Hướng dẫn giải chi tiết

Trong đáp án cho các bài tập dưới đây, có nhiều bài tôi chỉ nêu việc áp dụng các kết quả đã trình bày ở phần lí thuyết và ví dụ. Lời giải đầy đủ hoặc việc sử dụng MTCT xin dành lại cho độc giả.

DẠNG 1. Bài tập lí thuyết.

Câu 1: **Đáp án A.**
Xem lại định nghĩa dãy số có giới hạn 0.

Câu 2: **Đáp án B.**
Xem lại định nghĩa dãy có giới hạn $+\infty$.

Câu 3: **Đáp án C.**
Xem lại định nghĩa dãy có giới hạn hữu hạn.

Câu 4: **Đáp án D.**
Xem lại định lí 4.2.

Câu 5: **Đáp án A.**
Xem lại kết quả về dãy số có giới hạn $+\infty$.

Câu 6: **Đáp án A.**
Nếu $q=1$ thì $\lim q^n = \lim 1 = 1 \neq 0$.

Câu 7: **Đáp án C.**
Ta có : $\lim \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} = \dfrac{3\lim u_n - 1}{\lim u_n + 1} = \dfrac{3.3-1}{3+1} = \dfrac{8}{4} = 2$.

Câu 8: **Đáp án C.**
Ta có : $\dfrac{u_n+1}{3u_n^2+5} = \dfrac{\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_n^2}}{3+\dfrac{5}{u_n^2}}$. Vì $\lim u_n = +\infty$ nên $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$, $\lim \dfrac{1}{u_n^2} = 0$.

Vậy $\lim \dfrac{u_n+1}{3u_n^2+5} = \dfrac{0+0}{3+0} = \dfrac{0}{3} = 0$.

DẠNG 2. Bài tập tính giới hạn dãy số cho bởi công thức.

Câu 9: **Đáp án D.**
Ta có : $\lim s_n = \lim \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Bổ sung :

a) Ta chứng minh dãy số $(\sin n)$ không có giới hạn. Thật vậy, vì $|\sin n| \le 1$ nên nếu dãy số $(\sin n)$ có giới hạn thì giới hạn đó hữu hạn.

Giả sử $\lim \sin n = L$. Suy ra $\lim \sin(n+2) = L$.

Do đó : $0 = \lim\left[\sin(n+2) - \sin n\right] = 2\sin 1.\lim \cos(n+1)$

$\Rightarrow \lim \cos(n+1) = 0 \Rightarrow \lim \cos n = 0 \Rightarrow \lim \cos(n+2) = 0$

$\Rightarrow 0=\lim\left[\cos(n+2)-\cos n\right]=-2\sin 1.\sin(n+1)$

$\Rightarrow \sin(n+1)=0$. Vậy ta có : $1=\lim\left(\sin^2(n+1)+\cos^2(n+1)\right)=0+0=0$ (vô lý). Suy ra đpcm.

b) Chứng minh tương tự, ta có dãy số $(\cos n)$ không có giới hạn.

c) Ta chứng minh dãy số $\left((-1)^n\right)$ không có giới hạn hữu hạn.

Thật vậy, trên trục số, các số hạng của dãy số đó được biểu diễn bởi hai điểm -1 và 1. Khi n tăng lên, các điểm

Câu 10: Đáp án D

Vì $1,02>1$ nên $\lim(1,02)^n=+\infty$. (Các dãy số còn lại đều có $|q|<1$ nên đều có giới hạn bằng 0).

Câu 11: Đáp án A.

Vì $\lim\frac{1}{n^3}=0$ nên $\lim|u_n-1|=0$. Suy ra : $\lim u_n=1$.

Câu 12: Đáp án C.

Vì $3n^2-n$ có $a_2=3>0$ nên $\lim(3n^2-n)=+\infty$.

(Số hạng tổng quát của các dãy còn lại có hệ số của lũy thừa bậc cao nhất là số âm nên giới hạn của các dãy đó đều bằng $-\infty$.)

Câu 13: Đáp án B.

Bậc của tử và mẫu thức đều bằng 3 nên dãy có giới hạn hữu hạn. Hệ số của n^3 trên tử bằng $2^2.1=4$, hệ số của n^3 dưới mẫu bằng $1.2=2$ nên giới hạn là $\frac{4}{2}=2$.

Câu 14: Đáp án A.

