III. CÂU HỎI VẬN DỤNG CAO

Câu 45. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ có đồ thị (*C*) và gốc tọa độ *O*. Gọi Δ là tiếp tuyến của (*C*), biết Δ cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt *A, B* và tam giác *OAB* cân. Phương trình Δ là

A. $y=x+4$.   B. $y=x+1$.   C. $y=x-4$.   D. $y=x$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\neq -1$. Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần lập.

Tam giác *OAB* cân tại *O* nên *OA* = *OB*, suy ra

$$y'\left(x_0\right)=\pm 1\xrightarrow{y'>0}y'\left(x_0\right)=1\Leftrightarrow\frac{1}{\left(x_0+1\right)^2}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2\end{array}\right..$$

- Với $x_0=0\Rightarrow y_0=0$ (Loại do $M\left(0;0\right)\equiv O$).
- Với $x_0=-2\Rightarrow y_0=2$, suy ra phương trình tiếp tuyến $\Delta: y=x+4$.

Câu 46. Cho hàm số $y=-x^4-x^2+6$ có đồ thị (*C*). Tiếp tuyến của đồ thị (*C*) cắt các trục *Ox*, *Oy* lần lượt tại hai điểm *A, B* sao cho *OB* = 36*OA* có phương trình là

A. $\left[\begin{array}{l}y=-36x+58\\y=36x+58\end{array}\right.$.   B. $\left[\begin{array}{l}y=-36x-86\\y=36x-86\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}x-36y-4=0\\x+36y-4=0\end{array}\right.$.   D. $\left[\begin{array}{l}x-36y+14=0\\x+36y+14=0\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Do $\dfrac{OB}{OA}=36\Rightarrow y'(x_0)=\pm 36$.

- Với $y'(x_0)=-36\Leftrightarrow -4x^3-2x_0=-36\Leftrightarrow 4x_0^3+2x_0-36=0\Leftrightarrow x_0=2$

$\Rightarrow y_0=y(2)=-14$. Suy ra tiếp tuyến y = -36*x* + 58.

- Với $y'(x_0)=36\Leftrightarrow -4x^3-2x_0=36\Leftrightarrow 4x_0^3+2x_0+36=0\Leftrightarrow x_0=-2$

$\Rightarrow y_0=y(-2)=-14$. Suy ra tiếp tuyến y = 36*x* + 58.

Câu 47. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{2\left(x+1\right)}$ có đồ thị là $\left(C\right)$. Gọi điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ với $x_0>-1$ là điểm thuộc $\left(C\right)$, biết tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm M cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A,B và tam giác OAB có trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d: 4x+y=0$. Hỏi giá trị của x_0+2y_0 bằng bao nhiêu ?

A. $-\frac{7}{2}$.　　B. $\frac{7}{2}$.　　C. $\frac{5}{2}$.　　D. $-\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

- Gọi $M\left(x_0;\frac{x_0-1}{2\left(x_0+1\right)}\right)\in\left(C\right)$ là điểm cần tìm.

- Gọi Δ tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M ta có phương trình.

$$\Delta: y=f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{x_0-1}{2(x_0+1)}\Rightarrow y=\frac{1}{\left(x_0+1\right)^2}(x-x_0)+\frac{x_0-1}{2(x_0+1)}$$

- Gọi $A=\Delta\cap Ox\Rightarrow A\left(-\frac{x_0^2-2x_0-1}{2};0\right)$ và $B=\Delta\cap Oy\Rightarrow B\left(0;\frac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0+1)^2}\right)$.

- Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ Δ OAB có trọng tâm là:

$$G\left(-\frac{x_0^2-2x_0-1}{6};\frac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}\right).$$

- Do $G\in$ đường thẳng: $4x+y=0\Rightarrow -4.\frac{x_0^2-2x_0-1}{6}+\frac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}=0$

$$\Leftrightarrow 4=\frac{1}{\left(x_0+1\right)^2}$$ *(vì A,B không trùng O nên $x_0^2-2x_0-1\neq0$)*

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0+1=\frac{1}{2}\\x_0+1=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-\frac{1}{2}\\x_0=-\frac{3}{2}\end{array}\right..$$

- Với $x_0=-\frac{1}{2}\Rightarrow M(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2})$.

- Với $x_0=-\frac{3}{2}\Rightarrow M(-\frac{3}{2};\frac{5}{2})$.

