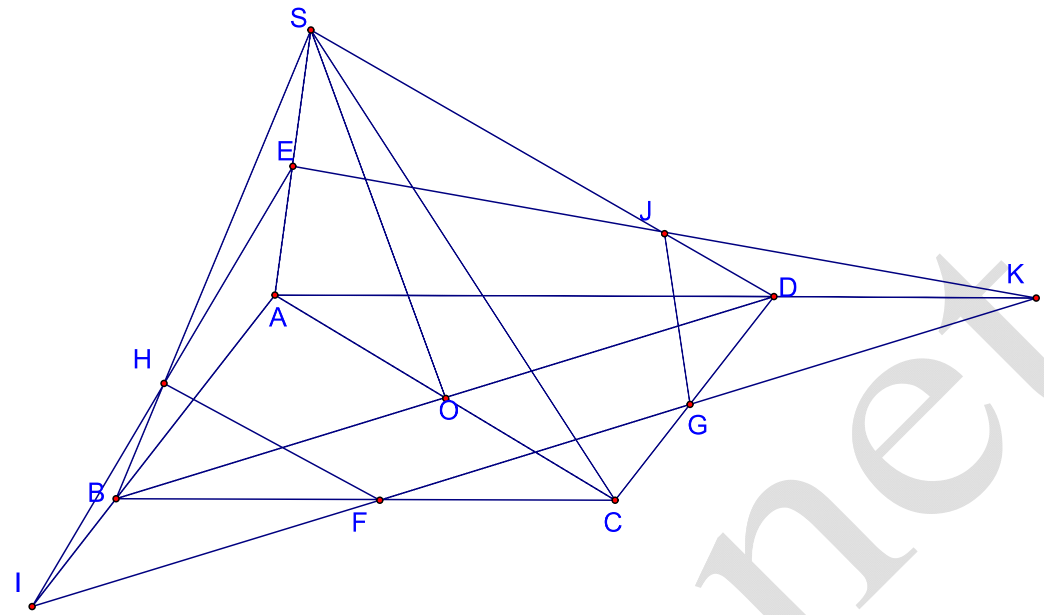


Trong mp$(ABCD)$, gọi $I = FG \cap AB; K = FG \cap AD$

Trong mp(SAB) , gọi $H = IE \cap SB$

Trong mp(SAD) , gọi $J = EK \cap SD$.

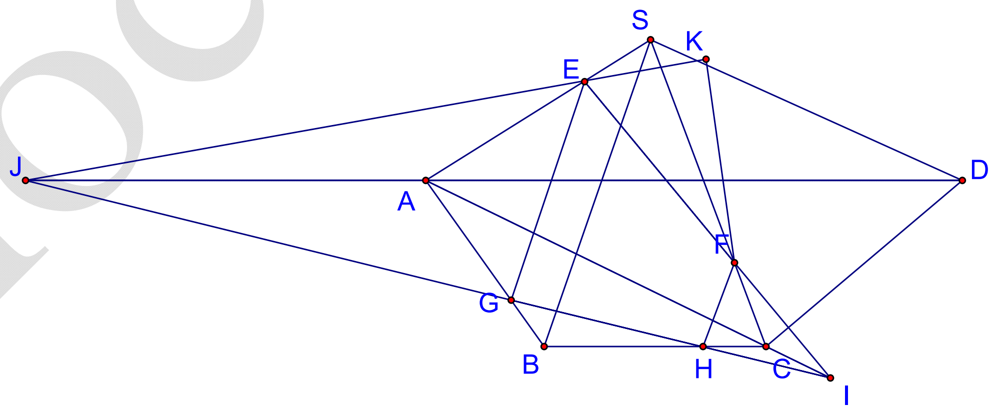
$$(EFG) \cap (ABCD) = FG,$$
$$(EFG) \cap (SCD) = GJ$$

Ta có: $(EFG) \cap (SAD) = JE$

$$(EFG) \cap (SAB) = HE$$
$$(EFG) \cap (SBC) = HF$$

Do đó ngũ giác EHFGJ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG)

Câu 36. **Đáp án C**.



