Giao tuyến của (P) với (ABC) là $MN//AB$.

Tương tự $NP//MQ//CD$. Suy ra tứ giác $ABCD$ là hình bình hành và $\left(\widehat{NM;NP}\right)=60^{\circ}$

Có $\frac{MN}{AB}=\frac{MC}{CB}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN=\frac{1}{3}AB=2$; $\frac{NP}{CD}=\frac{AN}{AC}=\frac{BM}{BC}=\frac{2}{3}\Rightarrow NP=\frac{2}{3}CD=\frac{2}{3}.3=2$.

$\Rightarrow S_{MNPQ}=MN.NP.\sin\widehat{MNP}=2.2.\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB\perp CD$, $AB=CD=6$; M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=xBC\,(0<x<1)$. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, AC, AD, BD tại M, N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác $MNPQ$ là:

A. 9. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 12.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\frac{MN}{AB}=\frac{CM}{CB}=x\Rightarrow MN=xAB=6x$.

$\frac{NP}{CD}=\frac{AN}{AC}=\frac{BM}{BC}=\frac{BC-CM}{BC}=1-\frac{CM}{BC}=1-x\Rightarrow NP=6(1-x)$.

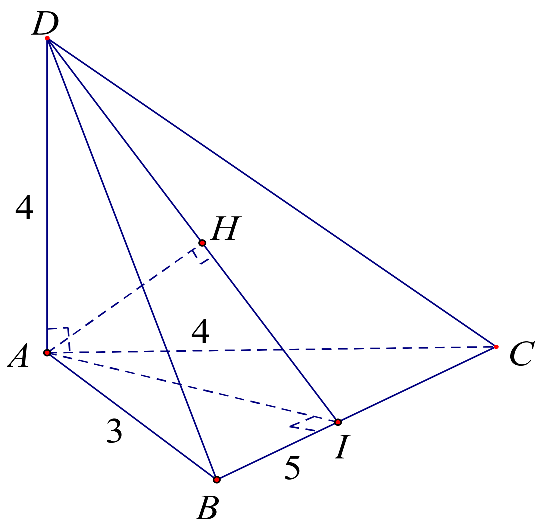
$\Rightarrow S_{MNPQ}=36x(1-x)=9-36\left(\frac{1}{4}-x+x^2\right)=9-36\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\le 9\Rightarrow \max S_{MNPQ}=9$.

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA\perp(ABC)$, $AC=AD=4$, $AB=3$, $CD=5$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

A. $\frac{12}{5}$. **B.** $\frac{12}{\sqrt{34}}$. **C.** $\frac{6}{\sqrt{34}}$. **D.** $\frac{\sqrt{34}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Vì $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên ΔABC vuông tại A.

Cách 1: Sử dụng tính chất tam giác vuông

Dựng $AI \perp BC \Rightarrow AI.BC = AB.AC \Rightarrow AI = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{3.4}{5} = \dfrac{12}{5}$

Dựng $AH \perp DI \Rightarrow AH \perp (BCD) \Rightarrow AH = d\left(A;(BCD)\right)$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{\frac{144}{25}} = \frac{1}{16} + \frac{25}{144} = \frac{34}{144}$$

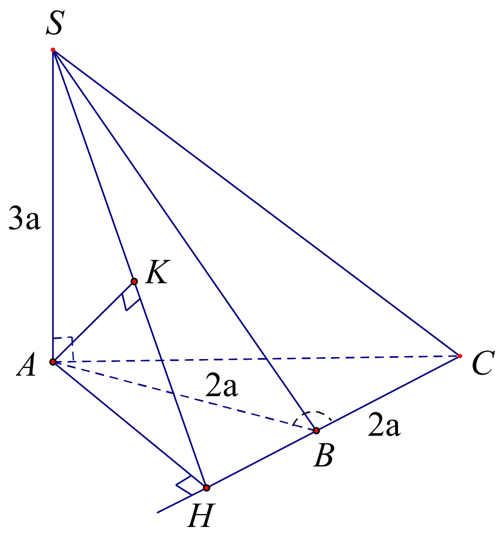
$$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{34}} = \frac{12}{\sqrt{34}}.$$

Cách 2: Vì tứ diện $ABCD$ vuông tại A nên áp dụng tính chất của tứ diện vuông ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \Rightarrow AH = \frac{12}{\sqrt{34}}.$$

Nhận xét: Trong 2 cách trên thì cách 2 nhanh hơn nhiều khi sử dụng tính chất tứ diện vuông.

