Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2(2x-1)\right)>0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2(2x-1)\right)>\log_{\frac{1}{2}}1$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_2(2x-1)<1\\ \log_2(2x-1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<2x-1<2\\ 2x-1>1\end{cases} \Leftrightarrow 1<x<\frac{3}{2}.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 75. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_4\left(2x^2+3x+1\right)>\log_2(2x+1)$ là:

A. $S=\left(-\frac{1}{2};0\right)$. B. $S=\left(0;\frac{1}{2}\right)$. C. $S=\left(-\frac{1}{2};1\right)$. D. $S=\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases}2x^2+3x+1>0\\ 2x+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<-1 \vee x>-\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}.$

Ta có: $\log_4\left(2x^2+3x+1\right)>\log_2(2x+1) \Leftrightarrow \log_4\left(2x^2+3x+1\right)>\log_4(2x+1)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2+3x+1>4x^2+4x+1 \Leftrightarrow 2x^2+x<0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<0.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Câu 76. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_x(125x).\log_{25}x>\frac{3}{2}+\log_5^2 x$ là:

A. $S=\left(1;\sqrt{5}\right)$. B. $S=\left(-1;\sqrt{5}\right)$. C. $S=\left(-\sqrt{5};1\right)$. D. $S=\left(-\sqrt{5};-1\right)$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $0<x\neq 1$ $(*)$.

Ta có: $\log_x(125x).\log_{25}x>\frac{3}{2}+\log_5^2 x \Leftrightarrow \left(\log_x 5^3+\log_x x\right).\log_{5^2}x>\frac{3}{2}+\log_5^2 x$

$\Leftrightarrow (3\log_x 5+1).\left(\frac{1}{2}\log_5 x\right)>\frac{3}{2}+\log_5^2 x \Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log_5 x>\frac{3}{2}+\log_5^2 x \Leftrightarrow 2\log_5^2 x-\log_5 x<0$

$\Leftrightarrow 0<\log_5 x<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 5^0<x<5^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 1<x<\sqrt{5}.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(1;\sqrt{5}\right)$.

Câu 77. Tích các nghiệm của phương trình $\log_2 x.\log_4 x.\log_8 x.\log_{16} x=\frac{81}{24}$ là :

A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. 3.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\log_2 x.\log_4 x.\log_8 x.\log_{16} x=\frac{81}{24} \Leftrightarrow (\log_2 x)\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)\left(\frac{1}{3}\log_2 x\right)\left(\frac{1}{4}\log_2 x\right)=\frac{81}{24}$

$\Leftrightarrow \log_2^4 = 81 \Leftrightarrow \log_2 x = \pm 3 \Leftrightarrow x = 8$ hoặc $x = \frac{1}{8}$. (thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{\frac{1}{8}; 8\right\} \Rightarrow x_1.x_2 = 1$.

Câu 78. Phương trình $\log_{\sqrt{3}}|x+1| = 2$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \neq -1$

Ta có: $\log_{\sqrt{3}}|x+1| = 2 \Leftrightarrow |x+1| = 3 \Leftrightarrow x+1 = \pm 3 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -4$. (thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-4; 2\}$.

Câu 79. Biết phương trình $4^{\log_9 x} - 6.2^{\log_9 x} + 2^{\log_3 27} = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó $x_1^2 + x_2^2$ bằng :

A. 6642. B. $\frac{82}{6561}$. C. 20. D. 90.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có phương trình tương đương $2^{2\log_9 x} - 6.2^{\log_9 x} + 2^3 = 0$. (1)

Đặt $t = 2^{\log_9 x}, t > 0$. $(1) \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 4 \end{array}\right.$

- Với $t = 2 \Leftrightarrow 2^{\log_9 x} = 2 \Leftrightarrow \log_9 x = 1 \Leftrightarrow x = 9$.
- Với $t = 4 \Leftrightarrow 2^{\log_9 x} = 2^2 \Leftrightarrow \log_9 x = 2 \Leftrightarrow x = 81$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{9; 81\} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 6642$.

Câu 80. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\log_2^2 x} - 10x^{\log_2 \frac{1}{x}} + 3 > 0$ là:

A. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. B. $S = (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $S = (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$. D. $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x > 0$ (*). Đặt $u = \log_2 x \Rightarrow x = 2^u$.

