

- A. $a^2 + b^2 \leq 4$. B. $a + 2b = 2\sqrt{3}$. C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. D. $a + 2b \geq \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D = \mathbb{R}$

+) $y' = 2 + a \cos x - b \sin x$

+) Áp dụng bất đẳng thức Schwartz ta có $2 - \sqrt{a^2 + b^2} \leq y' \leq 2 + \sqrt{a^2 + b^2}$

+) Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$$y' \geq 0, \forall x \Leftrightarrow 2 - \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 4.$$

1.1.3 Ứng dụng tính đơn điệu của hàm số.

Câu 41. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^3 - 3x^2 - 9x - m = 0$ có đúng 1 nghiệm?

- A. $m < -27$ hoặc $m > 5$. B. $m < -5$ hoặc $m > 27$.
C. $-27 \leq m \leq 5$. D. $-5 \leq m \leq 27$.

Hướng dẫn giải

+) (1) $\Leftrightarrow m = x^3 - 3x^2 - 9x = f(x)$.

+) Bảng biến thiên của $f(x)$ trên \mathbb{R} .

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f(x)'$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	5	-27	$+\infty$	

+) Từ đó suy ra pt có đúng 1 nghiệm khi $m < -27$ hoặc $m > 5$

Câu 42. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1} = x + m$ có nghiệm?

- A. $m \leq 2$. B. $m \geq 2$. C. $m \geq 3$. D. $m \leq 3$.

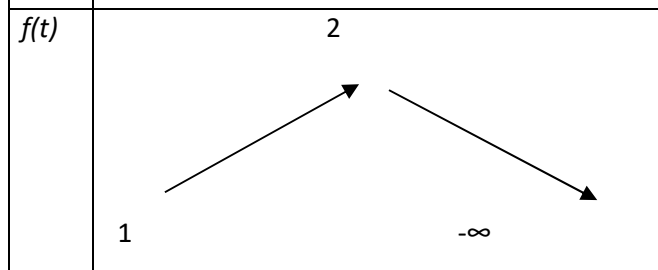
Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \geq 0$.

+) Phương trình thành: $2t = t^2 - 1 + m \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 1$

+) Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 1, t \geq 0; f'(t) = -2t + 2$

+) Bảng biến thiên của $f(t)$

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$		+	0
$f(t)$		2	-
	1		$-\infty$

+) Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi $m \leq 2$.

Câu 43. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = m + 4x - x^2$ có đúng 2 nghiệm dương?

- A. $-3 < m < \sqrt{5}$. B. $1 \leq m \leq 3$. C. $-\sqrt{5} < m < 3$. D. $-3 \leq m < 3$.

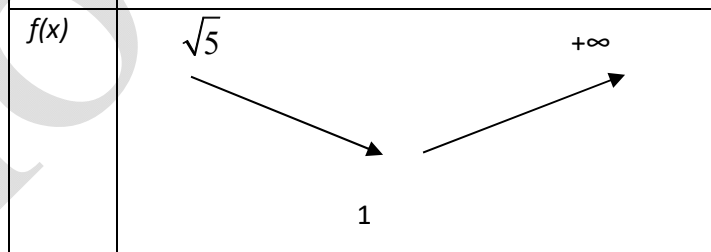
Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

+) $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$

+) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

+) Xét $x > 0$ ta có bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$		$\sqrt{5}$	+
	$\sqrt{5}$		$+\infty$

+) Khi đó phương trình đã cho trở thành $m = t^2 + t - 5 \Leftrightarrow t^2 + t - 5 - m = 0$ (1).

Nếu phương trình (1) có nghiệm t_1, t_2 thì $t_1 + t_2 = -1$. (1) có nhiều nhất 1 nghiệm $t \geq 1$.

+) Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t \in (1; \sqrt{5})$.

+) Đặt $g(t) = t^2 + t - 5$. Ta đi tìm m để phương trình $g(t) = m$ có đúng 1 nghiệm $t \in (1; \sqrt{5})$.

$$g'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in (1; \sqrt{5}).$$

Ta có bảng biến thiên sau

t	1	$\sqrt{5}$	
g'(t)	+		
g(t)		$\sqrt{5}$	

+) Từ BBT suy ra $-3 < m < \sqrt{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 44. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình: $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2 + (m+1)x + m + 1 \geq 0$?

- A. $m \geq -\frac{4}{7}$. B. $m \leq -\frac{4}{7}$. C. $m \leq -1$. D. $m \geq -1$.