Câu 12: **Đáp án D.**



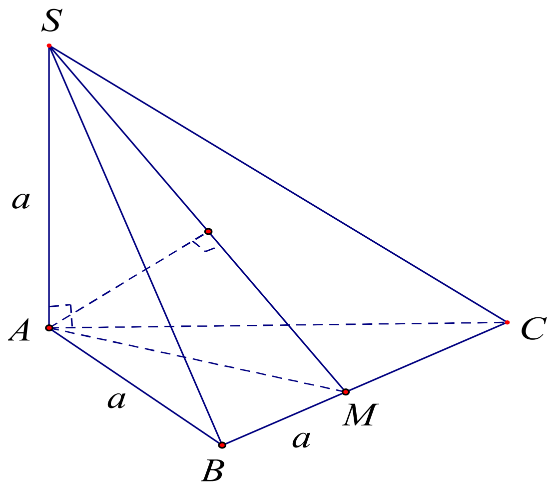
Kẻ $AH \perp BC$ và $AK \perp SH$.
Ta có: $BC \perp AH$ và
$BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK = d(A;(SBC))$

Trong tam giác vuông BAH ta có: $AH = AB.\sin 60° = a\sqrt{3}$.
Trong tam giác vuông SAH ta có:
$AK = \dfrac{AS.AH}{SH} = \dfrac{3a.a\sqrt{3}}{\sqrt{9a^2+3a^2}} = \dfrac{3}{2}a \Rightarrow d(A;(SBC)) = \dfrac{3}{2}a.$

Nhận xét: Trong bài này ta sử dụng tính chất tam giác vuông (ΔSAH) để tính khoảng cách $d(A;(SBC))$. Vậy có thể sử dụng tính chất của tứ diện vuông dduocjw không ?

Câu trả lời là được. Vì nếu lấy điểm H trên tia CB sao cho $\widehat{CAH} = 90°, \widehat{CAB} = \widehat{ACB} = 30°$ nên $\widehat{ABH} = 60°$, mặt khác $\widehat{ABH} = 60° \Rightarrow \Delta ABH$ đều $\Rightarrow AH = 2a$,
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos 120° = 4a^2 + 4a^2 - 4a^2 = 4a^2$.
Sau đó sử dụng tính chất tứ diện vuông cho tứ diện $SAHC$ ta có:
$\dfrac{1}{d^2(A;(SBC))} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AC^2}$. Tính được $d(A;(SBC)) = \dfrac{3a}{2}$.

Câu 13: **Đáp án A.**



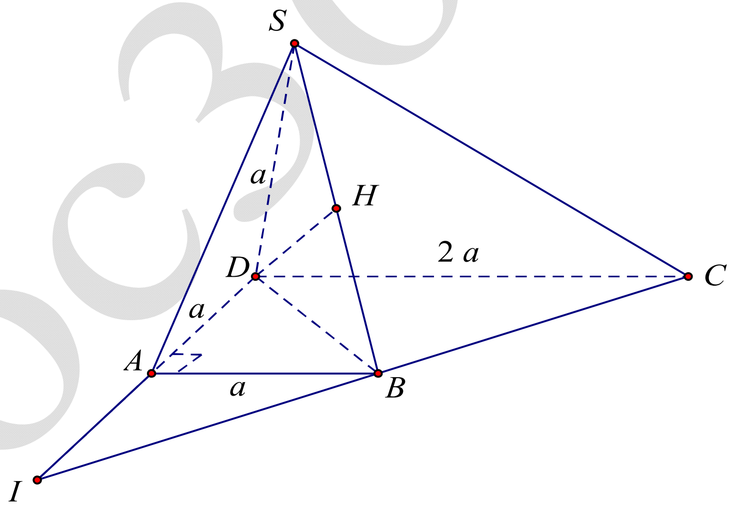
Gọi M là trung điểm BC. Do ΔABC đều nên $AM \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAM)$

Dựng $AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = d\left(A;(SBC)\right)$.

Trong tam giác vuông SAM ta có:

Nhận xét: Ta cũng có thể sử dụng tính chất tứ diện vuông bằng cách sử dụng them D thuộc tia BC sao cho $\widehat{CAD} = 90°$.

Câu 14: **Đáp án C.**



Kẻ dài AD cắt BC tại I.

Ta có: AB là đường trung bình của ΔIDC $\Rightarrow DI = 2a$.

