$$\begin{cases} A = -B - C \\ \dfrac{|B-2C|}{\sqrt{2B^2+2C^2+2BC}} = \sqrt{2}\,(*) \end{cases}$$

$(*) \Leftrightarrow B = 0$ hoặc $3B + 8C = 0$

Câu 37: Trong không gian Oxyz cho 3 điểm $M(3;1;1), \mathrm{N}(4;8;-3), P(2;9;-7)$ và mặt phẳng $(Q): x + 2y - z - 6 = 0$. Đường thẳng d đi qua G, vuông góc với (Q). Tìm giao điểm A của mặt phẳng (Q) và đường thẳng d. Biết G là trọng tâm của tam giác MNP.

A. $A(1;2;1)$ **B.** $A(1;-2;-1)$ **C.** $A(-1;-2;-1)$ **D.** $A(1;2;-1)$

Hướng dẫn giải.

- Tam giác MNP có trọng tâm $G(3;6;-3)$
- Đường thẳng d qua G, vuông góc với $(Q): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 6 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$
- Đường thẳng d cắt (Q) tại $A: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 6 + 2t \\ z = -3 - t \\ x + 2y - z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;2;-1)$

Câu 38: Trong không gian Oxyz, cho hình thoi ABCD với điểm $A(-1;2;1), B(2;3;2)$. Tâm I của hình thoi thuộc đường thẳng $(d): \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$. Tọa độ của đỉnh D là:

A. $D(-2;-1;0)$ **B.** $D(0;1;2)$ **C.** $D(0;-1;-2)$ **D.** $D(2;1;0)$

Hướng dẫn giải.

Gọi $I(-1-t;-t+2;2+t) \in d$. Ta có $\overrightarrow{IA} = (t;t+2;-t-1), \overrightarrow{IB} = (t+3;\mathrm{t}+3;-\mathrm{t})$

Do ABCD là hình thoi nên $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 9t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1; t = -2$

Do C đối xứng với A qua I và D đối xứng với B qua I nên

- $t = -1 \Rightarrow I(0;1;1) \Rightarrow C(1;0;1), D(-2;-1;0)$
- $t = -2 \Rightarrow I(1;2;0) \Rightarrow C(3;2;-1), D(0;1;-2)$

Câu 39: Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(1;4;2), B(-1;2;4)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$.

Điểm M trên Δ sao cho: $MA^2+MB^2=28$ là:

A. $M(-1;0;4)$ **B.** $M(1;0;4)$ **C.** $M(-1;0;-4)$ **D.** $M(1;0;-4)$

Hướng dẫn giải.

Phương trình tham số đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1-t \\ y=-2+t \\ z=2t \end{cases} \Rightarrow M(1-t;-2+t;2t)$

Ta có: $MA^2+MB^2=28 \Leftrightarrow 12t^2-48t+48=0 \Leftrightarrow t=2$

Từ đó suy ra: $M(-1;0;4)$

Câu 40: Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác MNP với $M(1;-1), N(3;1), P(5;-5)$. Tọa độ tâm I đường thẳng ngoại tiếp tam giác MNP là:

A. $I(4;2)$ **B.** $I(-4;2)$ **C.** $I(4;-4)$ **D.** $I(4;-2)$

Hướng dẫn giải.

$I(x;y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMNP

$$\Leftrightarrow \begin{cases} MI^2=NI^2 \\ MI^2=PI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=(x-3)^2+(y-1)^2 \\ (x-1)^2+(y+1)^2=(x-5)^2+(y+5)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow I(4;-2)$$

Câu 41: Trong mặt phẳng Oxy cho đường $(C_m): x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$. Với các giátrị nào của m sau đây thì (C_m) là một đường tròn ?

A. $1<m<2$ **B.** $m<1$ và $m>2$ **C.** $m=1$ **D.** $m=2$

Hướng dẫn giải.

$(C_m): x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$

$\Rightarrow a=m+2; b=-2m; c=19m-6$

Để (C_m) là đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0$

$\Leftrightarrow (m+2)^2+4m^2-19m+6>0$

$\Rightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow m < 1 \vee m > 2$

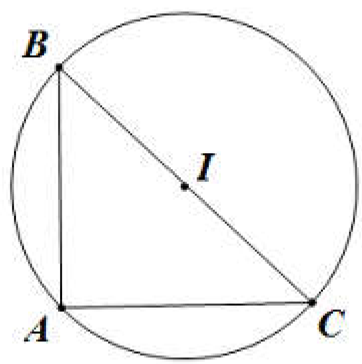
Câu 42: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại $A(3;2)$ có tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(2;-1)$ và điểm B nằm trên đường thẳng $d: x - y - 7 = 0$. Tọa độ đỉnh $C(a;b)$. Giá trị của $S = 2a + 3b$ là:

A. $S = -8$ **B.** $S = 28$ **C.** $S = 18$ **D.** $S = 8$

Hướng dẫn giải.