Phân thức $\frac{n^2+3n^3+2}{n^2+n}$ có bậc của tử thức cao hơn bậc của mẫu thức, đồng thời hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của tử thức và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của mẫu thức đều dương nên suy ra giới hạn của dãy số tương ứng bằng $+\infty$.

(Phân thức $\frac{n^3+2n-1}{n-2n^3}$ có bậc tử bằng bậc mẫu nên giới hạn dãy số tương ứng bằng $\frac{-1}{2}$. Phân thức $\frac{2n^2-3n}{n^3+3n}$ có bậc của tử thấp hơn bậc của mẫu nên giới hạn dãy số tương ứng bằng 0. Phân thức $\frac{n^2-n+1}{1-2n}$ có bậc tử lớn hơn bậc mẫu nhưng hệ số của lũy thừa bậc cao nhất trên tử và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất dưới mẫu trái dấu nhau nên giới hạn dãy số tương ứng bằng $-\infty$.)

Câu 15: Đáp án D.

+ Nhận xét : $\left|\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1}\right|\le\frac{n^2}{n^3+1}$ mà $\lim\frac{n^2}{n^3+1}=0$ nên $\lim\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1}=0$.

Do đó : $\lim\left(1+\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1}\right)=1$.

+ $\left|\frac{\cos 5n}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}$ mà $\lim\frac{1}{2^n}=0$ nên $\lim\frac{\cos 5n}{2^n}=0$.

Do đó : $\lim\frac{2^n-\cos 5n}{2^n}=\lim\left(1-\frac{\cos 5n}{2^n}\right)=1$.

+ $\left|\frac{\sin^2 3n}{n^2+5}\right|\le\frac{1}{n^2+5}$ mà $\lim\frac{1}{n^2+5}=0$ nên $\lim\frac{\sin^2 3n}{n^2+5}=0$.

Do đó : $\lim\frac{n^2+\sin^2 3n}{n^2+5}=\lim\left(\frac{n^2}{n^2+5}+\frac{\sin^2 3n}{n^2+5}\right)=1$

Vậy ba giới hạn đầu đều có kết quả bằng 1 nên đáp án cần chọn là đáp án D.

($\left|\frac{\cos n}{3^{n+1}}\right|\le\frac{1}{3^{n+1}}$ mà $\lim\frac{1}{3^{n+1}}=0$ nên $\lim\frac{\cos n}{3^{n+1}}=0$.

Do đó : $\lim\frac{3^n+\cos n}{3^{n+1}}=\lim\left(\frac{3^n}{3^{n+1}}+\frac{\cos n}{3^{n+1}}\right)=\frac{1}{3}$.)

Câu 16: Đáp án D.

Vì $\lim n=+\infty$, $\lim\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)=0$ nên không thể áp dụng quy tắc 2. Do đó Nam đã sai ở bước 4. (Quy tắc 2 áp dụng khi $\lim u_n=\pm\infty$ và $\lim v_n=L\ne 0$.)

Câu 17: Đáp án D.

Vì hai căn thức $\sqrt{3n-1}$ và $\sqrt{2n-1}$ đều chứa nhị thức dưới dấu căn mà hệ số của n lại khác nhau nên giới hạn cần tìm bằng $+\infty$ (do $3>2$).

Thật vậy, ta có : $\lim\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{2n-1}\right)=\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{3-\frac{1}{n}}-\sqrt{2-\frac{1}{n}}\right)$.

Vì $\lim\sqrt{n}=+\infty$ và $\lim\left(\sqrt{3-\frac{1}{n}}-\sqrt{2-\frac{1}{n}}\right)=\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$ nên $\lim\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{2n-1}\right)=+\infty$

.

Hoặc độc giả có thể sử dụng MTVT để kiểm tra kết quả trên.

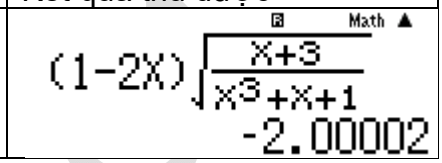
Câu 18: Đáp án B.

Ta thấy tử thức có bậc bằng 1, mẫu thức có bậc cũng bằng 1. Mà hệ số của n trên tử thức bằng 1, hệ số của n dưới mẫu thức bằng 3 nên giới hạn cần tìm bằng $\frac{1}{3}$. Thật vậy ta có :

$$\lim \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{1}{3}$$ hoặc độc giả có thể sử dụng MTCT để kiểm tra kết quả trên.

