Câu 39. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số α và β sao cho hàm số

$y=f(x)=\dfrac{-x^3}{3}+\dfrac{1}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)x^2-\dfrac{3}{2}x\sin\alpha\cos\alpha-\sqrt{\beta-2}$ luôn giảm trên ℝ ?

A. $\dfrac{\pi}{12}+k\pi\le\alpha\le\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$ và $\beta\ge2$.

B. $\dfrac{\pi}{12}+k\pi\le\alpha\le\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$ và $\beta\ge2$.

C. $\alpha\le\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge2$.

D. $\alpha\ge\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge2$.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện xác định: $\beta\ge2$

+) Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình $\dfrac{1}{2}\le\sin2\alpha\le1$

+) Kết luận: $\dfrac{\pi}{12}+k\pi\le\alpha\le\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$ và $\beta\ge2$.

Câu 40. **[VDC]**Tìm mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số $y=f(x)=2x+a\sin x+b\cos x$ luôn tăng trên ℝ ?

A. $a^2+b^2\le4$.

B. $a+2b=2\sqrt{3}$.

C. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$.

D. $a+2b\ge\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D=\mathbb{R}$

+) $y'=2+a\cos x-b\sin x$

+) Áp dụng bất đẳng thức Schwartz ta có $2-\sqrt{a^2+b^2}\le y'\le2+\sqrt{a^2+b^2}$

+) Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$y'\ge0,\forall x\Leftrightarrow2-\sqrt{a^2+b^2}\ge0\Leftrightarrow a^2+b^2\le4$.

1.1.3 Ứng dụng tính đơn điệu của hàm số.

Câu 41. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^3-3x^2-9x-m=0$ có đúng 1 nghiệm?

A. $m<-27$ hoặc $m>5$.

B. $m<-5$ hoặc $m>27$.

C. $-27\le m\le5$.

D. $-5\le m\le27$.

Hướng dẫn giải

+) $(1)\Leftrightarrow m=x^3-3x^2-9x=f(x)$.

+) Bảng biến thiên của $f(x)$ trên ℝ .

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)'$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$

+) Từ đó suy ra pt có đúng 1 nghiệm khi $m < -27$ hoặc $m > 5$

Câu 42. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1} = x + m$ có nghiệm?

A. $m \le 2$. B. $m \ge 2$. C. $m \ge 3$. D. $m \le 3$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \ge 0$.

+) Phương trình thành: $2t = t^2 - 1 + m \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 1$

+) Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 1, t \ge 0; f'(t) = -2t + 2$

+) Bảng biến thiên của *f(t)*

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

+) Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi $m \le 2$.

Câu 43. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = m + 4x - x^2$ có đúng 2 nghiệm dương?

A. $-3 < m < \sqrt{5}$. B. $1 \le m \le 3$. C. $-\sqrt{5} < m < 3$. D. $-3 \le m < 3$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

+) $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$

+) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

+) Xét $x > 0$ ta có bảng biến thiên

x	0 $+\infty$	2

Carot.vn

$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\sqrt{5}$	↘	1	↗	$+\infty$

+) Khi đó phương trình đã cho trở thành $m=t^2+t-5 \Leftrightarrow t^2+t-5-m=0$ *(1).*

Nếu phương trình *(1)* có nghiệm t_2, t_2 thì $t_1+t_2=-1$. (1) có nhiều nhất 1 nghiệm $t \ge 1$.

+) Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t \in \left(1;\sqrt{5}\right)$.

+) Đặt $g(t)=t^2+t-5$. Ta đi tìm m để phương trình $g(t)=m$ có đúng 1 nghiệm $t \in \left(1;\sqrt{5}\right)$.

$g'(t)=2t+1>0, \forall t \in \left(1;\sqrt{5}\right)$.

Ta có bảng biến thiên sau

t	1		$\sqrt{5}$
g'(t)		+	
g(t)	-3	↗	$\sqrt{5}$

+) Từ BBT suy ra $-3<m<\sqrt{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 44. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình: $x^2-3x+2 \le 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2+\left(m+1\right)x+m+1 \ge 0$?

A. $m \ge -\dfrac{4}{7}$. B. $m \le -\dfrac{4}{7}$. C. $m \le -1$. D. $m \ge -1$.

Hướng dẫn giải

+) Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow 1 \le x \le 2$

+) Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow m(x^2+x+1) \ge -x-2 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{-x-2}{x^2+x+1}$

Carot.vn

+) Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-x-2}{x^2+x+1}$ với $1\le x\le 2$

Có $f'(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2}>0, \forall x\in[1;2]$

+) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{[1;2]} f(x) \Leftrightarrow m\ge -\dfrac{4}{7}$

Câu 45. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình: $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có ít nhất một nghiệm trên đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$?