Chọn $M(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2})\Rightarrow x_0+2y_0=-\frac{7}{2}$.

Câu 48. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$ (1), m là tham số thực. Kí hiệu (C) là đồ thị hàm số (1); d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1. Tìm m để khoảng cách từ điểm $B\left(\frac{3}{4};1\right)$ đến đường thẳng d đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=1$.　　B. $m=-1$.　　C. $m=2$.　　D. $m=-2$.

Hướng dẫn giải

- $A \in (Cm)$ nên $A(1;1-m)$. $y' = 4x^3 - 4mx \Rightarrow y'(1) = 4 - 4m$.
- Phương trình tiếp tuyến của (Cm) tại A: $y - 1 + m = y'(1).(x-1)$

$$\Leftrightarrow (4-4m)x - y - 3(1-m) = 0.$$

- Khi đó $d(B;\Delta) = \dfrac{|-1|}{\sqrt{16(1-m)^2+1}} \le 1$, Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow$ khi $m = 1$.
- Do đó $d(B;\Delta)$ lớn nhất bằng 1 khi và chỉ khi $m = 1$.

Câu 49. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu_tiếp tuyến của đồ thị (C) tại những điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến đường thẳng $d_1: 3x + 4y - 2 = 0$ bằng 2.

A. 4. B.3. C. 2. D. 0.

Hướng dẫn giải

- Giả sử $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \dfrac{2x_0+3}{x_0+1}$.
- Ta có: $d(M, d_1) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|3x_0 + 4y_0 - 2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2 \Leftrightarrow 3x_0 + 4y_0 - 12 = 0$ hoặc $3x_0 + 4y_0 + 8 = 0$.
- Với $3x_0 + 4y_0 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x_0 + 4\left(\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right) - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \Rightarrow M_1(0;3) \\ x_0 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow M_2\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{11}{4}\right) \end{array}\right.$
- Với $3x_0 + 4y_0 + 8 = 0 \Leftrightarrow 3x_0 + 4\left(\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right) + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -5 \Rightarrow M_3\left(-5; \dfrac{7}{4}\right) \\ x_0 = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow M_4\left(-\dfrac{4}{3}; -1\right) \end{array}\right.$.

Suy ra có 4 tiếp tuyến.

Câu 50. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm hai tiệm cận của (C). Tìm điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng MI.

A. $M(2;3)$. B. $M\left(3; \dfrac{5}{2}\right)$. C. $M\left(4; \dfrac{7}{3}\right)$. D. $M(5;3)$.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận.

- Giao điểm của hai tiệm cận là $I(1;2)$. Gọi $M(a;b)\in(C)\Rightarrow b=\dfrac{2a-1}{a-1},(a>1)$.
- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y=-\dfrac{1}{(a-1)^2}(x-a)+\dfrac{2a-1}{a-1}$.
- Phương trình đường thẳng MI: $y=\dfrac{1}{(a-1)^2}(x-1)+2$.
- Tiếp tuyến tại M vuông góc với MI nên ta có:

$$-\frac{1}{(a-1)^2}.\frac{1}{(a-1)^2}=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\Rightarrow b=1\\a=2\Rightarrow b=3\end{array}\right..$$

Vậy điểm cần tìm là $M(2;3)$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$, điểm M thoả yêu cầu bài toán có hoành độ được tính như sau:

$$x_0-1=\pm\sqrt{\left|2.(-1)-1.(-1)\right|}\Leftrightarrow x_0-1=\pm1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\Rightarrow y_0=3\\x_0=0\ (L)\end{array}\right.. \text{ Vậy } M(2;3).$$

Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị là (C), đường thẳng $d: y=x+m$. Với mọi m ta luôn có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A,B. Gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A,B. Tìm m để tổng k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=-1$. B. $m=-2$. C. $m=3$. D. $m=-5$.