Trong mp(SAC) , Gọi $I = EF \cap AC$

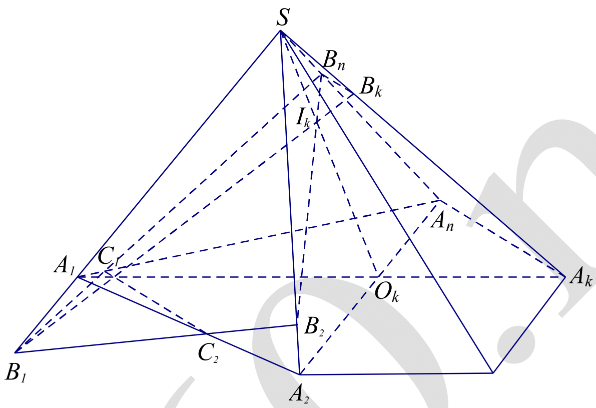
Trong mp$(ABCD)$, Gọi $H = IG \cap BC, J = IG \cap AB$

Trong mp(SAD) , Gọi $K = JE \cap SD$

Khi đó ta có: $\begin{cases}(EFG)\cap(ABCD)=GH,\\(EFG)\cap(SCD)=KF\\(EFG)\cap(SAD)=EK\\(EFG)\cap(SAB)=GE\\(EFG)\cap(SBC)=HF\end{cases}$

Do đó ngũ giác EKFHG là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG)

Câu 37. **Đáp án D**.



Trong mặt phẳng (SA_1A_2) gọi C_2 là giao điểm của B_1B_2 với A_1A_2.

Trong mặt phẳng (SA_1A_n) gọi C_n là giao điểm của B_1B_n với A_1A_n.

Trong mặt phẳng $(A_1A_2...A_n)$ gọi O_k $(k=3,4,...,n-1)$ là giao điểm của A_1A_k với A_2A_n.

Trong mặt phẳng (SA_2A_n), gọi I_k $(k=3,4,...,n-1)$ là giao điểm của SO_k với B_2B_n.

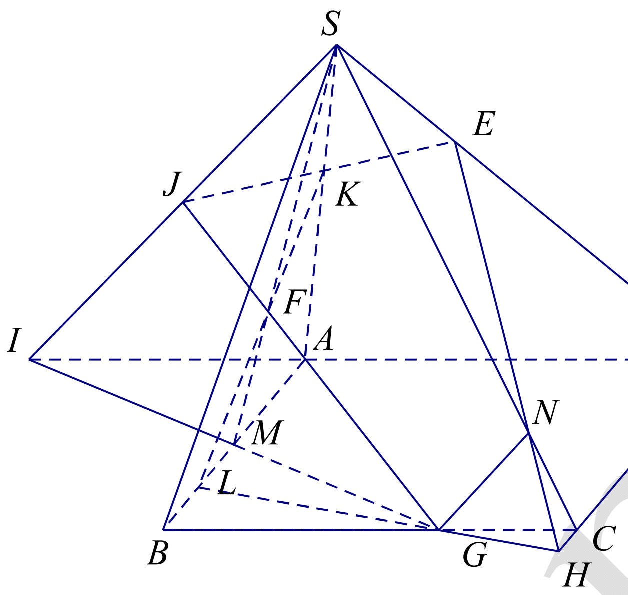
Trong mặt phẳng (SA_1A_k), gọi B_k $(k=3,4,...,n-1)$ là giao điểm của SA_k với B_1I_k.

Do $B_k\in B_1I_k\subset(B_1B_2B_n)$ nên B_k là giao điểm của SA_k $(k=3,4,...,n-1)$ với mặt phẳng $(B_1B_2B_n)$.

Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi $(B_1B_2B_n)$ là đa giác $C_2B_2...B_nC_n$.

Câu 38. **Đáp án C**.

Cách 1:



Gọi M là trung điểm của AB, khi đó S, F, M thẳng hàng.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I là giao điểm của MG với AD. Khi đó $SI = (SMG) \cap (SAD)$.

Trong mặt phẳng (SMG), gọi J là giao điểm của FG với SI. Ta thấy J thuộc FG nên J thuộc (EFG). Trong (SAD), gọi K là giao điểm của JE với SA. Trong mặt phẳng (SAB), gọi L là giao điểm của KF với AB.

