Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Đạo hàm của hàm đa thức

Câu 1: **Đáp án** **B.**

$y' = 6x^2 - 18x + 12$.

Câu 2: **Đáp án** **D.**

$y' = -3x^2 + 6mx + 3\left(1 - m^2\right)$.

Câu 3: **Đáp án** **A.**

$y' = 2\left(x^2+1\right) + 2x.\left(3+5x^2\right) + \left(x^2+1\right)^2.10x$

$= \left(4x^3+4x\right)\left(3+5x^2\right) + 10x^5 + 20x^3 + 10x$

$= 30x^5 + 52x^3 + 22x.$

$\Rightarrow a - b + c = 0$.

Câu 4: **Đáp án** **C.**

$y' = 2x\left(x^3+2\right)\left(x^4+3\right) + 3x^2\left(x^2+1\right)\left(x^4+3\right) + 4x^3\left(x^2+1\right)\left(x^3+2\right)$

$= 2x\left(x^7+2x^4+3x^3+6\right) + 3x^2\left(x^6+x^4+3x^2+3\right) + 4x^3\left(x^5+x^3+2x^2+2\right)$

$= 9x^8 + 7x^6 + 12x^5 + 15x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 12x.$

$\Rightarrow a - b + c - d + e - g = 3$.

Câu 5: **Đáp án** **C.**

Câu 6: **Đáp án** **A.**

$$y' = \frac{(-2x+3)(x-1) - \left(-x^2+3x-3\right)}{2(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x}{2(x-1)^2}.$$

Câu 7: **Đáp án** **D.**

$$y' = \frac{\left(6x^2+3\right)\left(x^2-5x+2\right) - \left(2x^3+3x-1\right)(2x-5)}{\left(x^2-5x+2\right)^2} = \frac{-13x^2+10x+1}{\left(x^2-5x+2\right)^2}.$$

$\Rightarrow a + b + c = -2$.

Câu 8: **Đáp án** **A.**

$$y' = \frac{(-2x+2)\left(x^3-2\right) - 3x^2\left(-x^2+2x+3\right)}{\left(x^3-2\right)^2} = \frac{x^4-4x^3-9x^2+4x-4}{\left(x^3-2\right)^2}$$

$\Rightarrow a + b + c + d + e = -12$

Câu 9: **Đáp án** **B.**

$$y' = \sqrt{x^2+1} + (x-2).\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Câu 10: **Đáp án** **D.**

$y' = 2\left(x^6 - 3x^4\right)\left(6x^5 - 12x^3\right) = 12x^{11} - 60x^9 + 72x^7$.

Câu 11: **Đáp án** **A.**

$y' = \dfrac{10x-2}{2\sqrt{5x^2-2x+1}} = \dfrac{5x-1}{\sqrt{5x^2-2x+1}} \Rightarrow T = \dfrac{a}{b} = -5$.

Câu 12: **Đáp án** **C.**

Nhân liên hợp ta có: $y = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{4\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{4\sqrt{x-1}}$.

Câu 13: **Đáp án** **A.**

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x-1).\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2+x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}} = \frac{x+1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}.$$

$\Rightarrow P = a.b = 1$.

Câu 14: **Đáp án** **A.**

$$y' = \frac{\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x-\sqrt{x}\right) - \left(x+\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{2x\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2} = \frac{4\sqrt{x} - 2x^2 - 3}{2x\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x}\right)^2}.$$

Câu 15: **Đáp án** **C.**

Cách 1: Tính $f'(x) = \dfrac{9x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 8x + 4}{4\left(3x^3+2x^2+1\right)\sqrt{3x^3+2x^2+1}} \Rightarrow f'(0) = 1$.

Cách 2: Dùng MTCT ta được kết quả.

Câu 16: **Đáp án** **D.**

Câu 17: **Đáp án** **C.**

Ta có: $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)\ldots(x-2017) - x\left[(x-1)(x-2)\ldots(x-2017)\right]'}{\left[(x-1)(x-2)\ldots(x-2017)\right]^2}$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{(-1)(-2)\ldots(-2017)}{\left[(-1)(-2)\ldots(-2017)\right]^2} = -\frac{1}{2017!}.$$

Câu 18: **Đáp án** **A.**

Ta có: $f(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ $\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x = 1$.

Khi $x>1$: $f'(x)=2x$.

$x<1$: $f'(x)=2$.

Với $x=1$, ta xét: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$; $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2(x-1)}{x-1}=2$.

Vậy $f'(1)=2$.

Câu 19: Đáp án B.

Điều kiện: $x\in[-2;2]$.