Hướng dẫn giải

- Phương trình hoành độ giao điểm của d và *(C)*:

$$\frac{-x+1}{2x-1}=x+m\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{1}{2}\\g(x)=2x^2+2mx-m-1=0\ (*)\end{cases}.$$

- Theo định lí Viet ta có: $x_1+x_2=-m;x_1x_2=\dfrac{-m-1}{2}$. Giả sử: $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$.
- Ta có $y'=\dfrac{-1}{(2x-1)^2}$.
- Tiếp tuyến của (C) tại A và B có hệ số góc là: $k_1=-\dfrac{1}{(2x_1-1)^2};k_2=-\dfrac{1}{(2x_2-1)^2}$.

$$\Rightarrow k_1+k_2=k_1+k_2=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}-\frac{1}{(2x_2-1)^2}=-\frac{4(x_1^2+x_2^2)-4(x_1+x_2)+2}{[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1]^2}$$

$$=-\left(4m^2+8m+6\right)=-4(m+1)^2-2\le-2$$

- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy: k_1+k_2 đạt GTLN bằng -2 khi $m=-1$.

Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ (1).Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A,B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

A. $y=-x-2$. B. $y=-x$. C. $y=-x+2$. D. $y=-x+1$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

- Gọi $\mathrm{M}(x_0;y_0)$ là toạ độ của tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0)=\dfrac{-1}{(2x_0+3)^2}<0$.
- ΔOAB cân tại O nên tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $y=-x$ (vì tiếp tuyến

có hệ số góc âm). Nghĩa là: $y'(x_0)=\dfrac{-1}{(2x_0+3)^2}=-1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\Rightarrow y_0=1\\x_0=-2\Rightarrow y_0=0\end{array}\right.$

- Với $x_0=-1;\ y_0=1\Rightarrow\Delta$: $y-1=-(x+1)\Leftrightarrow y=-x$ (**loại**).
- Với $x_0=-2;\ y_0=0\Rightarrow\Delta$: $y-0=-(x+2)\Leftrightarrow y=-x-2$ (**nhận**).

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-x-2$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

- Tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O nên ta có $OA=OB\Rightarrow n=1$.

$acx_0^2+2bcx_0+bd\neq 0\Rightarrow 2x_0^2+8x_0+6\neq 0\Leftrightarrow x_0\neq -1;x_0\neq -3$.

$cx_0+d=\pm\sqrt{n.|ad-bc|}\Rightarrow 2x_0+3=\pm\sqrt{1.|-1|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1(L)\\x_0=-2(N)\end{array}\right.$.

- Với $x_0=-2;\ y_0=0\Rightarrow\Delta$: $y-0=-(x+2)\Leftrightarrow y=-x-2$ (**nhận**).

Câu 53. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1},(C)$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox,Oy lần lượt tại các điểm A và B thoả mãn $OA=4OB$.

A. $\left[\begin{array}{l}y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}\\y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}\end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l}y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}\\y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{2}\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{2} \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4} \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

- Giả sử tiếp tuyến d của (C) tại $M(x_0;y_0)\in(C)$ cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho $OA=4OB$.

- Do tam giác OAB vuông tại O nên $\tan A=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ Hệ số góc của d bằng $\frac{1}{4}$ hoặc $-\frac{1}{4}$.

- Hệ số góc của d là $y'(x_0)=-\frac{1}{(x_0-1)^2}<0\Rightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2}=-\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \Rightarrow y_0=\frac{3}{2} \\ x_0=3 \Rightarrow y_0=\frac{5}{2} \end{array}\right.$.

- Khi đó có 2 tiếp tuyến thoả mãn là: $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}(x+1)+\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{4}(x-3)+\frac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4} \end{array}\right.$.

Câu 54. Cho hàm số $y=\frac{x}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi Δ là tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)$ (với $x_0>0$) thuộc đồ thị (C). Để khoảng cách từ tâm đối xứng I của đồ thị (C) đến tiếp tuyến Δ là lớn nhất thì tung độ của điểm M gần giá trị nào nhất ?

A. $\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{3\pi}{2}$. C. $\frac{5\pi}{2}$. D. $\frac{7\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

- Ta có: $y'=\frac{-1}{(x-1)^2}$; $I(1;1)$.

- Gọi $M\left(x_0;\frac{x_0}{x_0-1}\right)\in(C),(x_0\neq 1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$\Delta: y=-\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0}{x_0-1} \Leftrightarrow x+(x_0-1)^2y-x_0^2=0.$$

- $\mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{2|x_0-1|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}}=\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{(x_0-1)^2}+(x_0-1)^2}}\le\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

- Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{(x_0-1)^2}=(x_0-1)^2\Leftrightarrow|x_0-1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\Rightarrow y_0=2\,(N)\\x_0=0\ \ (L)\end{array}\right..$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Ta có $IM\perp\Delta\Rightarrow\ cx_0+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_0-1=\pm\sqrt{|-1-0|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\Rightarrow y_0=2\,(N)\\x_0=0\ \ (L)\end{array}\right.$.