Hướng dẫn giải

+) Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$

+) Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow m(x^2 + x + 1) \geq -x - 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{-x-2}{x^2+x+1}$

+) Xét hàm số $f(x) = \frac{-x-2}{x^2+x+1}$ với $1 \leq x \leq 2$

$$\text{Có } f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2]$$

+) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq \max_{[1;2]} f(x) \Leftrightarrow m \geq -\frac{4}{7}$

Câu 45. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình:

$$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm trên đoạn } [1; 3^{\sqrt{3}}] ?$$

- A. $0 \leq m \leq 2$. B. $-1 \leq m \leq 3$. C. $0 \leq m \leq 3$. D. $-1 \leq m \leq 2$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}$.

Điều kiện : $t \geq 1$.

+) Phương trình thành: $t^2 + t - 2m - 2 = 0$ (*)

Khi $x \in [1; 3^{\sqrt{3}}] \Rightarrow t \in [1; 2]$

(*) $\Leftrightarrow f(t) = \frac{t^2 + t - 2}{2} = m$

+) Bảng biến thiên $f(t)$

t	1	2
$f'(t)$	+	
$f(t)$	0	2

+) Từ bảng biến thiên ta có : $0 \leq m \leq 2$

Câu 46. [VDC] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có hai nghiệm thực?

- A. $m \geq \frac{9}{2}$. B. $m \geq \frac{3}{2}$. C. $m \geq -\frac{7}{2}$. D. $\forall m \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện : $x \geq -\frac{1}{2}$

+) Vì $x = 0$ không là nghiệm nên (*) $\Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 1 = mx$

$$\Leftrightarrow m = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x}$$

+) Xét $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x}$

Ta có $f'(x) = \frac{3x^2 + 1}{x} > 0 \forall x \geq -\frac{1}{2}; x \neq 0$

+) Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	$-\infty$	$+\infty$

+) Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm thì $m \geq \frac{9}{2}$

Câu 47. [VDC] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình

$$3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1} \text{ có hai nghiệm thực?}$$

- A. $0 \leq m < \frac{1}{3}$. B. $-1 \leq m \leq \frac{1}{4}$. C. $-2 < m \leq \frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{3} \leq m < 1$.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện : $x \geq 1$

$$+) \text{ Pt} \Leftrightarrow 3\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} + m = 2\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x+1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$+) t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} \text{ với } x \geq 1 \text{ ta có } 0 \leq t < 1$$

Thay vào phương trình ta được $m = 2t - 3t^2 = f(t)$

$$+) \text{ Ta có : } f'(t) = 2 - 6t \text{ ta có : } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

+) BBT

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(t)$	$+$	0	$--$

$f(t)$	
--------	--

+) Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm khi $0 \leq m < \frac{1}{3}$

Câu 48. [VDC] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình

$$\sqrt{(1+2x)(3-x)} > m + 2x^2 - 5x + 3 \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in \left[-\frac{1}{2}; 3\right]?$$

- A. $m < 0$. B. $m > 0$. C. $m < 1$. D. $m > 1$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sqrt{(1+2x)(3-x)}$ khi $x \in \left[-\frac{1}{2}; 3\right] \Rightarrow t \in \left[0; \frac{7\sqrt{2}}{4}\right]$

+) Thay vào bất phương trình ta được $f(t) = t^2 + t > m$

+) BBT

t	0	$\frac{7\sqrt{2}}{4}$
$f'(t)$	+	
$f(t)$	0	$\frac{49+14\sqrt{2}}{8}$

+) Từ bảng biến thiên ta có : $m < 0$

Câu 49. [VDC] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình

$$3(\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}) - 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \geq m \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in [-1; 3]?$$

- A. $m \leq 6\sqrt{2} - 4$. B. $m \geq 6$. C. $m \geq 6\sqrt{2} - 4$. D. $m \leq 6$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \Leftrightarrow 2\sqrt{(1+x)(3-x)} = t^2 - 4$

+) Với $x \in [-1; 3] \Rightarrow t \in [2; 2\sqrt{2}]$ Thay vào bất phương trình ta được : $m \leq -t^2 + 3t - 4$

+) Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 3t + 4; f'(t) = -2t + 3$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} < 2$$

t	2	$2\sqrt{2}$
$f'(t)$	--	
$f(t)$	6	$6\sqrt{2} - 4$

+) Từ bảng biến thiên ta có $m \leq 6\sqrt{2} - 4$ thỏa đề bài

Câu 50. [VDC] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \leq m^2 - m + 1$ nghiệm đúng $\forall x \in [-3, 6]$?

A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 2$.

