ra

$$y'\left(x_0\right)=\pm 1\xrightarrow{y'>0}y'\left(x_0\right)=1\Leftrightarrow\frac{1}{\left(x_0+1\right)^2}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2\end{array}\right..$$

- Với $x_0=0\Rightarrow y_0=0$ (Loại do $M\left(0;0\right)\equiv O$).
- Với $x_0=-2\Rightarrow y_0=2$, suy ra phương trình tiếp tuyến $\Delta: y=x+4$.

Câu 46. Cho hàm số $y=-x^4-x^2+6$ có đồ thị (*C*). Tiếp tuyến của đồ thị (*C*) cắt các trục *Ox*, *Oy* lần lượt tại hai điểm *A*, *B* sao cho *OB* = 36*OA* có phương trình là

A. $\left[\begin{array}{l}y=-36x+58\\y=36x+58\end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l}y=-36x-86\\y=36x-86\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}x-36y-4=0\\x+36y-4=0\end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l}x-36y+14=0\\x+36y+14=0\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Do $\dfrac{OB}{OA}=36\Rightarrow y'(x_0)=\pm 36$.

- Với $y'(x_0)=-36\Leftrightarrow -4x^3-2x_0=-36\Leftrightarrow 4x_0^3+2x_0-36=0\Leftrightarrow x_0=2$

$\Rightarrow y_0=y(2)=-14$. Suy ra tiếp tuyến y = -36*x* + 58.

- Với $y'(x_0)=36\Leftrightarrow -4x^3-2x_0=36\Leftrightarrow 4x_0^3+2x_0+36=0\Leftrightarrow x_0=-2$

$\Rightarrow y_0=y(-2)=-14$. Suy ra tiếp tuyến y = 36*x* + 58.

Câu 47. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{2\left(x+1\right)}$ có đồ thị là $\left(C\right)$. Gọi điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ với $x_0>-1$ là điểm thuộc $\left(C\right)$, biết tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm M cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A,B và tam giác OAB có trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d:4x+y=0$. Hỏi giá trị của x_0+2y_0 bằng bao nhiêu ?

A. $-\frac{7}{2}$.   B. $\frac{7}{2}$.   C. $\frac{5}{2}$.   D. $-\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

- Gọi $M\left(x_0;\frac{x_0-1}{2\left(x_0+1\right)}\right)\in\left(C\right)$ là điểm cần tìm.

- Gọi Δ tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M ta có phương trình.

$$\Delta: y=f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{x_0-1}{2(x_0+1)}\Rightarrow y=\frac{1}{\left(x_0+1\right)^2}(x-x_0)+\frac{x_0-1}{2(x_0+1)}$$

- Gọi $A=\Delta\cap Ox\Rightarrow A\left(-\frac{x_0^2-2x_0-1}{2};0\right)$ và $B=\Delta\cap Oy\Rightarrow B\left(0;\frac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0+1)^2}\right)$.

- Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ Δ OAB có trọng tâm là:

$$G\left(-\frac{x_0^2-2x_0-1}{6};\frac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}\right).$$

- Do $G\in$ đường thẳng: $4x+y=0\Rightarrow -4.\frac{x_0^2-2x_0-1}{6}+\frac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}=0$

$$\Leftrightarrow 4=\frac{1}{\left(x_0+1\right)^2}\ \textit{(vì } A,B \textit{ không trùng } O \textit{ nên } x_0^2-2x_0-1\neq 0\textit{)}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0+1=\frac{1}{2}\\ x_0+1=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-\frac{1}{2}\\ x_0=-\frac{3}{2}\end{array}\right..$$

- Với $x_0=-\frac{1}{2}\Rightarrow M(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2})$.

- Với $x_0=-\frac{3}{2}\Rightarrow M(-\frac{3}{2};\frac{5}{2})$.

Chọn $M(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2})\Rightarrow x_0+2y_0=-\frac{7}{2}$.

Câu 48. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$ (1) , m là tham số thực. Kí hiệu *(C)* là đồ thị hàm số (1); d là tiếp tuyến của *(C)* tại điểm có hoành độ bằng 1. Tìm m để khoảng cách từ điểm $B\left(\frac{3}{4};1\right)$ đến đường thẳng d đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=1$.   B. $m=-1$.   C. $m=2$.   D. $m=-2$.