Câu 55. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết khoảng cách từ $I(-1;2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất thì tung độ của điểm M nằm ở góc phần tư thứ hai gần giá trị nào nhất ?

A. e. B. $2e$. C. $3e$. D. $4e$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

- Ta có: $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$.

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}\right)\in(C),(x_0\neq-1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M là:

$$y=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0+1}\Leftrightarrow 3x-(x_0+1)^2y+2x_0^2-2x_0-1=0.$$

- $\mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\dfrac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}\le\dfrac{6}{\sqrt{2\sqrt{9}}}=\sqrt{6}$.

- Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow(x_0+1)^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_0=2-\sqrt{3}\,(L)\\x_0=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_0=2+\sqrt{3}\,(N)\end{array}\right..$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Ta có $IM\perp\Delta\Rightarrow\ cx_0+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_0+1=\pm\sqrt{|2+1|}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1+\sqrt{3} \Rightarrow y=2-\sqrt{3}\,(L) \\ x_0=-1-\sqrt{3} \Rightarrow y=2+\sqrt{3}\,(N) \end{array}\right.$$

Câu 56. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Biết tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B sao cho AB ngắn nhất. Khi đó độ dài lớn nhất của vectơ $\overrightarrow{OM}$ gần giá trị nào nhất ?

A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)\in(C),(x_0\neq 2)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$\Delta: y=-\dfrac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+2+\dfrac{1}{x_0-2}$.

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là: $A\left(2;2+\dfrac{2}{x_0-2}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là: $B(2x_0-2;2)$.
- Ta có: $AB^2=4\left[(x_0-2)^2+\dfrac{1}{(x_0-2)^2}\right]\geq 8$. Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2=\dfrac{1}{(x_0-2)^2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=3 \Rightarrow y_0=3 \Rightarrow \overrightarrow{OM}(3;3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right|=3\sqrt{2}\,(N) \\ x_0=1 \Rightarrow y_0=1 \Rightarrow \overrightarrow{OM}(1;1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{2}\,(L) \end{array}\right.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

- AB ngắn nhất suy ra khoảng cách từ I đến tiếp tuyến Δ tại M ngắn nhất

$\Rightarrow IM\perp\Delta \Rightarrow cx_M+d=\pm\sqrt{|ad-bc|} \Rightarrow x_M-2=\pm\sqrt{|-4+3|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M=3\Rightarrow y_M=3 \\ x_M=1\Rightarrow y_M=1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right|=3\sqrt{2}$.

Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số (C) tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. Khi đó khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến Δ bằng ?

A. $\sqrt{6}$. B. $2\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-2}{x_0+1}\right)\in(C),(x_0\neq -1)$, $I(-1;1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng: $\Delta: y=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0-2}{x_0+1}$.

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là: $A\left(-1;\frac{x_0-5}{x_0+1}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là: $B(2x_0+1;1)$.
- Ta có: $IA=\frac{6}{|x_0+1|}, IB=2|x_0+1| \Rightarrow IA.IB=12$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔIAB là: $S_{IAB}=pr$

$$\Rightarrow r=\frac{S_{IAB}}{p}=\frac{IA.IB}{IA+IB+IC}=\frac{IA.IB}{IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}}\le\frac{IA.IB}{2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2.IA.IB}}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}.$$

- Suy ra $r_{\max}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}\Leftrightarrow IA=IB\Leftrightarrow |x_0-1|^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_M=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_0=1-\sqrt{3}\\ x_M=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_0=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$.
- $\overrightarrow{IM}\left(\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IM}\right|=\sqrt{6}$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

- $IA=IB\Rightarrow\Delta IAB$ vuông cân tại $I\Rightarrow IM\perp\Delta$.
- $cx_M+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_M+1=\pm\sqrt{|1+2|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_M=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_M=1-\sqrt{3}\\ x_M=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_M=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{IM}\right|=\sqrt{6}$.

Câu 58. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Tiếp tuyến Δ của (C) cắt 2 tiệm cận tại A và B sao cho chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất. Khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ đến tiếp tuyến Δ gần giá trị nào nhất ?