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}};\ f'(x)>0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}>x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le x<0\\0\le x<\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow -2\le x<\sqrt{2}.$$

Câu 20: Đáp án D.

$$f'(x)=\frac{-2x^3+1}{(x^3+1)^2}\Rightarrow f'(x)\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}-2x^3+1\le 0\\x\ne -1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Câu 21: Đáp án A.

Ta có: $y=\sqrt{u}$ với $u=x+\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(x+\sqrt{x}\right)'\right]=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right].$$

Câu 22: Đáp án A.

Ta có: $f'(x)=5x^4+3x^2-2\Rightarrow f'(1)+f'(-1)+4f'(0)=4$.

Câu 23: Đáp án A.

Ta có: $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}+2x\Rightarrow f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

Câu 24: Đáp án D.

Ta có: $f'(x)=3\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\right)=\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$.

Câu 25: Đáp án B.

Ta có: $y=u^2$ với $u=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

$$y'=2.\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)'=2.\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=2.\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\frac{-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

.

Câu 26: Đáp án D.

Ta có: $y=u^3$, $u=\dfrac{2x+1}{x-1}$, $u'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}\Rightarrow y'=\dfrac{-9(2x+1)^2}{(x-1)^4}$.

Câu 27: Đáp án C.

$y'=3\left[(m-1)x^2-2(m+2)x-2(m+2)\right]$.

$y'\ge 0\Leftrightarrow (m-1)x^2-2(m+2)x-2(m+2)\ge 0$ (1)

Với $m=1$ thì $(1)\Leftrightarrow -6x-6\ge 0\Leftrightarrow x\le -1\Rightarrow m=1$ (loại).

Với $m\ne 1\Rightarrow (1)$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m>1\\ (m+2)3m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m$ vô nghiệm.

Câu 28: Đáp án D.

Với $x\ne 0$ hàm số luôn có đạo hàm.

Để hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải có đạo hàm tại $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b\Rightarrow b=1$.

Để hàm số liên tục tại $x=0\Rightarrow b=1$.

Xét $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{x^2+x+1}{x+1}-1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+ax+b-1}{x}=a$.

$\Rightarrow a=0$. Vậy $a=0$, $b=1$.

Câu 29: Đáp án C.

$f'(x)=-mx^2+mx-(3-m)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow -mx^2+mx-(3-m)=0\quad (1)$.

Theo bài ra ta có: $\begin{cases}a\ne 0\\ \Delta>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m\ne 0\\ 5m^2-12m>0\\ \dfrac{3-m}{m}>0\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{12}{5}<m<3$.

Câu 30: Đáp án A.

Lập bảng dấu ta được: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & khi\, x<-1, x>1\\ x & khi -1\le x\le 1\end{cases}$.

- Với $x<-1$ hoặc $x>1\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

- Với $-1<x<1\Rightarrow f'(x)=1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -1$ nên hàm số liên tục tại $x=-1$.

Xét $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -1$, $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = 1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x=-1$

.

Bằng cách tương tự ta cũng chỉ ra được hàm số không có đạo hàm tại $x=1$.

Vậy $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & khi\, x<-1, x>1 \\ x & khi -1<x<1 \end{cases}$.

Dạng 2: Đạo hàm các hàm số lượng giác

Câu 31: Đáp án B.

$y' = 2\sin x.\cos^2 x - \sin^3 x = \sin x\left(3\cos^2 x - 1\right)$.

Câu 32: Đáp án C.

$y' = (1+\tan x)(1+\tan x)' = (1+\tan x)\left(1+\tan^2 x\right)$.

Câu 33: Đáp án B.

$y' = \dfrac{-\sin^3 x - 2\sin x.\cos x.\cos x}{2\sin^4 x} = -\dfrac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{2\sin^3 x} = -\dfrac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$.

Câu 34: Đáp án A.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{1-\sin x} \Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - f'\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{4}{3}$.

Câu 35: Đáp án A.

$y' = \dfrac{x\sin x(\cos x + x\sin x) - x\cos x(\sin x - x\cos x)}{(\cos x + x\sin x)^2} = \dfrac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2} \Rightarrow a=1,\ b=0,\ c=0$.

Vậy $T = a+b+c = 1$.

Câu 36: Đáp án D.

$y' = -2\sin 2x.\sin^2\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\sin x.\cos 2x$.

Câu 37: Đáp án B.

$$y' = 2\cot(\cos x)\left[\cot(\cos x)\right]' + \frac{\left(\sin x - \frac{\pi}{2}\right)'}{2\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}} = 2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}.$$

Câu 38: Đáp án A.

$$y' = \frac{x.\cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = (x.\cos x - \sin x)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

Câu 39: **Đáp án** **A.**

Ta có: $y = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x}}$ nên $y' = \frac{-2\sin x.\cos x}{\sin^2 x.\sqrt{\sin^2 x}} = -\frac{\cot x}{|\sin x|}$.