Hướng dẫn giải

- $A\in(Cm)$ nên $A(1;1-m)$. $y'=4x^3-4mx\Rightarrow y'(1)=4-4m$.
- Phương trình tiếp tuyến của (Cm) tại A: $y-1+m=y'(1).(x-1)$

$$\Leftrightarrow (4-4m)x-y-3(1-m)=0.$$

- Khi đó $d(B;\Delta)=\dfrac{|-1|}{\sqrt{16(1-m)^2+1}}\le 1$, Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow$ khi $m=1$.
- Do đó $d(B;\Delta)$ lớn nhất bằng 1 khi và chỉ khi $m=1$.

Câu 49. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu_tiếp tuyến của đồ thị (C) tại những điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến đường thẳng $d_1:3x+4y-2=0$ bằng 2.

A. 4. B.3. C. 2. D. 0.

Hướng dẫn giải

- Giả sử $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}$.
- Ta có: $d(M,d_1)=2\Leftrightarrow\dfrac{|3x_0+4y_0-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2\Leftrightarrow 3x_0+4y_0-12=0$ hoặc $3x_0+4y_0+8=0$.
- Với $3x_0+4y_0-12=0\Leftrightarrow 3x_0+4\left(\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right)-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\Rightarrow M_1(0;3)\\ x_0=\dfrac{1}{3}\Rightarrow M_2\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{11}{4}\right)\end{array}\right.$
- Với $3x_0+4y_0+8=0\Leftrightarrow 3x_0+4\left(\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right)+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-5\Rightarrow M_3\left(-5;\dfrac{7}{4}\right)\\ x_0=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow M_4\left(-\dfrac{4}{3};-1\right)\end{array}\right.$.

Suy ra có 4 tiếp tuyến.

Câu 50. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm hai tiệm cận của (C). Tìm điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng MI.

A. $M(2;3)$. B. $M\left(3;\dfrac{5}{2}\right)$. C. $M\left(4;\dfrac{7}{3}\right)$. D. $M(5;3)$.

Hướng dẫn giải
Phương pháp tự luận.

- Giao điểm của hai tiệm cận là $I\left(1;2\right)$. Gọi $M\left(a;b\right)\in\left(C\right)\Rightarrow b=\dfrac{2a-1}{a-1},\left(a>1\right)$.
- Phương trình tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M là $y=-\dfrac{1}{(a-1)^2}\left(x-a\right)+\dfrac{2a-1}{a-1}$.
- Phương trình đường thẳng MI : $y=\dfrac{1}{(a-1)^2}(x-1)+2$.
- Tiếp tuyến tại M vuông góc với MI nên ta có:

$$-\frac{1}{\left(a-1\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(a-1\right)^2}=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\Rightarrow b=1\\ a=2\Rightarrow b=3\end{array}\right..$$

Vậy điểm cần tìm là $M\left(2;3\right)$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in\left(C\right)$, điểm M thoả yêu cầu bài toán có hoành độ được tính như sau:

$$x_0-1=\pm\sqrt{\left|2.\left(-1\right)-1.\left(-1\right)\right|}\Leftrightarrow x_0-1=\pm1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\Rightarrow y_0=3\\ x_0=0\ \ (L)\end{array}\right.$$. Vậy $M\left(2;3\right)$.

Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị là $\left(C\right)$, đường thẳng $d:y=x+m$. Với mọi m ta luôn có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A,B. Gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với $\left(C\right)$ tại A,B. Tìm m để tổng k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=-1$. B. $m=-2$. C. $m=3$. D. $m=-5$.

Hướng dẫn giải

- Phương trình hoành độ giao điểm của d và *(C):*

$$\frac{-x+1}{2x-1}=x+m\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{1}{2}\\ g\left(x\right)=2x^2+2mx-m-1=0\ \ (*)\end{cases}.$$

- Theo định lí Viet ta có: $x_1+x_2=-m;x_1x_2=\dfrac{-m-1}{2}$. Giả sử: $A\left(x_1;y_1\right),B\left(x_2;y_2\right)$.
- Ta có $y'=\dfrac{-1}{\left(2x-1\right)^2}$.
- Tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại A và B có hệ số góc là: $k_1=-\dfrac{1}{\left(2x_1-1\right)^2};k_2=-\dfrac{1}{\left(2x_2-1\right)^2}$.

$$\Rightarrow k_1+k_2=k_1+k_2=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}-\frac{1}{(2x_2-1)^2}=-\frac{4(x_1^2+x_2^2)-4(x_1+x_2)+2}{\left[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1\right]^2}$$
$$=-\left(4m^2+8m+6\right)=-4\left(m+1\right)^2-2\le-2$$

- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy: k_1+k_2 đạt GTLN bằng -2 khi $m=-1$.

Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ (1).Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

A. $y=-x-2$. B. $y=-x$. C. $y=-x+2$. D. $y=-x+1$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

- Gọi $\mathrm{M}(x_0;y_0)$ là toạ độ của tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0)=\dfrac{-1}{(2x_0+3)^2}<0$.
- ΔOAB cân tại O nên tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $y=-x$ (vì tiếp tuyến có hệ số góc âm). Nghĩa là: $y'(x_0)=\dfrac{-1}{(2x_0+3)^2}=-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1\Rightarrow y_0=1 \\ x_0=-2\Rightarrow y_0=0 \end{array}\right.$
- Với $x_0=-1;\ y_0=1 \Rightarrow \Delta:\ y-1=-(x+1) \Leftrightarrow y=-x$ (**loại**).
- Với $x_0=-2;\ y_0=0 \Rightarrow \Delta:\ y-0=-(x+2) \Leftrightarrow y=-x-2$ (**nhận**).

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-x-2$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

- Tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O nên ta có $OA=OB \Rightarrow n=1$.

$acx_0^2+2bcx_0+bd\neq 0 \Rightarrow 2x_0^2+8x_0+6\neq 0 \Leftrightarrow x_0\neq -1; x_0\neq -3$.

$cx_0+d=\pm\sqrt{n.|ad-bc|} \Rightarrow 2x_0+3=\pm\sqrt{1.|-1|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1(L) \\ x_0=-2(N) \end{array}\right.$.

- Với $x_0=-2;\ y_0=0 \Rightarrow \Delta:\ y-0=-(x+2) \Leftrightarrow y=-x-2$ (**nhận**).

Câu 53. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}, (C)$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A và B thoả mãn $OA=4OB$.

A. $\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4} \\ y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4} \end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4} \\ y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{2} \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{2} \end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4} \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

- Giả sử tiếp tuyến d của (C) tại $M(x_0;y_0)\in(C)$ cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho $OA=4OB$.

- Do tam giác OAB vuông tại O nên $\tan A=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ Hệ số góc của d bằng $\frac{1}{4}$ hoặc $-\frac{1}{4}$.

- Hệ số góc của d là $y'(x_0)=-\frac{1}{(x_0-1)^2}<0\Rightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2}=-\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_0=-1\Rightarrow y_0=\frac{3}{2} \\ x_0=3\Rightarrow y_0=\frac{5}{2} \end{array}\right.$.

- Khi đó có 2 tiếp tuyến thoả mãn là: $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}(x+1)+\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{4}(x-3)+\frac{5}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4} \end{array}\right.$.

Câu 54. Cho hàm số $y=\frac{x}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi Δ là tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)$ (với $x_0>0$) thuộc đồ thị (C). Để khoảng cách từ tâm đối xứng I của đồ thị (C) đến tiếp tuyến Δ là lớn nhất thì tung độ của điểm M gần giá trị nào nhất ?

A. $\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{3\pi}{2}$. C. $\frac{5\pi}{2}$. D. $\frac{7\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

- Ta có: $y'=\frac{-1}{(x-1)^2}$; $I(1;1)$.

- Gọi $M\left(x_0;\frac{x_0}{x_0-1}\right)\in(C),(x_0\neq 1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$\Delta: y=-\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0}{x_0-1}\Leftrightarrow x+(x_0-1)^2y-x_0^2=0.$$

- $\mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{2|x_0-1|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}}=\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{(x_0-1)^2}+(x_0-1)^2}}\le\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

- Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{(x_0-1)^2}=(x_0-1)^2\Leftrightarrow|x_0-1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\Rightarrow y_0=2\,(N)\\x_0=0\ \ (L)\end{array}\right..$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Ta có $IM\perp\Delta\Rightarrow\ cx_0+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_0-1=\pm\sqrt{|-1-0|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\Rightarrow y_0=2\,(N)\\x_0=0\ \ (L)\end{array}\right.$.