Câu 19: Đáp án B.

Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình như sau :

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được
(1p2Q))saQ)+3RQ)^3$+Q)+1r10^5=	

Do đó đáp án đúng là đáp án B.

Hoặc ta làm như sau :

$$\lim(1-2n)\sqrt{\frac{n+3}{n^3+n+1}} = \lim\left(\frac{1}{n}-2\right)\sqrt{\frac{n^3+3n^2}{n^3+n+1}} = (-2).1 = -2.$$

Câu 20: Đáp án D.

Nếu sử dụng MTCT, ta sẽ phải tính toán nhiều giới hạn. Tuy nhiên, nếu có kinh nghiệm, ta sẽ thấy ngay đáp án D. Thật vậy, theo kết quả đã biết ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$ là hữu hạn. Hoặc ta có thể sử dụng MTCT để kiểm tra lại kết quả.

Lời giải chính xác : $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right) = \lim \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}$.

Việc tìm các giới hạn trong A, B, C xin dành lại cho độc giả rèn luyện thêm.

Câu 21: Đáp án C.

Lập luận như các bài toán trên, ta thấy ba giới hạn trong A, B, D đều hữu hạn. Vậy đáp án là C.

Lưu ý : $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right) = \lim\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)$.

Ta có thể sử dụng MTCT để kiểm tra lại kết quả.

Lời giải chính xác :

Ta có : $\lim \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1}$. Mà : $\lim \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}} = 1$;

$\lim \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1 = 0$ và $\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1 > 0\ \forall n$ nên $\lim \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n} = +\infty$.

Việc tìm các giới hạn trong A, B, D xin dành lại cho độc giả rèn luyện thêm.

Câu 22: Đáp án B.

Với các bài toán dạng này, việc sử dụng MTCT là khá mất thời gian. Ta thấy tử thức và mẫu thức đều có bậc bằng 1. Mặt khác cả tử thức và mẫu thức đều có giới hạn vô cực.

Do đó ta chia tử và mẫu cho n để được : $\lim \dfrac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n}$

$$=\lim \frac{\sqrt{1-\frac{4}{n}}-\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}-1}=\frac{-1}{\sqrt{3}-1}.$$

Ta có : $\dfrac{-1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{-\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=\dfrac{6-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{7}{2}$. Vậy $m=7,n=2$ nên $m.n=14$.

Câu 23: Đáp án D.

Ta có : $\dfrac{1-2.3^n+6^n}{2^n\left(3^{n+1}-5\right)}=\dfrac{1-2.3^n+6^n}{3.6^n-5.2^n}$. Từ đó dễ thấy $\lim \dfrac{1-2.3^n+6^n}{3.6^n-5.2^n}=\dfrac{1}{3}$.

Thật vậy, $\lim \dfrac{1-2.3^n+6^n}{3.6^n-5.2^n}=\lim \dfrac{\left(\frac{1}{6}\right)^n-2.\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{3-5.\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\dfrac{1}{3}$.

DẠNG 3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.

Câu 24: Đáp án A.

Cấp số nhân lùi vô hạn đã cho có : $u_1=1$ và $q=-\dfrac{1}{2}$. Do đó tổng của cấp số nhân đó là :

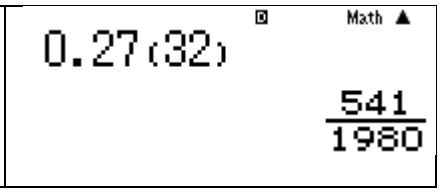
$S=\dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{2}{3}$. Suy ra : $m=2,n=3$. Vậy $m+2n=2+2.3=8$.

Câu 25: Đáp án A

Ta có $0,27323232...=\dfrac{27}{100}+\dfrac{32}{9900}=\dfrac{541}{1980}$.

Hoặc sử dụng MTCT theo hai cách đã trình bày ở phần ví dụ ta được kết quả như sau :

Qui trình bấm máy	Kết quả
0.27323232323232=	Math ▲ 0.27323232323232 $\dfrac{541}{1980}$

0.27Qs32=	

Vậy $m = 541$, do đó chọn đáp án A.

Câu 26: Đáp án C.