Ta có: $\overrightarrow{IA} = (1;3) \Rightarrow IA = \sqrt{10}$

Giả sử $\cos HPN = \left|\cos\left(\vec{u}, \overrightarrow{PH}\right)\right| \Leftrightarrow \dfrac{|-4a+3b|}{5\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{3}{5}$



I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC $\Rightarrow IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2$

$\Leftrightarrow 10 = 2b^2 - 16b + 40 \Leftrightarrow b^2 - 8b + 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 5 \Rightarrow B(5;-2) \\ b = 3 \Rightarrow B(3;4) \end{array}\right.$

Do tam giác ABC vuông tại A $\Rightarrow I(2;-1)$ là trung điểm của BC

(*) Với $B(5;-2) \Rightarrow C(-1;0)$

(*) Với $B(3;-4) \Rightarrow C(1;2)$

Vậy tọa độ đỉnh B, C là: $B(5;2), C(-1;0)$ và $B(3;-4), C(1;2)$. Chỉ có đáp án D thỏa mãn.

Câu 43: Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Biết $AB = AD = 2; CD = 4$, phương trình BD là $x - y = 0$, C thuộc đường thẳng $x - 4y - 1 = 0$. Tọa độ của $A(a;b)$ biết điểm C có hoành độ dương. Tính $S = a - b$

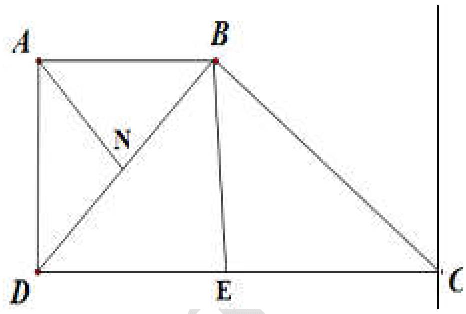
A. $S = 3$ **B.** $S = 1$ **C.** $S = 2$ **D.** $S = 6$

Hướng dẫn giải.

Từ giả thiết chứng minh được DB vuông góc với BC và suy ra $CB = 2\sqrt{2} = d\left[C, (BD)\right]$

$C(4c+1;c) \Rightarrow \dfrac{|4c+1-c|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |3c+1| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3c+1 = 4 \\ 3c+1 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 1 \\ c = -\dfrac{5}{3}(L) \end{array}\right. \Rightarrow C(5;1)$

B là hình chiếu của C lên đường thẳng $BD \Rightarrow B(3;3)$



Mà $AB = 2$ nên A thuộc đường tròn có PT $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4(1)$

Tam giác ABD vuông cân tại A

=> Góc $ABD = 45^0 \Rightarrow PT$ của AB là $x = 3$ hoặc $y = 3$

* Với $x = 3$ thế vào (1) giải ra $y = 1$ hoặc $y = 5 \Rightarrow A(3;1)$ thử lại không thỏa; $A(3;5)$ **thỏa**

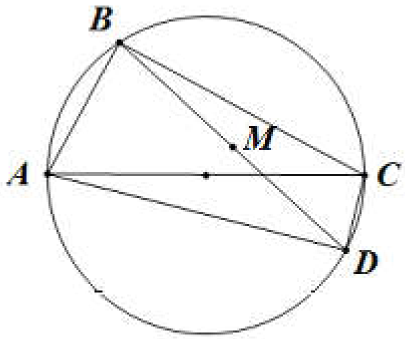
* Với $y = 3$ thế vào (1) giải ra $x = 1$ hoặc $x = 5 \Rightarrow A(1;3)$ thử lại thỏa; $A(5;3)$ **không thỏa**

Câu 44: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AC. Biết $M(3;-1)$ là trung điểm của cạnh BD, điểm C có tọa độ $C(4;-2)$. Điểm $N(-1;-3)$ nằm trên đường thẳng đi qua B và vuông góc với AD. Đường thẳng AD đi qua $P(1;3)$. Phương trình $AB: ax - y + b = 0$. Giá trị của biểu thức $S = a + 2b$ là:

A. $S = -5$ **B.** $S = -4$ **C.** $S = -6$ **D.** $S = -3$

Hướng dẫn giải.