A. $0\le m\le 2$.   B. $-1\le m\le 3$.   C. $0\le m\le 3$.   D. $-1\le m\le 2$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}$.

Điều kiện : $t\ge 1$.

+) Phương trình thành: $t^2+t-2m-2=0$ (*)

Khi $x\in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]\Rightarrow t\in[1;2]$

$(*)\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{t^2+t-2}{2}=m$

+) Bảng biến thiên $f(t)$

t	1	2
$f'(t)$	+	
$f(t)$	0 ↗	2

+) Từ bảng biến thiên ta có : $0\le m\le 2$

Câu 46. **[VDC]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có hai nghiệm thực?

A. $m\ge\dfrac{9}{2}$.   B. $m\ge\dfrac{3}{2}$.   C. $m\ge-\dfrac{7}{2}$.   D. $\forall m\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện : $x\ge-\dfrac{1}{2}$

+) Vì $x=0$ không là nghiệm nên $(*)\Leftrightarrow 3x^2+4x-1=mx$

Carot.vn

$$\Leftrightarrow m=\frac{3x^2+4x-1}{x}$$

+) Xét $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-1}{x}$

Ta có $f'(x)=\dfrac{3x^2+1}{x}>0\ \forall x\geq -\dfrac{1}{2};x\neq 0$

+) Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\times$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

+) Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm thì $m\geq \dfrac{9}{2}$

Câu 47. **[VDC]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$ có hai nghiệm thực?

A. $0\leq m<\dfrac{1}{3}$. B. $-1\leq m\leq \dfrac{1}{4}$. C. $-2<m\leq \dfrac{1}{3}$. D. $\dfrac{1}{3}\leq m<1$.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện : $x\geq 1$

+) Pt $\Leftrightarrow 3\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}+m=2\dfrac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x+1)^2}}$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$$

+) $t=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ với $x\geq 1$ ta có $0\leq t<1$

Thay vào phương trình ta được $m=2t-3t^2=f(t)$

+) Ta có : $f'(t)=2-6t$ ta có : $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$

+) BBT

Carot.vn

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$			$\frac{1}{3}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				-1

+) Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm khi $0 \le m < \dfrac{1}{3}$

Câu 48. **[VDC]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{(1+2x)(3-x)} > m + 2x^2 - 5x + 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left[-\dfrac{1}{2};3\right]$?

A. $m<0$. B. $m>0$. C. $m<1$. D. $m>1$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sqrt{(1+2x)(3-x)}$ khi $x \in \left[-\dfrac{1}{2};3\right] \Rightarrow t \in \left[0;\dfrac{7\sqrt{2}}{4}\right]$

+) Thay vào bất phương trình ta được $f(t) = t^2 + t > m$

+) BBT

t	0		$\frac{7\sqrt{2}}{4}$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$			$\frac{49+14\sqrt{2}}{8}$
		$\nearrow$	
	0		

+) Từ bảng biến thiên ta có : $m<0$

Câu 49. **[VDC]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $3\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}\right) - 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \ge m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;3]$?

A. $m \le 6\sqrt{2} - 4$. B. $m \ge 6$. C. $m \ge 6\sqrt{2} - 4$. D. $m \le 6$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \Leftrightarrow 2\sqrt{(1+x)(3-x)} = t^2 - 4$

Carot.vn

+) Với $x \in [-1;3] \Rightarrow t \in [2;2\sqrt{2}]$ Thay vào bất phương trình ta được : $m \le -t^2 + 3t - 4$

+) Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 3t + 4; f'(t) = -2t + 3$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} < 2$$

t	2		$2\sqrt{2}$
$f'(t)$		--	
$f(t)$	6	$\searrow$	$6\sqrt{2}-4$

+) Từ bảng biến thiên ta có $m \le 6\sqrt{2} - 4$ thỏa đề bài

Câu 50. **[VDC]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \le m^2 - m + 1$ nghiệm đúng $\forall x \in [-3,6]$?