Câu 40: **Đáp án C**

$$y' = -2\sin x.\cos x.\cos(\cos^2 x).\cos(\sin^2 x) - 2\sin x.\cos x.\sin(\cos^2 x).\sin(\sin^2 x)$$

$$= -\sin(2x).\cos(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\sin(2x).\cos(\cos 2x)$$

$\Rightarrow a = -1$.

Câu 41. **Đáp án B.**

Lấy đạo hàm 2 vế ta có: $2f'(2x) - 4\sin x.f(x) + 4\cos x.f'(x) - 2$

Thay $x = 0 \Rightarrow 2 \cdot f'(0) = 4 \cdot f'(0) - 2 \Leftrightarrow f'(0) = 1$.

Câu 42. **Đáp án B.**

$$f'(x) = \frac{-\sin x.\sqrt{\cos 2x} - \cos x\frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(-\sin 2x)}{\cos 2x} = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos 2x}}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in Z$.

Ta biểu diễn được 2 điểm phân biệt trên đường tròn lượng giác.

Câu 43. **Đáp án A.**

$y' = -2(1 + \cot^2 2x)$. Do đó: $y' + 2y^2 + 2 = -2(1 + \cot^2 2x) + 2\cot^2 2x + 2 = 0$

Câu 44. **Đáp án C.**

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^n \cdot \sin\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^{n-1} \cdot \sin\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0\ (1)$

Với $n = 1$ thì giới hạn (1) không tồn tại và $n \geq 2$ thì: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{n-1} \cdot \sin\frac{1}{x}\right) = 0$.

Vậy hàm số có đạo hàm trên R khi $n \geq 2$.

Câu 45. **Đáp án D.**

$f'(x) = 2\sin x.\cos x + 2\cos 2x = \sin 2x + 2\cos 2x$

Đặt $t = \sin 2x + 2\cos x$.

Điều kiện phương trình có nghiệm là: $1^2 + 2^2 \geq t^2 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq t \leq \sqrt{5}$.

Vậy $M = \sqrt{5}, m = -\sqrt{5}$.

Câu 46. **Đáp án C.**

$f'(x) = \sin x + \cos x + 2\sin 2x$

$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin 2x = 1$

Đặt $t=\sin x+\cos x \quad \left(|t|\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow \sin 2x=t^2-1$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow 2t^2+t-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{3}{2}\quad (l)\end{array}\right.$

Với $t=1\Leftrightarrow \sin x+\cos x=1\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in Z)$.

Nghiệm trên cũng là nghiệm của phương trình $(\sin x-1)(\cos x-1)=0$.

Câu 47. **Đáp án B.**

$f'(x)=-2\sin 2x\Rightarrow -2\le f(x)\le 2$

Vậy tập giá trị của hàm số $f'(x)$ là $[-2;2]$.

Câu 48. **Đáp án B.**

$f'(x)=2\sin^3 x-3\cos^3 x$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \tan^3 x=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow \tan x=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$.

Vậy có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 49. **Đáp án D.**

$y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2x\Rightarrow y'=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x=\sin^2 x$

Câu 50. **Đáp án C.**

$y=\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow y'=0\ \forall x$.

Câu 51. **Đáp án C.**

$y=\sin x-\cos x\Rightarrow y'=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$

Câu 52. **Đáp án C.**

$f(x)=\sqrt[3]{\cos 2x}\Rightarrow f^3(x)=\cos 2x\Rightarrow 3.f^2(x).f'(x)=(\cos 2x)'\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2\sin 2x}{3\sqrt[3]{\cos^2 2x}}$

Nên **B** đúng. Vì $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt[3]{\cos\pi}=-1$ nên **C** sai.

Câu 53. **Đáp án D.**

Ta có: $\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos x}=\sqrt{\cos^2\dfrac{x}{2}}=\cos\dfrac{x}{2}$

Tương tự ta có biểu thức tiếp theo: $y=\sqrt{\cos^2\dfrac{x}{8}}=\cos\dfrac{x}{8}\Rightarrow y'=-\dfrac{1}{8}\sin\dfrac{x}{8}$

Câu 54. **Đáp án C.**

$$f'(x)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)-\sin\left(\frac{4\pi}{3}+2x\right)-2\sin 2x$$

$$=-2\cos\frac{2\pi}{3}.\sin 2x-2\cos\frac{4\pi}{3}.\sin 2x-2\sin 2x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right)2\sin 2x=0$$

hoc360.net