Ta có : $\frac{u_1}{1-q} = 2 \Rightarrow u_1 = 2(1-q)\ (1)$ mà : $u_1 + u_2 + u_3 = \frac{9}{4} \Rightarrow u_1.\frac{1-q^3}{1-q} = \frac{9}{4}\ (2)$.

Thay (1) vào (2) ta được : $2(1-q).\frac{1-q^3}{1-q} = \frac{9}{4} \Rightarrow 1-q^3 = \frac{9}{8} \Rightarrow q^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow q = -\frac{1}{2}$.

Vậy $u_1 = 2\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3$.

Câu 27: Đáp án A.

Ta có : $2x + 1 + x^2 - x^3 + ... = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 3x + 1 - x + x^2 - x^3 + ... = \frac{5}{4}$. Vì $|x| < 1$ nên $1 - x + x^2 - x^3 + ...$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 1$ và $q = -x$. Do đó ta có : $3x + 1 - x + x^2 - x^3 + ... = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 3x + \frac{1}{1+x} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 12x^2 + 7x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{97}}{24}$ (t/m $|x| < 1$).

Câu 28: Đáp án C.

Đường cao của tam giác đều cạnh a là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích của tam giác đều cạnh a là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng $a \Rightarrow$ tam giác $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ tam giác $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow ... \Rightarrow$ tam giác $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$.

Và $S_{A_1B_1C_1} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $S_{A_2B_2C_2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{3}{4}$, $S_{A_3B_3C_3} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{3}{4}\right)^2$, ..., $S_{A_nB_nC_n} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

Như vậy (S_n) là một CSN lùi vô hạn với $q = \frac{3}{4}$. Vậy $S_1 + S_2 + ... = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{1-\frac{3}{4}} = \sqrt{3}a^2$.

DẠNG 4. Tìm giới hạn của dãy số cho bởi hệ thức truy hồi.

Câu 29: Đáp án D.

Ta thầy các đáp án chỉ là các giới hạn hữu hạn nên chứng tỏ dãy đã cho có giới hạn hữu hạn. Gọi giới hạn đó là L. Ta có : $L = 1 + \frac{L}{2} \Rightarrow L = 2$. Hoặc theo kết quả đã trình bày trong phần ví dụ, giới hạn của dãy đã cho bằng $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(r = \frac{1}{2}, s = 1\right)$.

Câu 30: Đáp án B.

Cách 1 : Ta có $2u_{n+1} = u_n + 1 \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}$. Đặt $v_n = u_n - 1$.

Khi đó : $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 1) = \frac{1}{2}v_n$. Vậy (v_n) là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2}$. Gọi T_n là tổng n số hạng đầu tiên của (v_n).

Ta có : $T_n = v_1.\frac{1-q^n}{1-q} = v_1.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2v_1.\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Suy ra : $S_n = T_n + n$

$= 2v_1.\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + n$.

Vậy $\lim S_n = +\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình : $A = A + X : Y = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2} : X = Y$.

Bấm r, máy hỏi A? nhập 0, máy hỏi X? nhập 3, máy hỏi Y? Nhập 0, bấm = liên tiếp ta thấy giá trị của A ngày một tăng cao. Vậy chọn đáp án B.

Câu 31: Đáp án C.

Sử dụng MTCT.

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được
QcQraQz+QxR2$QyQzQrQxQyQxQrQcr1=2======= ========== ========== ========== ==========	Math ▲Disp C=$\frac{A+B}{2}$ 1.666666667

Dùng cách tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn $1,(6)$ ta được $1,66666667 = \frac{5}{3}$.

Vậy giới hạn của dãy số trong trường hợp này bằng $\frac{5}{3}$. Do đó chọn đáp án C.

Bổ sung : Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = a$, $u_2 = b$, $u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ với $\forall n \geq 1$, trong đó a, b là các số thực cho trước, $a \leq b$. Người ta chứng minh được rằng $\lim u_n = \frac{a+2b}{3}$.

Câu 32: Đáp án B.

Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn L. Khi đó ta có : $L = L^2 + \frac{L}{2} \Rightarrow 2L^2 = L \Rightarrow \left[\begin{array}{l} L = 0 \\ L = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Tuy nhiên đến đây ta không còn căn cứ để kết luận $L = 0$ hay $L = \frac{1}{2}$.

Ta sử dụng MTCT tương tự như bài tập trên thì thấy rằng giới hạn của dãy số là 0. Vậy chọn đáp án B.