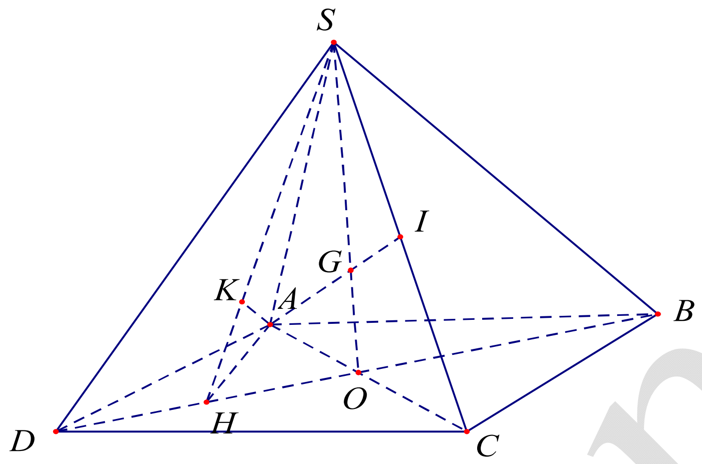
$d\left(A;(SBC)\right) = d\left(A;(SIC)\right) = \frac{1}{2} d\left(D;(SIC)\right)$

Áp dụng tính chất tứ diện vuông cho tứ diện SIC ta có:

$$\frac{1}{d^2\left(D;(SIC)\right)} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{6}{4a^2} \Rightarrow d\left(D;(SIC)\right) = \frac{2a}{\sqrt{6}} \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Nhận xét: Ta cũng có thể sử dụng tính chất tam giác vuông bằng cách dựng $DH \perp (SBC)$ và DH là khoảng cách cần tìm.

Câu 15: **Đáp án B.**



Kẻ $AH \perp BD$ và $AK \perp SH$.

Ta có $BD \perp SH$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAH) \Rightarrow DB \perp AK$

Ta có: $AK + SH$ và $BD \perp AK$ nên $AK \perp (SBD)$

ΔABD vuông $\Rightarrow AH = \dfrac{AD.AB}{BD} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

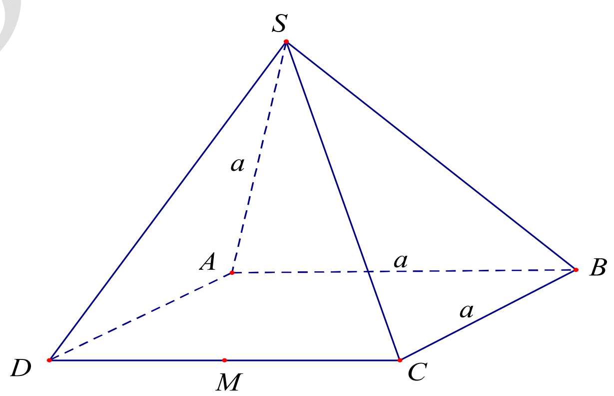
ΔSAH vuông $\Rightarrow AK = \dfrac{SA.AH}{SH} = \dfrac{a.\dfrac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{a^2 + \dfrac{4a^2}{5}}} = \dfrac{2a}{3}$

Gọi $O = AC \cap BD$, SO cắt AI tại G $\Rightarrow G$ là trọng tâm ΔSAC

$\Rightarrow \dfrac{d(I;(SBD))}{d(A;(SBD))} = \dfrac{GI}{GA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d(I;(SBD)) = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{a}{3}$.

Câu 16: **Đáp án A.**

$d(SB;CD) = d(CD;(SAB)) = d(C;(SAB)) = a.$

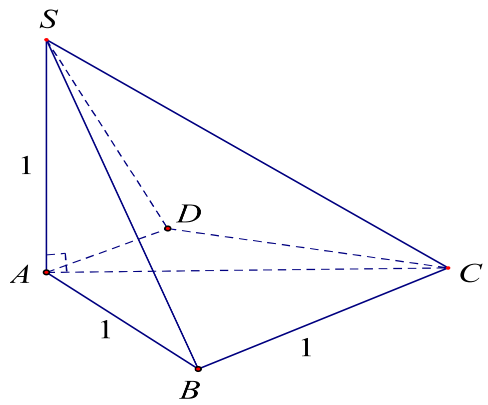


Câu 17: **Đáp án B.**

(Hình vẽ câu 16)