Bất phương trình đã cho trở thành $2^{u^2} - 10(2^u)^{-u} + 3 > 0 \Leftrightarrow 2^{u^2} - \frac{10}{2^{u^2}} + 3 > 0$ (1)

Đặt $t = 2^{u^2}$, $t \geq 1$. $(1) \Rightarrow t^2 + 3t - 10 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -5 \ \ (l) \\ t > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^{u^2} > 2 \Leftrightarrow u^2 > 1 \Leftrightarrow u > 1$ hoặc $u < -1$

- Với $u > 1 \Rightarrow \log_2 x > 1 \Rightarrow x > 2$
- Với $u < -1 \Rightarrow \log_2 x < -1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$.

Kết hợp điều kiện (*), ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 2$ hoặc $0 < x < \frac{1}{2}$.

Câu 81. Tập nghiệm của phương trình $4^{\log_2 2x} - x^{\log_2 6} = 2.3^{\log_2 4x^2}$ là:

A. $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$. B. $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. C. $S=\left\{\frac{4}{9}\right\}$. D. $S=\{-2\}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $0<x\neq 1$

Ta có: $4^{\log_2 2x}-x^{\log_2 6}=2.3^{\log_2 4x^2}\Leftrightarrow 4^{1+\log_2 x}-6^{\log_2 x}=2.3^{2+2\log_2 x}\Leftrightarrow 4.4^{\log_2 x}-6^{\log_2 x}=19.9^{\log_2 x}$ (1)

Chia 2 vế cho $4^{\log_2 x}$.

$(1)\Leftrightarrow 18.\left(\frac{9}{4}\right)^{\log_2 x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x}-4=0$. Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x}>0$. $PT\Rightarrow 18t^2+t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{4}{9}\\ t=-\frac{1}{2}\ (l)\end{array}\right.$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x}=\left(\frac{4}{9}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\Leftrightarrow \log_2 x=-2\Leftrightarrow x=2^{-2}=\frac{1}{4}$. (thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

VẬN DỤNG CAO

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3 x-\log_3(x-2)=\log_{\sqrt{3}} m$ có nghiệm?

A. $m>1$. B. $m\geq 1$. C. $m<1$. D. $m\leq 1$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Điều kiện $x>2; m>0$

$\log_3 x-\log_3(x-2)=\log_{\sqrt{3}} m\Leftrightarrow x=(x-2)m^2\Leftrightarrow x=\frac{2m^2}{m^2-1}$

Phương trình có nghiệm $x>2$ khi $m>1$,chọn đáp án A

[Phương pháp trắc nghiệm]

Thay $m=0$ (thuộc C, D) vào biểu thức $\log_{\sqrt{3}} m$ không xác định, vậy loại C, D,

Thay $m=1$ (thuộc B) ta được phương trình tương đương $x=x-2$ vô nghiệm

Vậy chọn đáp án A.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_3(x^2+4x+m)\geq 1$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.?

A. $m\geq 7$. B. $m>7$. C. $m<4$. D. $4<m\leq 7$.

Hướng dẫn giải

$\log_3(x^2+4x+m)\geq 1\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2+4x+m-3\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta\leq 0\Leftrightarrow m\geq 7$

Vậy chọn A.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(mx-x^2)\leq\log_{\frac{1}{5}} 4$ vô nghiệm?

A. $-4<m<4$. B. $\left[\begin{array}{l}m>4\\ m<-4\end{array}\right.$. C. $m<4$. D. $-4\leq m\leq 4$.

Hướng dẫn giải

$\log_{\frac{1}{5}}\left(mx-x^2\right)\le \log_{\frac{1}{5}}4 \Leftrightarrow mx-x^2\ge 4 \Leftrightarrow x^2-mx+4\le 0$

$x^2-mx+4\le 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow x^2-mx+4>0\ \forall x\in R \Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow -4<m<4$

Vậy chọn A.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2\left(mx-x^2\right)=2$ vô nghiệm?

A. $-4<m<4$. B. $m<4$. C. $\left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<-4 \end{array}\right.$. D. $m>-4$.

Hướng dẫn giải

$\log_2\left(mx-x^2\right)=2 \Leftrightarrow -x^2+mx-4=0(*)$

Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow m^2-16<0 \Leftrightarrow -4<m<4$

Vậy chọn A.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_4^2 x+3\log_4 x+2m-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt?

A. $m<\frac{13}{8}$. B. $m>\frac{13}{8}$. C. $m\le\frac{13}{8}$. D. $0<m<\frac{13}{8}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 13-8m>0 \Leftrightarrow m<\frac{13}{8}$

Vậy chọn A.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)\ge m$ có nghiệm $x\ge 1$?