B. $-1 \leq m \leq 0$.

C. $0 \leq m \leq 2$.

D. $m \geq -1$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} > 0 \Rightarrow t^2 = (\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x})^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)}$

$$\Rightarrow 9 \leq t^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \leq 9 + (3+x) + (6-x) = 18$$

$$\Rightarrow \sqrt{18+3x-x^2} = \sqrt{(3+x)(6-x)} = \frac{1}{2}(t^2 - 9); t \in [3; 3\sqrt{2}]$$

+) Xét $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{9}{2}; f'(t) = 1 - t < 0; \forall t \in [3; 3\sqrt{2}] \Rightarrow \max_{[3; 3\sqrt{2}]} f(t) = f(3) = 3$

+) ycbt $\Leftrightarrow \max_{[3; 3\sqrt{2}]} f(t) = 3 \leq m^2 - m + 1 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1 \vee m \geq 2$

Câu 51. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình

$m \cdot 4^x + (m-1) \cdot 2^{x+2} + m - 1 > 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

A. $m \geq 1$.

B. $m \leq 3$.

C. $-1 \leq m \leq 4$.

D. $m \geq 0$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = 2^x > 0$ thì $m \cdot 4^x + (m-1) \cdot 2^{x+2} + m - 1 > 0$ đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow m \cdot t^2 + 4(m-1) \cdot t + (m-1) > 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow m(t^2 + 4t + 1) > 4t + 1, \forall t > 0$$

$$\Leftrightarrow g(t) = \frac{4t+1}{t^2+4t+1} < m, \forall t > 0.$$

Ta có $g'(t) = \frac{-4t^2-2t}{(t^2+4t+1)^2} < 0$ nên $g(t)$ nghịch biến trên $[0; +\infty)$

+) ycbt $\Leftrightarrow \underset{t \geq 0}{\text{Max}} g(t) = g(0) = 1 \leq m$

Câu 52. [VDC] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $-x^3 + 3mx - 2 < -\frac{1}{x^3}$ nghiệm đúng $\forall x \geq 1$?

- A. $m < \frac{2}{3}$. B. $m \geq \frac{2}{3}$. C. $m \geq \frac{3}{2}$. D. $-\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

+) Bpt $\Leftrightarrow 3mx < x^3 - \frac{1}{x^3} + 2, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow 3m < x^2 - \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x} = f(x), \forall x \geq 1.$

+) Ta có $f'(x) = 2x + \frac{4}{x^5} - \frac{2}{x^2} \geq 2\sqrt{2x\left(\frac{4}{x^5}\right)} - \frac{2}{x^2} = \frac{4\sqrt{2}-2}{x^2} > 0$ suy ra $f(x)$ tăng.

+) Ycbt $\Leftrightarrow f(x) > 3m, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \min_{x \geq 1} f(x) = f(1) = 2 > 3m \Leftrightarrow \frac{2}{3} > m$

Câu 53. [VDC] Tìm giá trị lớn nhất của tham số m sao cho bất phương trình $2^{\cos^2 x} + 3^{\sin^2 x} \geq m \cdot 3^{\cos^2 x}$ có nghiệm?

- A. $m = 4$. B. $m = 8$. C. $m = 12$. D. $m = 16$.

Hướng dẫn giải

+) (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\cos^2 x} + 3\left(\frac{1}{9}\right)^{\cos^2 x} \geq m.$

+) Đặt $t = \cos^2 x, 0 \leq t \leq 1$

+) (1) trở thành $\left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{9}\right)^t \geq m$ (2). Đặt $f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{9}\right)^t.$

+) Ta có (1) có nghiệm \Leftrightarrow (2) có nghiệm $t \in [0; 1] \Leftrightarrow m \leq \underset{t \in [0; 1]}{\text{Max}} f(t) \Leftrightarrow m \leq 4$

Câu 54. [VD] Bất phương trình $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} \geq 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a; b]$. Hỏi tổng $a + b$ có giá trị là bao nhiêu?

- A. 5. B. 4.
C. -2. D. 3.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện: $-2 \leq x \leq 4$

+) Xét $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x}$ trên đoạn $[-2; 4]$.

+) Có $f'(x) = \frac{3(x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0, \forall x \in (-2; 4)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[-2; 4]$

+) Bpt $\Leftrightarrow f(x) \geq f(1) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \geq 1$.

+) So với điều kiện, tập nghiệm của bpt là $S = [1; 4]$

Câu 55. [VD] Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 6x + 11} > \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}$ có tập nghiệm $(a; b]$.

Hỏi hiệu $b - a$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. -1.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện: $1 \leq x \leq 3$; bpt $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 2} + \sqrt{x-1} > \sqrt{(3-x)^2 + 2} + \sqrt{3-x}$

+) Xét $f(t) = \sqrt{t^2 + 2} + \sqrt{t}$ với $t \geq 0$

+) Có $f'(t) = \frac{t}{2\sqrt{t^2 + 2}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$

+) (1) $\Leftrightarrow f(x-1) > f(3-x) \Leftrightarrow x-1 > 3 \Leftrightarrow x > 2$

+) So với điều kiện, bpt có tập nghiệm là $S = (2; 3]$