Giả sử $D(a;b)$. Vì M là trung điểm của BD nên $B(6-a;2-b)$



$AD \perp DC \Rightarrow BN//CD \Rightarrow \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CD}$ cùng phương

$\overrightarrow{BN} = (a-7;b-1), \overrightarrow{CD} = (a-4;b+2)$

$\Rightarrow (a-7)(b+2) = (a-4)(b-1) \Leftrightarrow b = a - 6\ (1)$

$\overrightarrow{PD} = (a-1;b-3), \overrightarrow{CD} = (a-4;b+2)$

$\overrightarrow{PD} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow (a-1)(a-4) + (b-3)(b+2) = 0(2)$

Thế (1) vào (2) ta được $2a^2 - 18a + 40 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a = 4 \end{array}\right.$

- Với $a = 4 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow D(4;-2)$ loại vì D trùng C.
- Với $a = 5 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow D(5;-1)$ và $B(1;-1)$

Đường thẳng AD qua $P(1;3), D(5;-1) \Rightarrow AD: x + y - 4 = 0$

$AB \perp BC$ và đi qua $B(1;-1) \Rightarrow AB: 3x - y - 4 = 0 \Rightarrow S = a + 2b = 3 - 8 = -5 \Rightarrow A$

Câu 45: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A, biết rằng cạnh huyền nằm trên đường thẳng $x+7y-31=0$. Điểm $N(7;7)$ thuộc đường thẳng AC, điểm $M(2;-3)$ thuộc đường thẳng AB. $A(a;b), B(c;d), C(e;f)$

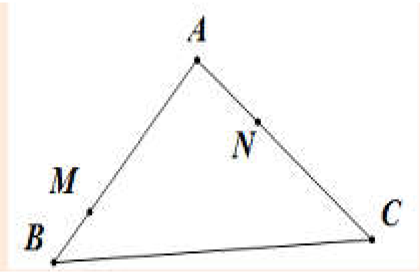
Cho các mệnh đề sau:

$(I)\, a+b+c=-2$ $(II)\, d-f=1$ $(III)\, a=c+e$ $(IV)\, b+d=5$

Số mệnh đề **đúng** là:

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

Hướng dẫn giải.



- Đường thẳng AB có phương trình $a(x-2)+b(y+3)=0\left(a^2+b^2>0\right)$

  Do góc ABC bằng 45^0 nên ta có:

  $$\cos 45^0=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|a+7b|}{\sqrt{50}.\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow 12a^2-7ab-12b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3a=4b\\4a=-3b\end{array}\right.$$

- Với $3a=4b$, ta chọn $a=4$ suy ra $b=3$. Vì AC vuông AB nên $AC: 3x-4y+7=0$

  $\Rightarrow A(-1;1) \Rightarrow B(-4;5) \Rightarrow C(3;4)$

- Với $4a=-3b$, ta chọn $a=3; b=-4$, loại do hệ số góc dương

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu bài toán là $A(-1;1), B(-4;5), C(3;4)$

Câu 46: Cho hình thoi ABCD có $BAC=60^0$ và E là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi F là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Cho tam giác AEF có điện tích là $S=30\sqrt{3}$, điểm A thuộc đường thẳng $d: 3x-y+8=0$ có $G(0;2)$ là trực tâm. Phương trình $EF: ax-3y+b=0$.

Biết A có tung độ nguyên dương. Giá trị của biểu thức $S=\frac{a}{b}$

A. $S=\frac{1}{4}$ **B.** $S=\frac{1}{3}$ **C.** $S=-\frac{1}{4}$ **D.** $S=-\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải.

Ta có: $\begin{cases} FBA = 180^0 - ABC = 60^0 \\ ABE = 60^0 \end{cases} \Rightarrow AB$ là phân giác của FBE. Do $FA \perp BF, AE \perp BE$

Nên $AF = AE \to \Delta AEF$ cân tại A. Lại có: $FAE = BAE + FAB = 60^0 \to \Delta AEF$ đều

Xét tam giác AEF: $S = 30\sqrt{3}$ nên độ dài cạnh tam giác đều: $a = 2\sqrt{30}; R = 2\sqrt{10}$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF : $x^2 + (y-2)^2 = 40$

A là giao của đường tròn và đường thẳng $3x - y + 8 = 0 \Rightarrow A(-2;8)$

Phương trình EF , đi qua M là trung điểm của EF , điểm M được tìm từ tỉ lệ vecto :

$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \Rightarrow M(1;-1)$. Phương trình EF khi đó: $x - 3y - 4 = 0 \Rightarrow S = \frac{a}{b} = \frac{1}{-4}$

Câu 47: Cho phương trình $2\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} = 3x - 3$ có nghiệm vô tỉ $x = \frac{a+3\sqrt{b}}{8}$. Tính tổng $S = a + b$

A. 20 **B.** 26 **C.** 42 **D.** 24

Hướng dẫn giải.