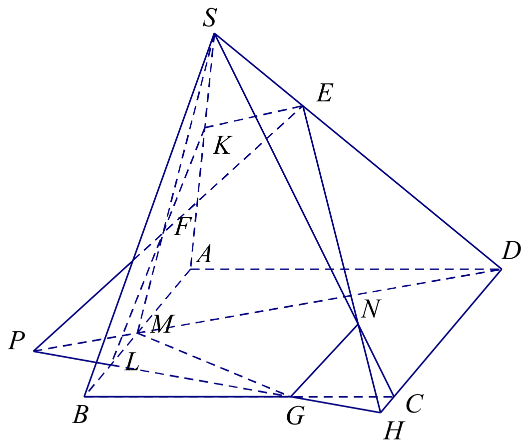
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H là giao điểm của LG với CD. Trong mặt phẳng (SCD), gọi N là giao điểm của EH với SC.

Ta có: $\begin{cases} (EFG) \cap (ABCD) = LG; (EFG) \cap (SBC) = GN \\ (EFG) \cap (SCD) = NE; (EFG) \cap (SAD) = EK \\ (EFG) \cap (SAB) = KL \end{cases}$.

Vậy ngũ giác $LGNEK$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Chú ý: Mấu chốt của ví dụ trên là việc dựng được điểm J là giao điểm của FG với (SAD) (thông qua việc dựng giao tuyến SI của mặt phẳng (SFG) với mặt phẳng (SAD)). Có thể dựng thiết diện trên bằng nhiều cách với việc dựng giao điểm (khác E, F, G) của một trong các đường thẳng EF, FG; hoặc GE với một mặt của hình chóp. Sau đây, tôi xin trình bày cách hai, điểm mấu chốt là xác định giao điểm của EF với mặt phẳng $(ABCD)$.

Cách 2:



Trong mặt phẳng (SMD), gọi P là giao điểm của EF với MD.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H,L là giao điểm của P,G với CD, AB.

Trong mặt phẳng (SAB), gọi K là giao điểm của LF với SA.

Trong mặt phẳng (SCD), gọi N là giao điểm của EH với SC.

Ta có: $\begin{cases}(EFG)\cap(ABCD)=LG;(EFG)\cap(SBC)=GN \\ (EFG)\cap(SCD)=NE;(EFG)\cap(SAD)=EK \\ (EFG)\cap(SAB)=KL\end{cases}$.

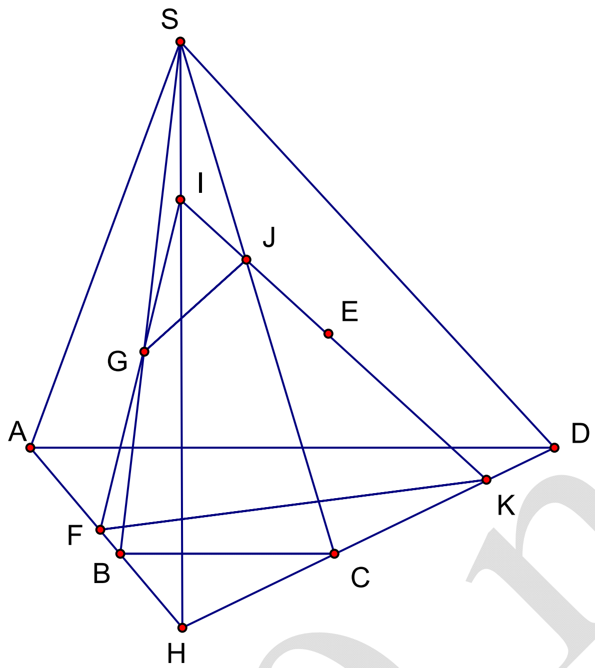
Vậy ngũ giác $LGNEK$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Câu 39. **Đáp án B.**

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H là giao điểm của AB và CD. Trong mặt phẳng (SAB), gọi I là giao điểm của FG và SH.

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1:



Trong mặt phẳng (SCD), IE cắt SC tại J và cắt đoạn CD tại K.