A.5. B. 4. C. 3. D. 6.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

- Gọi $M\left({}_0;2+\frac{3}{x_0-1}\right)\in(C),(x_0\ne 1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$\Delta: y=\frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+2+\frac{3}{x_0-1}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là: $A\left(1;\ 2+\frac{6}{x_0-1}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là: $B(2x_0-1;\ 2)$.

- Ta có: $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA.IB=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{|x_0-1|}\cdot 2|x_0-1|=2.3=6$.
- ΔIAB vuông tại I có diện tích không đổi $\Rightarrow$ chu vi ΔIAB đạt giá trị nhỏ nhất khi

$IA=IB\Leftrightarrow\frac{6}{|x_0-1|}=2|x_0-1|\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1+\sqrt{3}\\x_0=1-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

- Với $x_0=1+\sqrt{3}$ thì phương trình tiếp tuyến là

$$\Delta: y=-x+3+2\sqrt{3}\Rightarrow d(O,\Delta)=\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(N).$$

- Với $x_0=1-\sqrt{3}$ thì phương trình tiếp tuyến là

$$\Delta: y=-x+3-2\sqrt{3}\Rightarrow d(O,\Delta)=\frac{-3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(L).$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

- $IA=IB\Rightarrow cx_M+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_M-1=\pm\sqrt{|-2-1|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=1+\sqrt{3}\Rightarrow y=2+\sqrt{3}\\x_M=1-\sqrt{3}\Rightarrow y=2-\sqrt{3}\end{array}\right.$

$\Rightarrow d(O,\Delta)=\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(N)$.

Câu 59. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Tiếp tuyến Δ của (C) tại M cắt các đường tiệm cận tại A và B sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó tiếp tuyến Δ của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích lớn nhất thuộc khoảng nào ?

A. $(27;\ 28)$. B. $(28;\ 29)$. C. $(26;\ 27)$. D. $(29;\ 30)$.

Hướng dẫn giải
[Phương pháp tự luận]

- Gọi $M\left(x_0;\frac{2x_0-1}{x_0-2}\right)\in(C),(x_0\neq 2)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$\Delta: y=-\frac{3}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0-2}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là: $A\left(2;\frac{2x_0+2}{x_0-2}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là: $B(2x_0-2;\ 2)$.
- Xét $\begin{cases}x_A+x_B=2+2x_0-2=2x_0\\y_A+y_B=\frac{2x_0+2}{x_0-2}+2=2.\frac{2x_0-1}{x_0-2}=2y_0\end{cases}\Rightarrow M$ là trung điểm của AB.
- ΔIAB vuông tại I nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB.

$$\Rightarrow S=\pi R^2=\pi IM^2=\pi\left[(x_0-2)^2+\left(\frac{2x_0-1}{x_0-2}-2\right)^2\right]=\pi\left[(x_0-2)^2+\frac{9}{(x_0-2)^2}\right]\ge 6\pi$$

- Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2=\dfrac{9}{(x_0-2)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=\sqrt{3}+2\Rightarrow y_0=\sqrt{3}+2\\ x_0=-\sqrt{3}+2\Rightarrow y_0=-\sqrt{3}+2\end{array}\right.$.
- Với $x_0=\sqrt{3}+2\Rightarrow\Delta: y=-x+2\sqrt{3}+4$ cắt 2 trục tọa độ tại

$$E\left(0;\ 2\sqrt{3}+4\right),F\left(2\sqrt{3}+4;\ 0\right)\Rightarrow S_{OEF}=\frac{1}{2}OE.OF=14+8\sqrt{3}\approx 27,8564$$

- Với $x_0=-\sqrt{3}+2\Rightarrow\Delta: y=-x-2\sqrt{3}+4$ cắt 2 trục tọa độ tại

$$E\left(0;\ -2\sqrt{3}+4\right),F\left(-2\sqrt{3}+4;\ 0\right)\Rightarrow S_{OEF}=\frac{1}{2}OE.OF=14-8\sqrt{3}\approx 0,1435$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

- IM lớn nhất $\Leftrightarrow IM\perp\Delta\Rightarrow cx_0+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_0-2=\pm\sqrt{|-4+1|}$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=\sqrt{3}+2\Rightarrow y_0=\sqrt{3}+2\\ x_0=-\sqrt{3}+2\Rightarrow y_0=-\sqrt{3}+2\end{array}\right.$. Giải tương tự như trên.