A. $m \le -1$ hoặc $m \ge 2$. B. $-1 \le m \le 0$.

C. $0 \le m \le 2$. D. $m \ge -1$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} > 0 \Rightarrow t^2 = \left(\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}\right)^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)}$

$\Rightarrow 9 \le t^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \le 9 + (3+x) + (6-x) = 18$

$\Rightarrow \sqrt{18+3x-x^2} = \sqrt{(3+x)(6-x)} = \frac{1}{2}(t^2 - 9); t \in \left[3;3\sqrt{2}\right]$

+) Xét $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{9}{2}$; $f'(t) = 1 - t < 0; \forall t \in \left[3;3\sqrt{2}\right] \Rightarrow \max\limits_{[3;3\sqrt{2}]} f(t) = f(3) = 3$

+) ycbt $\Leftrightarrow \max\limits_{[3;3\sqrt{2}]} f(t) = 3 \le m^2 - m + 1 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \ge 0 \Leftrightarrow m \le -1$ v $m \ge 2$

Câu 51. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m.4^x + (m-1).2^{x+2} + m - 1 > 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

A. $m \ge 1$. B. $m \le 3$. C. $-1 \le m \le 4$. D. $m \ge 0$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = 2^x > 0$ thì $m.4^x + (m-1).2^{x+2} + m - 1 > 0$ đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m.t^2 + 4(m-1).t + (m-1) > 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow m(t^2 + 4t + 1) > 4t + 1, \forall t > 0$

$\Leftrightarrow g(t) = \dfrac{4t+1}{t^2 + 4t + 1} < m, \forall t > 0.$

Ta có $g'(t)=\dfrac{-4t^2-2t}{(t^2+4t+1)^2}<0$ nên $g(t)$ nghịch biến trên $[0;+\infty)$

+) ycbt $\Leftrightarrow \underset{t\ge 0}{Max}\, g(t)=g(0)=1\le m$

Câu 52. **[VDC]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình:

$-x^3+3mx-2<-\dfrac{1}{x^3}$ nghiệm đúng $\forall x\ge 1$?

A. $m<\dfrac{2}{3}$. B. $m\ge\dfrac{2}{3}$. C. $m\ge\dfrac{3}{2}$. D. $-\dfrac{1}{3}\le m\le\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

+) Bpt $\Leftrightarrow 3mx<x^3-\dfrac{1}{x^3}+2, \forall x\ge 1 \Leftrightarrow 3m<x^2-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{2}{x}=f(x), \forall x\ge 1$.

+) Ta có $f'(x)=2x+\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{2}{x^2}\ge 2\sqrt{2x\left(\dfrac{4}{x^5}\right)}-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{4\sqrt{2}-2}{x^2}>0$ suy ra $f(x)$ tăng.

+) Ycbt $\Leftrightarrow f(x)>3m, \forall x\ge 1 \Leftrightarrow \min\limits_{x\ge 1} f(x)=f(1)=2>3m \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}>m$

Câu 53. **[VDC]**Tìm giá trị lớn nhất của tham số m sao cho bất phương trình $2^{\cos^2 x}+3^{\sin^2 x}\ge m.3^{\cos^2 x}$ có nghiệm?

A. $m=4$. B. $m=8$. C. $m=12$. D. $m=16$.

Hướng dẫn giải

+) (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\cos^2 x}+3\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\cos^2 x}\ge m$.

+) Đặt $t=\cos^2 x, 0\le t\le 1$

+) (1) trở thành $\left(\dfrac{2}{3}\right)^t+3\left(\dfrac{1}{9}\right)^t\ge m$ (2). Đặt $f(t)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^t+3\left(\dfrac{1}{9}\right)^t$.

+) Ta có (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t\in[0;1] \Leftrightarrow \text{m}\le \underset{t\in[0;1]}{\text{Max}}\, f(t) \Leftrightarrow m\le 4$

Câu 54. **[VD]**Bất phương trình $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}\ge 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a;b]$. Hỏi tổng $a+b$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 5. B. 4.

C. -2. D. 3.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện: $-2\le x\le 4$

+) Xét $f(x)=\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}$ trên đoạn $[-2;4]$.

Carot.vn

+) Có $f'(x)=\dfrac{3\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}>0,\forall x\in\left(-2;4\right)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $\left[-2;4\right]$

+) Bpt $\Leftrightarrow f(x)\geq f(1)=2\sqrt{3}\Leftrightarrow x\geq 1$.

+) So với điều kiện, tập nghiệm của bpt là $S=[1;4]$

Câu 55. **[VD]**Bất phương trình $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$ có tập nghiệm $\left(a;b\right]$. Hỏi hiệu $b-a$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. -1.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện: $1\leq x\leq 3$; bpt $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2}+\sqrt{x-1}>\sqrt{(3-x)^2+2}+\sqrt{3-x}$

+) Xét $f(t)=\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t}$ với $t\geq 0$

+) Có $f'(t)=\dfrac{t}{2\sqrt{t^2+2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}>0,\forall t>0$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$

+) (1) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x-1)>f(3-x)\Leftrightarrow x-1>3\Leftrightarrow x>2$

+) So với điều kiện, bpt có tập nghiệm là $S=(2;3]$