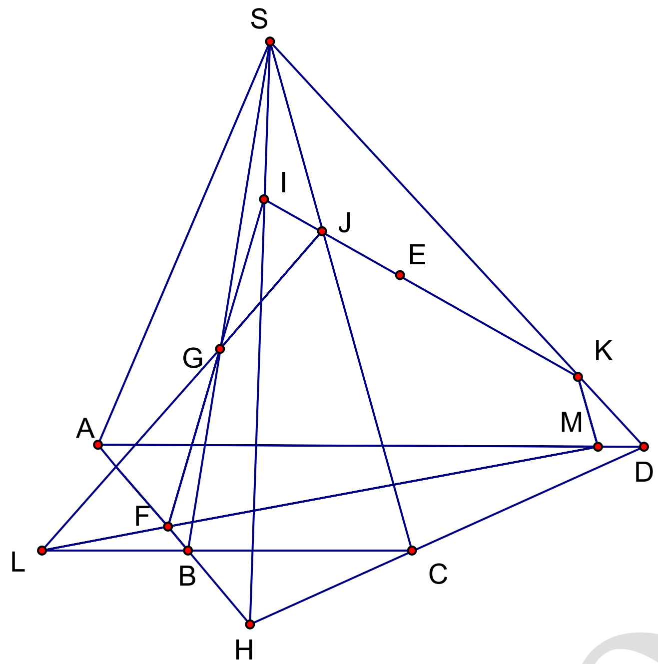
Ta có $J \in IE \subset (EFG)$ nên J là giao điểm của (EFG) với SC,

$K \in IE \subset (EFG)$ nên K là giao điểm của (EFG) với CD.

Ta có $\begin{cases} (EFG) \cap (ABCD) = FK;\ (EFG) \cap (SAB) = FG \\ (EFG) \cap (SBC) = GJ;\ (EFG) \cap (SCD) = JK \end{cases}$

Suy ra tứ giác $KFGJ$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Trường hợp 2:



Trong mặt phẳng (SCD), IE cắt SC tại J và cắt đoạn SD tại K (cắt CD tại một điểm nằm ngoài đoạn CD).

Trong mặt phẳng (SBC) :

Nếu GJ song song với BC thì ta có: $\frac{BG}{GS}=\frac{CJ}{JS}$. Gọi T là giao điểm của IE với CD.

Áp dụng định lí Menelaus vào các tam giác SBH và SCH ta có

$\frac{FB}{FH}.\frac{IH}{IS}.\frac{GS}{GB}=1=\frac{TC}{TH}.\frac{IH}{IS}.\frac{JS}{JC}\Rightarrow\frac{FB}{FH}=\frac{TC}{TH}$. Điều này chỉ xảy ra khi T thuộc đoạn CD (vô lí)

Do vậy GJ cắt BC, giả sử tại L.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi M là giao điểm của LF với AD.

Ta có $\begin{cases}(EFG)\cap(ABCD)=FM;\,(EFG)\cap(SAB)=FG\\(EFG)\cap(SBC)=GJ;\ (EFG)\cap(SCD)=JK\\(EFG)\cap(SAD)=KM\end{cases}$

Suy ra ngũ giác $KJGFM$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

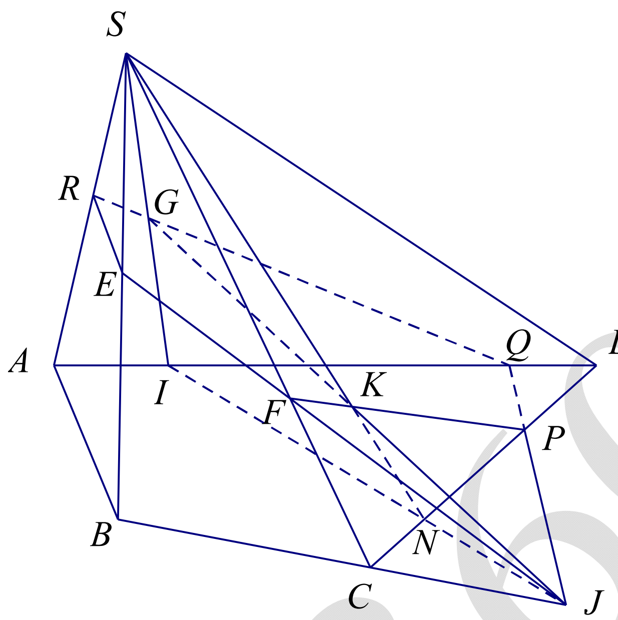
Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) hoặc là tứ giác hoặc là ngũ giác.