A. $m\le 6$. B. $m>6$. C. $m\ge 6$. D. $m<6$.

Hướng dẫn giải

BPT $\Leftrightarrow \log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)\le \mathrm{m} \Leftrightarrow \log_2(5^x-1).\left[1+\log_2(5^x-1)\right]\le \mathrm{m}$

Đặt $t=\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ do $x\ge 1 \Rightarrow t\in\left[2;+\infty\right)$

BPT $\Leftrightarrow t(1+t)\ge m \Leftrightarrow t^2+t\ge m \Leftrightarrow f(t)\ge m$

Với $f(t)=t^2+t$

$f'(t)=2t+1>0$ với $t\in\left[2;+\infty\right)$ nên hàm đồng biến trên $t\in\left[2;+\infty\right)$

Nên $Minf(t)=f(2)=6$

Do đó để để bất phương trình $\log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)\ge \mathrm{m}$ có nghiệm $x\ge 1$ thì :

$m\le Minf(t) \Leftrightarrow m\le 6$

chọn đáp án A.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x+2\log_3 x+m-1=0$ có nghiệm?

A. $m\le 2$. B. $m<2$. C. $m\ge 2$. D. $m>2$.

Hướng dẫn giải

TXĐ: $x>0$

PT có nghiệm khi $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 1-(m-1)\ge 0\Leftrightarrow 2-m\ge 0\Leftrightarrow m\le 2$, chọn đáp án A

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x-1)\le m$ có nghiệm $x\ge 1$?

A. $m\ge 2$. B. $m>2$. C. $m\le 2$. D. $m<2$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$x\ge 1\Leftrightarrow 5^x-1\ge 4\Leftrightarrow \log_2\left(5^x-1\right)\ge 2\Leftrightarrow m\ge 2$

Vậy chọn đáp án A.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$?

A. $m\in[0;2]$. B. $m\in(0;2)$. C. $m\in(0;2]$. D. $m\in[0;2)$.

Hướng dẫn giải

Với $x\in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$ hay $1\le x\le 3^{\sqrt{3}}\Rightarrow \sqrt{\log_3^2 1+1}\le\sqrt{\log_3^2 x+1}\le\sqrt{\log_3^2 3^{\sqrt{3}}+1}$ hay $1\le t\le 2$.

Khi đó bài toán được phát biểu lại là: "Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$". Ta có $PT\Leftrightarrow 2m=t^2+t+2$.

Xét hàm số

$f(t)=t^2+t-2,\ \forall t\in[1;2],\ f'(t)=2t+1>0,\ \forall t\in[1;2]$

Suy ra hàm số đồng biến trên $[1;2]$.

Khi đó phương trình có nghiệm khi $0\le 2m\le 4\Leftrightarrow 0\le m\le 2$.

Vậy $0\le m\le 2$ là các giá trị cần tìm.

t	1		2
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	4

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2\left(5^x-1\right).\log_4\left(2.5^x-2\right)=m$ có nghiệm $x\ge 1$.?

A. $m\in[3;+\infty)$. B. $m\in[2;+\infty)$. C. $m\in(-\infty;2]$. D. $m\in(-\infty;3]$.

Hướng dẫn giải

Với $x\ge 1\Rightarrow 5^x\ge 5\Rightarrow \log_2\left(5^x-1\right)\ge\log_2\left(5-1\right)=2$ hay $t\ge 2$.

Khi đó bài toán được phát biểu lại là: "Tìm m để phương trình có nghiệm $t\ge 2$".

Xét hàm số $f(t)=t^2+t,\ \forall t\ge 2,\ f'(t)=2t+1>0,\ \forall t\ge 2$

Suy ra hàm số đồng biến với $t\ge 2$.

Khi đó phương trình có nghiệm khi $2m\ge 6\Leftrightarrow m\ge 3$.

Vậy $m\ge 3$ là các giá trị cần tìm.

t	2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$\log_3^2 x-(m+2)\log_3 x+3m-1=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1.x_2=27.$?

A. $m=1$. B. $m=-1$. C. $m=-2$. D. $m=2$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x>0$. Đặt $t=\log_3 x$. Khi đó phương trình có dạng: $t^2-(m+2)t+3m-1=0$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì

$$\Delta=(m+2)^2-4(3m-1)=m^2-8m+8>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<4-2\sqrt{2} \\ m>4+2\sqrt{2} \end{array}\right. \quad (*)$$

Với điều kiện $(*)$ ta có: $t_1+t_2=\log_3 x_1+\log_3 x_2=\log_3(x_1.x_2)=\log_3 27=3$.