Câu 55. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết khoảng cách từ $I(-1;2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất thì tung độ của điểm M nằm ở góc phần tư thứ hai gần giá trị nào nhất ?

A. e. B. $2e$. C. $3e$. D. $4e$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

- Ta có: $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$.

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}\right)\in(C),(x_0\ne-1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M là:

$$y=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0+1}\Leftrightarrow 3x-(x_0+1)^2y+2x_0^2-2x_0-1=0.$$

- $\mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\dfrac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}\le\dfrac{6}{\sqrt{2\sqrt{9}}}=\sqrt{6}$.

- Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow(x_0+1)^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_0=2-\sqrt{3}\,(L)\\x_0=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_0=2+\sqrt{3}\,(N)\end{array}\right..$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Ta có $IM\perp\Delta\Rightarrow\ cx_0+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_0+1=\pm\sqrt{|2+1|}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1+\sqrt{3} \Rightarrow y = 2-\sqrt{3}\,(L) \\ x_0 = -1-\sqrt{3} \Rightarrow y = 2+\sqrt{3}\,(N) \end{array}\right.$$

Câu 56. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B sao cho AB ngắn nhất. Khi đó độ dài lớn nhất của vectơ $\overrightarrow{OM}$ gần giá trị nào nhất ?

A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

- Gọi $M\left(x_0; \dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right) \in (C), (x_0 \neq 2)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$\Delta: y = -\dfrac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + 2 + \dfrac{1}{x_0-2}$.

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là: $A\left(2; 2+\dfrac{2}{x_0-2}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là: $B(2x_0-2; 2)$.
- Ta có: $AB^2 = 4\left[(x_0-2)^2 + \dfrac{1}{(x_0-2)^2}\right] \geq 8$. Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2 = \dfrac{1}{(x_0-2)^2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 3 \Rightarrow \overrightarrow{OM}(3;3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right| = 3\sqrt{2}\,(N) \\ x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow \overrightarrow{OM}(1;1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{2}\,(L) \end{array}\right..$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

- AB ngắn nhất suy ra khoảng cách từ I đến tiếp tuyến Δ tại M ngắn nhất

$\Rightarrow IM \perp \Delta \Rightarrow cx_M + d = \pm\sqrt{|ad-bc|} \Rightarrow x_M - 2 = \pm\sqrt{|-4+3|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M = 3 \Rightarrow y_M = 3 \\ x_M = 1 \Rightarrow y_M = 1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right| = 3\sqrt{2}$.

Câu 57. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số (C) tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. Khi đó khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến Δ bằng ?

A. $\sqrt{6}$. B. $2\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

- Gọi $M\left(x_0; \dfrac{x_0-2}{x_0+1}\right) \in (C), (x_0 \neq -1)$, $I(-1;1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng: $\Delta: y = \dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \dfrac{x_0-2}{x_0+1}$.

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là: $A\left(-1;\dfrac{x_0-5}{x_0+1}\right)$.

- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là: $B\left(2x_0+1;1\right)$.

- Ta có: $IA=\dfrac{6}{|x_0+1|},IB=2|x_0+1|\Rightarrow IA.IB=12$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔIAB là: $S_{IAB}=pr$

$$\Rightarrow r=\frac{S_{IAB}}{p}=\frac{IA.IB}{IA+IB+IC}=\frac{IA.IB}{IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}}\le\frac{IA.IB}{2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2.IA.IB}}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}.$$

- Suy ra $r_{\max}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}\Leftrightarrow IA=IB\Leftrightarrow|x_0-1|^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_0=1-\sqrt{3}\\x_M=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_0=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$.

- $\overrightarrow{IM}\left(\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IM}\right|=\sqrt{6}$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

- $IA=IB\Rightarrow\Delta IAB$ vuông cân tại $I\Rightarrow IM\perp\Delta$.

- $cx_M+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_M+1=\pm\sqrt{|1+2|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_M=1-\sqrt{3}\\x_M=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_M=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{IM}\right|=\sqrt{6}$.

Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Tiếp tuyến Δ của (C) cắt 2 tiệm cận tại A và B sao cho chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất. Khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ đến tiếp tuyến Δ gần giá trị nào nhất ?