Câu 40. **Đáp án B.**

Trong mặt phẳng (SBC) , gọi J là giao điểm của EF với BC . Trong mặt phẳng (SAD) , gọi I là giao điểm của SG với AD . Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi N là giao điểm của IJ với CD . Trong mặt phẳng (SIJ) , gọi K là giáo điểm của JG với SN .

Trong mặt phẳng (SCD) , có hai khả năng xảy ra như sau:

Trường hợp 1: FK cắt đoạn CD tại P .

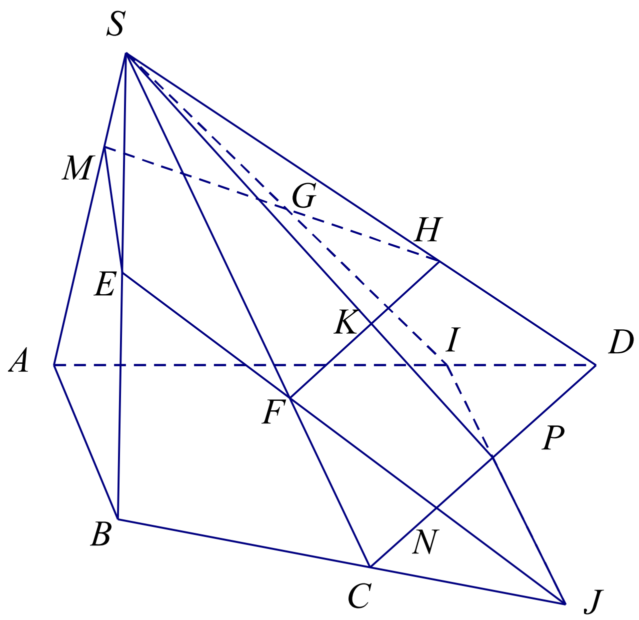


Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi Q là giao điểm của JP với AD . Trong mặt phẳng (SAD) , gọi R là giao điểm của QG với SA .

Ta có $\begin{cases} (EFG)\cap(ABCD)=PQ;\ (EFG)\cap(SAD)=QR \\ (EFG)\cap(SAB)=RE;\ (EFG)\cap(SBC)=EF \\ (EFG)\cap(SCD)=FP \end{cases}$

Trường hợp này , ngũ giác $REFPQ$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (EFG).

Trường hợp 2: FK cắt SD tại H (FK không cắt đoạn CD).



Trong mặt phẳng (SAD), gọi M là giao điểm của HG với SA (HG không thể cắt đoạn AD vì giả sử ngược lại HG cắt cạnh AD tại O, khi đó JO sẽ cắt cạnh CD (vô lí vì (EFG) đã cắt cạnh SC, SD)).

Khi đó $\begin{cases} (EFG)\cap(SCD) = FH; (EFG)\cap(SAD) = MH \\ (EFG)\cap(SAB) = ME;\ (EFG)\cap(SBC) = EF \end{cases}$

Trường hợp này, tứ giác $MEFH$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Câu 41. **Đáp án A.**

Trong mặt phẳng (BCD), gọi I là giao điểm của NP với CD.

Trong mặt phẳng (ACD), gọi Q là giao điểm của AD và MI. Suy ra Q là giao điểm của AD với (MNP). Khi đó, tứ giác $MNPQ$ là thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Trong tam giác BCI ta có P là trọng tâm của tam giác suy ra D là trung điểm của CI.

Trong tam giác ACI có Q là trọng tâm của tam giác nên $\dfrac{QA}{QD} = 2$.

Ta có $\dfrac{IP}{IN} = \dfrac{IQ}{IM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow PQ//MN$.

Suy ra $MNPQ$ là hình thang với đáy lớn MN.

Ta có: $AQ = 4a, AM = 3a = MN, PQ = 2a$. Áp dụng định lí cosin trong tam giác MAQ ta có:

$MQ^2 = AM^2 + AQ^2 - 2AM.AQ.\cos 60^0 = 16a^2 + 9a^2 - 12a^2 = 13a^2 \Rightarrow MQ = a\sqrt{13}$.

Tương tự ta cũng tính được $NP = a\sqrt{13}$.