Theo Vi-ét ta có: $t_1+t_2=m+2 \Rightarrow m+2=3 \Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}} x^2-3}=m(\log_4 x^2-3)$ có nghiệm thuộc $[32;+\infty)$?

A. $m\in(1;\sqrt{3}]$. B. $m\in[1;\sqrt{3})$. C. $m\in[-1;\sqrt{3})$. D. $m\in(-\sqrt{3};1]$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x>0$. Khi đó phương trình tương đương: $\sqrt{\log_2^2 x-2\log_2 x-3}=m(\log_2 x-3)$.

Đặt $t=\log_2 x$ với $x\ge 32 \Rightarrow \log_2 x\ge \log_2 32=5$ hay $t\ge 5$.

Phương trình có dạng $\sqrt{t^2-2t-3}=m(t-3)$ $(*)$.

Khi đó bài toán được phát biểu lại là: "Tìm m để phương trình $(*)$ có nghiệm $t\ge 5$"

Với $t\ge 5$ thì $(*) \Leftrightarrow \sqrt{(t-3).(t+1)}=m(t-3) \Leftrightarrow \sqrt{t-3}.\left(\sqrt{t+1}-m\sqrt{t-3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{t+1}-m\sqrt{t-3}=0 \Leftrightarrow m=\sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}$

Ta có $\dfrac{t+1}{t-3}=1+\dfrac{4}{t-3}$. Với $t\ge 5 \Rightarrow 1<1+\dfrac{4}{t-3}\le 1+\dfrac{4}{5-3}=3$ hay $1<\dfrac{t+1}{t-3}\le 3 \Rightarrow 1<\sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}\le\sqrt{3}$

suy ra $1<m\le\sqrt{3}$. Vậy phương trình có nghiệm với $1<m\le\sqrt{3}$.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho khoảng $(2;3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x^2+1)>\log_5(x^2+4x+m)-1$ (1).

A. $m\in[-12;13]$. B. $m\in[12;13]$. C. $m\in[-13;12]$. D. $m\in[-13;-12]$.

Hướng dẫn giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1>\dfrac{x^2+4x+m}{5} \\ x^2+4x+m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-x^2-4x=f(x) \\ m<4x^2-4x+5=g(x) \end{cases}$$

Hệ trên thỏa mãn $\forall x\in(2;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge \underset{2<x<3}{Max}\, f(x)=-12 & \text{khi } x=2 \\ m\le \underset{2<x<3}{Min}\, f(x)=13 & \text{khi } x=2 \end{cases} \Leftrightarrow -12\le m\le 13.$

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2\left(7x^2+7\right)\ge\log_2\left(mx^2+4x+m\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

A. $m\in(2;5]$. B. $m\in(-2;5]$. C. $m\in[2;5)$. D. $m\in[-2;5)$.

Hướng dẫn giải

Bất phương trình tương đương $7x^2+7\ge mx^2+4x+m>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(7-m)x^2-4x+7-m\ge 0 & (2)\\ mx^2+4x+m>0 & (3)\end{cases},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

- $m=7$: (2) không thỏa $\forall x\in\mathbb{R}$
- $m=0$: (3) không thỏa $\forall x\in\mathbb{R}$

(1) thỏa $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}7-m>0\\ \Delta_2'=4-(7-m)^2\le 0\\ m>0\\ \Delta_3'=4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<7\\ m\le 5\\ m>0\\ m>2\end{cases}\Leftrightarrow\ 2<m\le 5.$

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ có nghiệm đúng $\forall x$.

A. $m\in(2;3]$. B. $m\in(-2;3]$. C. $m\in[2;3)$. D. $m\in[-2;3)$.

Hướng dẫn giải

Bất phương trình tương đương $7\left(x^2+1\right)\ge mx^2+4x+m>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(5-m)x^2-4x+5-m\ge 0 & (2)\\ mx^2+4x+m>0 & (3)\end{cases}(*),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

- $m=0$ hoặc $m=5$: (*) không thỏa $\forall x\in\mathbb{R}$
- $m\ne 0$ và $m\ne 5$: (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}5-m>0\\ \Delta_2'=4-(5-m)^2\le 0\\ m>0\\ \Delta_3'=4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\ 2<m\le 3.$

---HẾT---