$Y = X^2 + \frac{X}{2}$ $1,706192802.10^{-9}$

Câu 33: Đáp án C.

Cách 1: Ta có

$u_1 = 1^2$; $u_2 = 1 + 2.1 + 1 = 2^2$; $u_3 = 2^2 + 2.2 + 1 = 9 = 3^2$;...

Dự đoán $u_n = n^2$. Khi đó $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = (n+1)^2$. Vậy $u_n = n^2 \ \forall n \geq 1$.

Suy ra $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$. Do đó chọn đáp án C.

Cách 2 : Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình.

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được
QnQrQ)+2Qz+1QyaQnRQ)$QyQ)QrQnQyQzQrQz+1r1 =1===================	Math ▲Disp $\frac{Y}{X}$ $\frac{25}{16}$

Bấm r, máy hỏi X? nhập 1, máy hỏi A? nhập bấm = liên tiếp, theo dõi giá trị của $\frac{Y}{X}$, ta thấy giá trị đó dần về 1. Vậy chọn đáp án C.

hoc360.net

Nhận xét : Ở bài này sẽ phải bấm phím = liên tiếp khá nhiều lần, do khi n chưa đủ lớn thì chênh lệch giữa $(n+1)^2$ và n^2 là khá xa nên giá trị của $\frac{(n+1)^2}{n^2}$ khá xa so với 1.

DẠNG 5. Tìm giới hạn của dãy số có chứa tham số.

Câu 34: **Đáp án C.**

Đây là một bài toán chứa tham số.

Vì là bài toán trắc nghiệm nên có một cách là cho a và b các giá trị cụ thể, rồi sử dụng MTCT để tìm giới hạn, từ đó tìm được đáp án đúng.

Chẳng hạn cho $a=2, b=3$. Khi đó $\frac{a+2b}{3}=\frac{8}{3}$, $\frac{2a+b}{3}=7$ và $a, b, \frac{a+2b}{3}, \frac{2a+b}{3}$ đôi một khác nhau.

Nhập vào màn hình :

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được
QcQraQz+QxR2$QyQzQrQxQyQxQrQcr2=3======== ========== ========== ========== =======	Math ▲Disp C=(A+B)/2 2.666666666

Dùng cách tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,(6)$, ta được $2,(6)=\frac{8}{3}$.

Vậy giới hạn của dãy số trong trường hợp này bằng $\frac{8}{3}$. Do đó chọn đáp án C.

Bổ sung : Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=a$, $u_2=b$, $u_{n+2}=\frac{u_{n+1}+u_n}{2}$ $\forall n\geq 1$, trong đó a, b là các số thực cho trước, $a\leq b$.

a) Chứng minh dãy (u_{2n}) là dãy giảm, còn dãy (u_{2n+1}) là dãy tăng.

b) Chứng minh rằng $|x_{n+2}-x_{n+1}|=\frac{|x_2-x_1|}{2^n}$ $\forall n\geq 1$.

c) Chứng minh rằng $2x_{n+2}+x_{n+1}=2x_2+x_1$ $\forall n\geq 1$.

d) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn và giới hạn đó là $\frac{a+2b}{3}$.

Việc chứng minh bài toán trên xin dành cho độc giả.

Câu 35: **Đáp án A.**

Dễ thấy $\lim u_n=\lim\frac{3n-m}{5n+1}=\frac{3}{5}$ với mọi m.

Câu 36: **Đáp án B.**

Dễ thấy với $a=2$ thì $\lim u_n = \lim \frac{4n^2+n+2}{2n^2+5} = 2$.

Thật vậy :

Nếu $a=0$ thì $\lim u_n = \lim \frac{4n^2+n+2}{5} = +\infty$.

Nếu $a \neq 0$ thì $\lim u_n = \lim \frac{4n^2+n+2}{an^2+5} = \frac{4}{a}$.

Do đó để $\lim u_n = 2$ thì $\frac{4}{a} = 2 \Leftrightarrow a = 2$.

Câu 37: Đáp án D.

Với kết quả đã trình bày trong phần ví dụ, ta thấy để (u_n) có giới hạn hữu hạn thì $a=1$.

Câu 38: Đáp án D.