A.5. B. 4. C. 3. D. 6.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

- Gọi $M\left({}_0;2+\dfrac{3}{x_0-1}\right)\in(C),(x_0\ne1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$\Delta:y=\frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+2+\frac{3}{x_0-1}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là: $A\left(1;\,2+\dfrac{6}{x_0-1}\right)$.

- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là: $B\left(2x_0-1;\,2\right)$.

- Ta có: $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA.IB=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{|x_0-1|}\cdot 2|x_0-1|=2.3=6$.
- ΔIAB vuông tại I có diện tích không đổi $\Rightarrow$ chu vi ΔIAB đạt giá trị nhỏ nhất khi

$IA=IB\Leftrightarrow\frac{6}{|x_0-1|}=2|x_0-1|\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1+\sqrt{3}\\x_0=1-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

- Với $x_0=1+\sqrt{3}$ thì phương trình tiếp tuyến là

$$\Delta: y=-x+3+2\sqrt{3}\Rightarrow d(O,\Delta)=\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(N).$$

- Với $x_0=1-\sqrt{3}$ thì phương trình tiếp tuyến là

$$\Delta: y=-x+3-2\sqrt{3}\Rightarrow d(O,\Delta)=\frac{-3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(L).$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

- $IA=IB\Rightarrow cx_M+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_M-1=\pm\sqrt{|-2-1|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=1+\sqrt{3}\Rightarrow y=2+\sqrt{3}\\x_M=1-\sqrt{3}\Rightarrow y=2-\sqrt{3}\end{array}\right.$

$\Rightarrow d(O,\Delta)=\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(N)$.

Câu 59. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Tiếp tuyến Δ của (C) tại M cắt các đường tiệm cận tại A và B sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó tiếp tuyến Δ của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích lớn nhất thuộc khoảng nào ?

A. $(27; 28)$. B. $(28; 29)$. C. $(26; 27)$. D. $(29; 30)$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

- Gọi $M\left(x_0;\frac{2x_0-1}{x_0-2}\right)\in(C),(x_0\neq 2)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$\Delta: y=-\frac{3}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0-2}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là: $A\left(2;\frac{2x_0+2}{x_0-2}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là: $B(2x_0-2; 2)$.
- Xét $\begin{cases}x_A+x_B=2+2x_0-2=2x_0\\ y_A+y_B=\frac{2x_0+2}{x_0-2}+2=2.\frac{2x_0-1}{x_0-2}=2y_0\end{cases}\Rightarrow M$ là trung điểm của AB.
- ΔIAB vuông tại I nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB.

$$\Rightarrow S = \pi R^2 = \pi IM^2 = \pi\left[(x_0-2)^2+\left(\frac{2x_0-1}{x_0-2}-2\right)^2\right] = \pi\left[(x_0-2)^2+\frac{9}{(x_0-2)^2}\right] \geq 6\pi$$

- Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2 = \dfrac{9}{(x_0-2)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \sqrt{3}+2 \Rightarrow y_0 = \sqrt{3}+2 \\ x_0 = -\sqrt{3}+2 \Rightarrow y_0 = -\sqrt{3}+2 \end{array}\right.$.
- Với $x_0 = \sqrt{3}+2 \Rightarrow \Delta: y = -x+2\sqrt{3}+4$ cắt 2 trục tọa độ tại

$$E\left(0;\ 2\sqrt{3}+4\right), F\left(2\sqrt{3}+4;\ 0\right) \Rightarrow S_{OEF} = \frac{1}{2}OE.OF = 14+8\sqrt{3} \approx 27,8564$$

- Với $x_0 = -\sqrt{3}+2 \Rightarrow \Delta: y = -x-2\sqrt{3}+4$ cắt 2 trục tọa độ tại

$$E\left(0;\ -2\sqrt{3}+4\right), F\left(-2\sqrt{3}+4;\ 0\right) \Rightarrow S_{OEF} = \frac{1}{2}OE.OF = 14-8\sqrt{3} \approx 0,1435$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

- IM lớn nhất $\Leftrightarrow IM \perp \Delta \Rightarrow cx_0 + d = \pm\sqrt{|ad-bc|} \Rightarrow x_0 - 2 = \pm\sqrt{|-4+1|}$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \sqrt{3}+2 \Rightarrow y_0 = \sqrt{3}+2 \\ x_0 = -\sqrt{3}+2 \Rightarrow y_0 = -\sqrt{3}+2 \end{array}\right.$. Giải tương tự như trên.