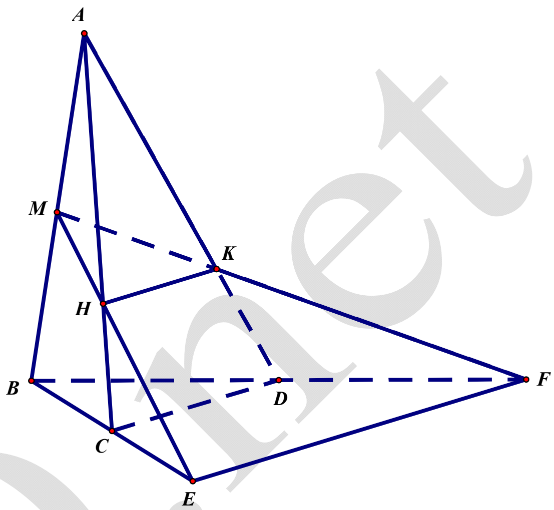
Dễ thấy $MNPQ$ là hình thang cân. Do đó:

$$S = \frac{(MN + PQ)\sqrt{MQ^2 - \left(\frac{MN - PQ}{2}\right)^2}}{2} = \frac{5a^2\sqrt{51}}{4}.$$

Câu 42. **Đáp án C.**

Trong mặt phẳng (ABC), gọi H là giao điểm của ME với AC.

Trong mặt phẳng (ABD), gọi K là giao điểm của MF và AD.



Ta có: $\begin{cases}(MEF)\cap(ABC) = MH\\(MEF)\cap(ABD) = MK\\(MEF)\cap(ACD) = HK\end{cases}$.

Do đó tam giác MHK là thiết diện của tứ diện cắt bởi (MEF).

Dễ thấy H, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABE và ABF.

Ta có: $AH = AK = HK = \frac{2a}{3}$.

Xét hai tam giác AMH và AMK có AM chung, $\widehat{MAH} = \widehat{MAK} = 60^0, AH = AK = \frac{2a}{3}$ nên hai tam giác này bằng nhau. Suy ra $MH = MK$. Vậy tam giác MHK cân tại M.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác AMH:

$$MH^2 = AM^2 + AH^2 - 2AMAH.\cos 60^0 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{13a^2}{36} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

Gọi I là trung điểm của đoạn HK. Ta có $MI \perp HK$.

Suy ra: $MI^2 = MH^2 - HI^2 = \frac{13a^2}{36} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow MI = \frac{a}{2}$.

Diện tích thiết diện MHK là: $S = \frac{1}{2}MI.HK = \frac{1}{2}.\frac{2a}{3}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{6}$.

Câu 43. **Đáp án C.**

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi E là giao điểm của MN với DC và F là trung điểm của CD.Dễ thấy Q chính là giao điểm của PE với SD.

Ta có: $ME = BC$. Áp dụng Thales ta có: $\frac{ND}{MF} = \frac{ED}{EF} = \frac{1}{2} \Rightarrow EF = \frac{1}{2}EF$.

Suy ra D là trung điểm EF.

PQ là đường trung bình của tam giác EPF ta có: $\frac{DQ}{PF} = \frac{1}{2}$.

PF là đường trung bình của tam giác CSD ta có: $\frac{DS}{PF} = 2$.

Từ đó suy ra: $\frac{SD}{DQ}=4\Rightarrow\frac{SQ}{SD}=\frac{3}{4}$.

Câu 44. **Đáp án B.**

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I là giao điểm của MN với AO.

Dễ thấy H chính là giao điểm của PO với SC.

Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên I là trung điểm AO. Suy ra $\frac{AI}{AC}=\frac{1}{4}$ và PI là đường trung bình của tam giác OSA. Do đó: $IH//SA$.

Áp dụng định lí Thales ta có: $\frac{SH}{SD}=\frac{AI}{AC}=\frac{1}{4}$.

Câu 45. **Đáp án D.**

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $I=BD\cap MN, O=AC\cap BD$.

Dễ thấy R chính là giao điểm của IP với SB.

Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên I là trung điểm DO. Suy ra $\frac{DI}{IB}=\frac{1}{3}$.

Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác SBD ta có:

$$\frac{BR}{RS}.\frac{PS}{PD}.\frac{BI}{ID}=1\Rightarrow\frac{BR}{RS}.2.\frac{1}{3}=1\Rightarrow\frac{BR}{RS}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{SR}{SB}=\frac{2}{5}$$