Từ kết quả đã trình bày trong phần ví dụ, ta thấy cần phải nhân chia với biểu thức liên hợp. Ta có :

$$\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3} = \frac{(a-b)n+2}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+bn+3}} = \frac{a-b+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{b}{n}+\frac{3}{n^2}}}.$$

Suy ra $\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3}\right) = \frac{a-b}{2}$. Do đó để

$\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3}\right) = 2$

$\Leftrightarrow \frac{a-b}{2} = 2 \Leftrightarrow a-b=4$.

Câu 39: Đáp án B.

Ta có : $\lim \frac{\sqrt{an^2+1}-\sqrt{4n-1}}{5n+2} = \frac{\sqrt{a}}{5}$. Do đó ta phải có $\sqrt{a}=10 \Leftrightarrow a=100$.

Câu 40: Đáp án C.

Ta có $\lim\left(2n+a-\sqrt[3]{8n^3+5}\right) = 6 \Leftrightarrow 6-a = \lim\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5}\right)$ mà $\lim\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5}\right)=0$

. Do đó $6-a=0 \Leftrightarrow a=6$.

Câu 41: Đáp án A.

Ta có $\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an-b\right)=0 \Leftrightarrow b = \lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an\right)$. Để $\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an\right)$ hữu hạn

thì $a>0$ (xem lại phần ví dụ).

phần Ví dụ). Ta có $\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)=0$. Vậy $b=0$. Do đó đáp án là A.

DẠNG 1. TÌM SỐ HẠNG CỦA DÃY SỐ MÀ SỐ HẠNG TỔNG QUÁT LÀ TỔNG N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA MỘT DÃY SỐ KHÁC.

Câu 42: Đáp án A.

Lời giải

Theo kết quả đã trình bày trong phần Ví dụ thì $\lim \frac{1+2+3+...+n}{2+4+6+...+2n}=\frac{1}{2}$ do tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai bằng 1, mẫu thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai bằng 2.

Tuy nhiên, ta có thể giải nhanh chóng như sau:

$$\lim \frac{1+2+3+...+n}{2+4+6+...+2n}=\lim \frac{1+2+3+...+\mathrm{n}}{2(1+2+3+...+n)}=\frac{1}{2}.$$

Câu 43: Đáp án A.

Lời giải

Ta thấy tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội bằng 2, mẫu thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội bằng 5. Mà $2<5$ nên theo kết quả trình bày trong phần Ví dụ, giới hạn cần tìm là 0.

Câu 44: Đáp án B.

Lời giải

Ta có:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{2^2-1}{2^2}\times\frac{3^2-1}{3^2}\times...\times\frac{n^2-1}{n^2}$$

$$=\frac{1.3}{2^2}\times\frac{2.4}{3^2}\times\frac{3.5}{4^2}\times...\times\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\times\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}.$$

Vậy $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]=\lim\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$

Câu 45: Đáp án A.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{n!}{(1+1^2)\times(1+2^2)\times...\times(1+n^2)}\le\frac{n!}{1^2\times2^2\times...\times n^2}=\frac{n!}{(1\times2\times...\times n)^2}=\frac{n!}{(n!)^2}=\frac{1}{n!}.$$

Mà $\lim\frac{1}{n!}=0$ nên suy ra: $\lim\frac{n!}{(1+1^2)\times(1+2^2)\times...\times(1+n^2)}=0.$

Câu 46: Đáp án B.

Lời giải

Ta có:

$$u_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}u_k-\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{3(n+1)^2+9(n+1)}{2}-\frac{3n^2+9n}{2}=3n+6=3(n+1)+3.$$

Suy ra $u_n=3n+3.$

Vậy $\lim\frac{1}{nu_n}\sum_{k=1}^{n}u_k=\lim\frac{3n^2+9n}{2n(3n+3)}=\frac{3}{2.3}=\frac{1}{2}.$

Câu 47: **Đáp án C.**

Lời giải

Ta có: $\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{1+3+3^2+...+3^k}{5^{k+2}}=\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{\sum_{i=1}^{k+1}3^{i-1}}{5^{k+2}}$.

Do đó nên rất khó để sử dụng MTCT đối với bài toán này. Ta có:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sum_{i=1}^{k+1}3^{i-1}}{5^{k+2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{k+1}-1}{2.5^{k+2}}=\frac{3}{50}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k-\frac{1}{50}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k=\frac{3}{50}.\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}-\frac{1}{50}\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{17}{200}.$$

Vậy chọn đáp án C.

hoc360.net