Điều kiện: $x \geq 1$

Phương trình đã cho tương đương

$$2\sqrt{x-1} + \sqrt{(x-1)(x+1)} = 3(x-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ 2 + \sqrt{x+1} = 3\sqrt{x-1}\,(*) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) tương đương

$$4 + 4\sqrt{x+1} + x + 1 = 9(x-1) \Leftrightarrow 4\sqrt{x+1} = 8x - 14$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{11}{8} \\ 4(x+1) = (8x-11)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{4} \\ 16(x+1) = (8x-14)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{4} \\ x \in \left\{\frac{15+3\sqrt{5}}{8}; \frac{15-3\sqrt{5}}{8}\right\} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{15+3\sqrt{5}}{8}$$

Từ đó suy ra: $\begin{cases} a = 15 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow S = a + b = 20$

Câu 48: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y \\ 3y\left(2 + \sqrt{9x^2+3}\right) + (4y+2)\left(\sqrt{1+x+x^2} + 1\right) = 0 \end{cases}$. Với x, y là nghiệm của hệ phương trình trên. Tính giá trị biểu thức $5x - 10y$:

A. -1 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 5

Hướng dẫn giải.

Phương trình $(1) \Leftrightarrow (x-y)(x^2-y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=x^2+1 \end{array}\right.$

* Thế vào PT (2) ta được: $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow (2x+1)\left(\sqrt{(2x+1)^2+3}+2\right)=(-3x)\left(2+\sqrt{(-3x)^2+3}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x)$$

Xét $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+2\right)$ có $f'(t)>0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra f(t) là hàm số đồng biến nên: $2x+1=-3x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{5} \Rightarrow y=-\frac{1}{5}$

Đến đây coi như ta đã tìm được đáp án ! Nhưng ta cũng nên xét đến trường hợp còn lại.

* Trường hợp $y=x^2+1$ thế vào phương trình (2) ta được :

$$3(x^2+1)\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x^2+1+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$$

Vế trái luôn dương => phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $\left(-\frac{1}{5};-\frac{1}{5}\right)$

Từ đó suy ra $S=5a-10b=-1+2=1$

Câu 49: Số giá trị **nguyên** của m để phương trình $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=m\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}\right)$ có nghiệm là:

A. 10 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13

Hướng dẫn giải.

Điều kiện: $x \in [0;4]$. Khi đó phương trình tương đương với:

$$\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\right)=m$$

Xét hàm số $f(x)=\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\right)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$

Ta xét riêng như sau:

$$g_1(x)=x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\Rightarrow g_1^{'}(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}+\frac{1}{2\sqrt{x+12}}>0$$

Suy ra hàm số $g_1(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;4]$

$$g_2(x)=\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\Rightarrow g_2^{'}(x)=\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}}{2\sqrt{5-x}\sqrt{4-x}}$$

Với $x\in[0;4]\Rightarrow\sqrt{5-x}>\sqrt{4-x}\Rightarrow g_2^{'}(x)=\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}}{2\sqrt{5-x}\sqrt{4-x}}>0$

Suy ra hàm số $g_2(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;4]$

Từ đó suy ra $f(x)=g_1(x).g_2(x)$ luôn đồng biến trên đoạn $[0;4]$

Suy ra phương trình có nghiệm khi chỉ khi $f(0)\le m\le f(4)\Rightarrow 2\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-2\right)\le m\le 12$

Từ đó suy ra **có 12 giá trị nguyên** của m thỏa mãn

Câu 50: Cho a, b, c là các số thực

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3(b+c)}{2a}+\frac{4a+3c}{3b}+\frac{12(b-c)}{2a+3c}$ là:

A. $\frac{2}{3}$ **B.** 5 **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải.

Ta có: $P+11=2+\frac{3(b+c)}{2a}+1+\frac{4a+3c}{3b}+\frac{12(b-c)}{2a+3c}=(4a+3b+3c)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}+\frac{4}{2a+3c}\right)$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$P+11\ge(4a+3b+3c)\frac{16}{4a+3b+3c}=16\Rightarrow P\ge 15$$

Đẳng thức xảy ra khi $b=c=\frac{2}{3}a$