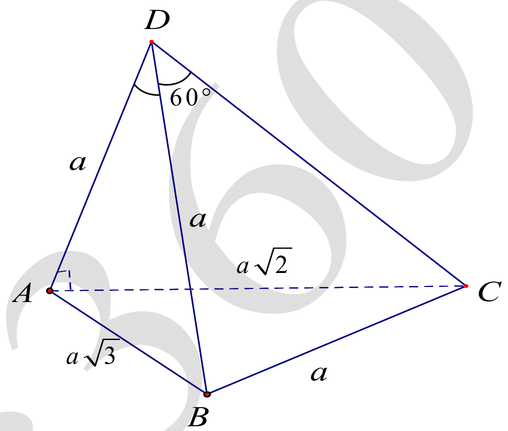
$d\left(M;\left(SAB\right)\right)=d\left(C;\left(SAB\right)\right)=a.$

Câu 18: **Đáp án B.**



Ta có $\begin{cases} SA\perp AB \\ SA\perp BC \end{cases} \Rightarrow SA\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow SA\perp AC\Rightarrow AC=\sqrt{2}\Rightarrow SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{3}.$

Câu 19: **Đáp án D.**



Gỉa sử $DA=DB=DC=a\Rightarrow BC=a, AC=a\sqrt{2}, AB=a\sqrt{3}$

$S_{ABD}=\frac{1}{2}DA.DB\sin 120°=\frac{1}{2}a^2.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$S_{BCD}=\frac{1}{2}DB.DC\sin 60°=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$S_{ACD}=\frac{1}{2}DA.DC=\frac{1}{2}a^2$

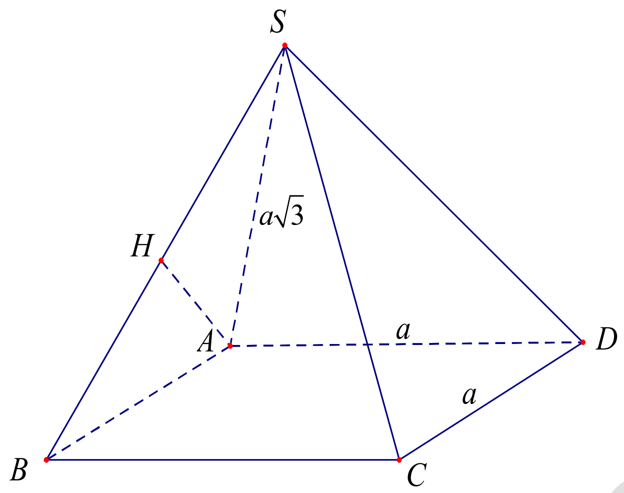
ΔABC có $AC^2+BC^2=AB^2$ (cùng bằng $3a^2$) $\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}AC.BC=\frac{1}{2}a\sqrt{2}.a=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$

So sánh 4 kết quả trên ta thấy $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ là lớn nhất nên chọn **D.**

Câu 20: **Đáp án C.**

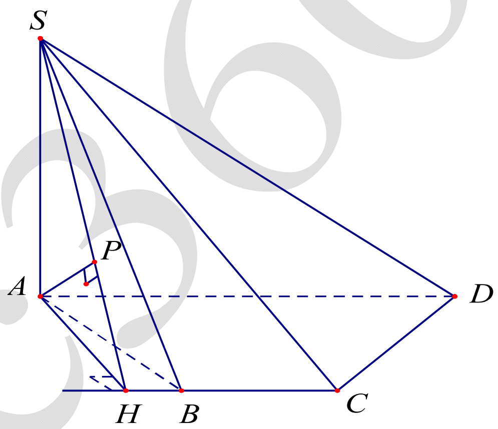
Câu 21: **Đáp án B.**



Dựng $AH \perp SB$. Ta có: $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC\left(vì\ BC \perp (SAB)\right) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = AH$

Áp dụng tính chất cho tam giác vuông SAB ta có: $AH = \dfrac{SA.AB}{SB} = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 22: **Đáp án C.**



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, dựng $AH \perp BC$ t ại $H \Rightarrow BC \perp (SAH)$

Trong mặt phẳng (SAH). dựng $AP \perp SH \Rightarrow AP \perp (SBC)$

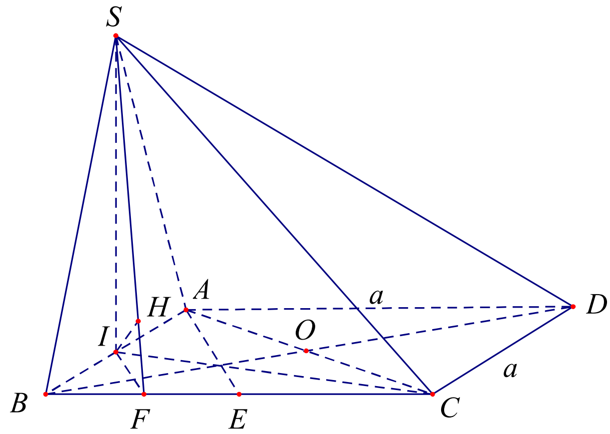
tại $P \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = AP$

Mà $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{AP^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Câu 23: **Đ áp án D.**

Ta c ó: $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2} \Rightarrow h = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

Câu 24: **Đáp án A.**



Ta có: $SI \perp AB, (SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp (ABCD)$

Gọi E là trung điểm của BC, F là trung điểm của

Ta có $AE \perp BC, IF // AE \Rightarrow IF \perp BC$

$BC \perp IF, BC \perp SI \Rightarrow BC \perp (SBC)$

Trong mặt phẳng (SIF), dựng $IH \perp SF$ và $H \in SF$

Ta có $IH \perp SF, IH \perp BC \Rightarrow IH \perp (SBC)$

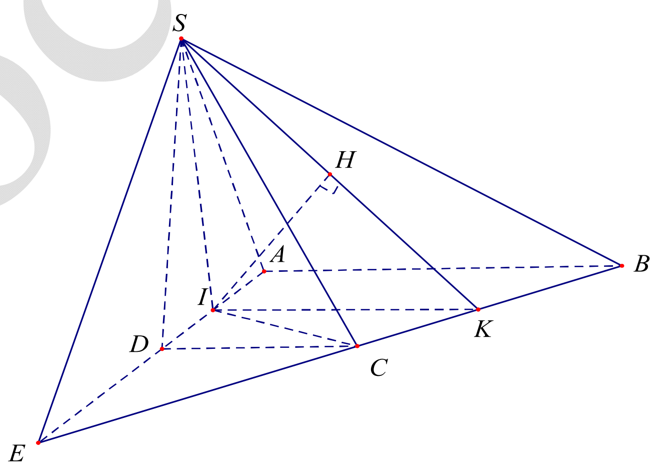
Do đó $d(I;(SBC)) = IH$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCI}$ nên

$\widehat{SCI} = 60°, CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SI = CI.\tan\widehat{SCI} = \dfrac{3a}{2}$

$AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow IF = \dfrac{AE}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Từ đó $\dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{1}{IS^2} + \dfrac{1}{IF^2} = \dfrac{4}{9a^2} + \dfrac{16}{3a^2} = \dfrac{52}{9a^2} \Rightarrow IH = \dfrac{3a}{\sqrt{52}} \Rightarrow d(I;(SBC)) = IH = \dfrac{3a}{\sqrt{52}} = \dfrac{3a\sqrt{13}}{26}$

Câu 25: Đáp án D.



Ta có $\begin{cases}(SBI) \perp (ABCD) \\ (SCI) \perp (ABCD)\end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, dựng $IK \perp BC, K \in BC$

Trong mặt phẳng (SIK), dựng $IH \perp SK, H \in SK$

Từ $IH \perp (SBC) \Rightarrow d(I;(SBC)) = IB$

$$S_{IBC} = S_{ABCD} - S_{DIC} - S_{ABI} = 3a^2 - \frac{a^2}{2} - a^2 = \frac{3a^2}{2}$$

$$BC = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow IK = \frac{2S_{IBC}}{BC} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$$

Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SKI}$. Nên

$$\widehat{SKI} = 60° \Rightarrow SI = IK.\tan\widehat{SKI} = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$$

Ta có: $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IS^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{5}{27a^2} + \frac{5}{9a^2} = \frac{20}{27a^2} \Rightarrow d(I;(SBC)) = IH = \frac{3a\sqrt{15}}{10}$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi E là giao điểm của AD và BC thì $E = AI \cap (SBC)$.

$$\Rightarrow \frac{d(A;(SBC))}{d(I;(SBC))} = \frac{EA}{EI} = \frac{4}{3} \Rightarrow d(A;(SBC)) = \frac{4}{3}d(I;(SBC)) = \frac{2a\sqrt{15}}{5}.$$

Nhận xét: Sử dụng tỉ số khoảng cách ta có thể tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng thong qua điểm khác, quan trọng là biết xuất phát từ điểm nào trước, Từ dấu hiệu $SI \perp (ABCD)$, ta chọn tính khoảng cách từ điểm I đến (SBC) sau đó dựa vào tỉ số khoảng cách suy ra khoảng cách cần tìm.