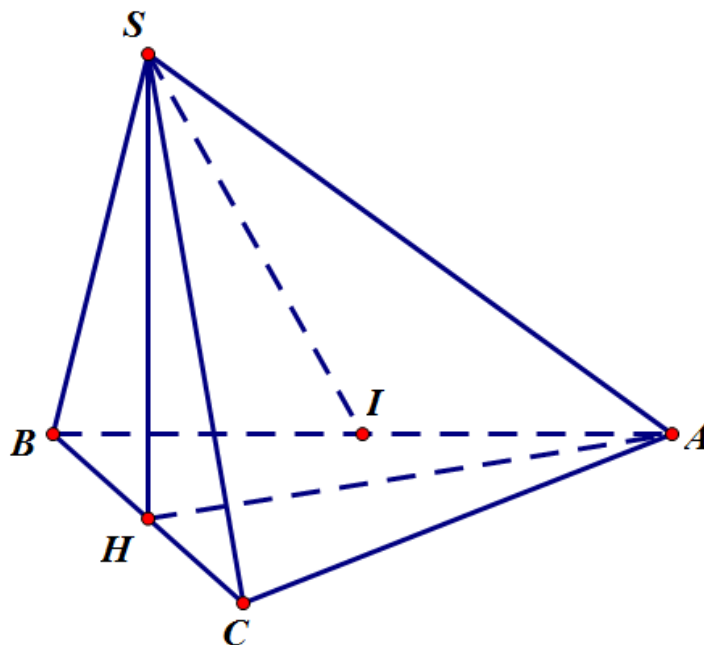


Ta có: $BC = a \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AC = BC \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$.



$AB = BC \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{6} SH \cdot AB \cdot AC = \frac{a^3}{16}$.

Tam giác ABC vuông tại A và H là trung điểm của BC nên $HA = HB$ mà $SH \perp (ABC) \Rightarrow SA = SB = a$.

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow SI \perp AB$. Do đó $SI = \sqrt{SB^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$.

$\Rightarrow d(C; (SAB)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{6V_{S.ABC}}{SI \cdot AB} = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Ví dụ 27: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB , góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy bằng 60° . Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

A. $\frac{3\sqrt{13}a}{13}$.

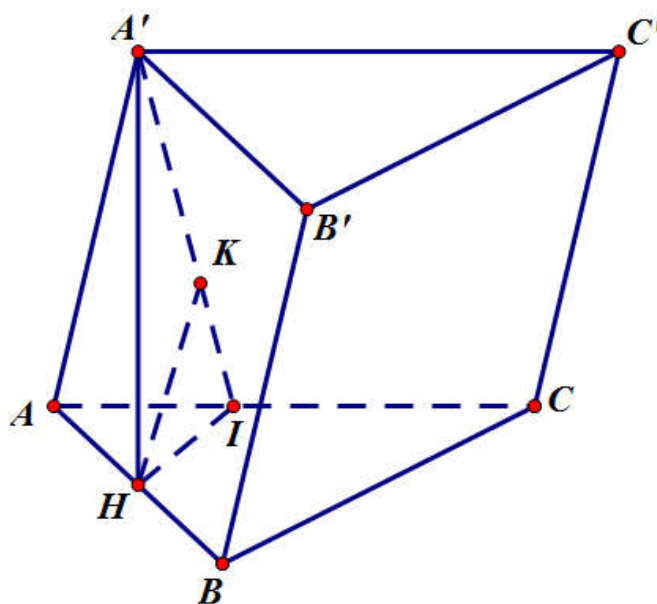
B. $\frac{3\sqrt{13}a}{26}$.

C. $\frac{2\sqrt{13}a}{13}$.

D. $\frac{5\sqrt{13}a}{26}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow A'H \perp (ABC)$ và $\widehat{A'CH} = 60^\circ$.

Do đó $A'H = CH \cdot \tan \widehat{A'CH} = \frac{3a}{2}$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của H trên AC , K là hình chiếu vuông góc của H trên $A'I$
 $\Rightarrow HK = d(H; (ACC'A'))$.

Ta có $HI = AH \cdot \sin \widehat{IAH} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HA'^2} = \frac{52}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3\sqrt{13}a}{26}$$

Do đó $d(B; (ACC'A')) = 2d(H; (ACC'A')) = 2HK = \frac{3\sqrt{13}a}{13}$.

STUDY TIP: Vì $A'H \perp (ABC)$ và H là trung điểm của AB nên $d(B; (ACC'A')) = 2d(H; (ACC'A'))$.

Ví dụ 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của AB . Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) .

A. $\frac{a}{3}$.

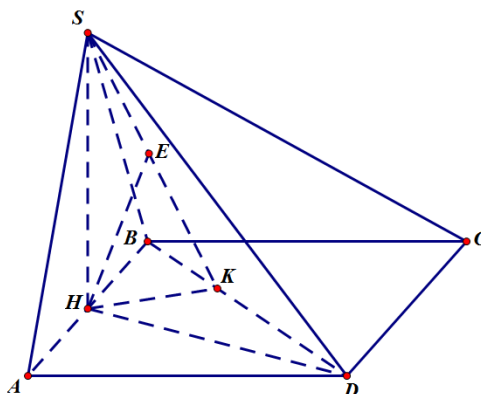
B. $\frac{2a}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Do đó $SH \perp HD$, ta có $SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{SD^2 - (AH^2 + HD^2)} = a$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên BD và E là hình chiếu vuông góc của H trên SK .
Ta có $BD \perp HK$ và $BD \perp SH \Rightarrow BD \perp (SHK) \Rightarrow BD \perp HE$.

Mà $HE \perp SK$ do đó $HE \perp (SBD)$.

Ta có $HK = HB \cdot \sin \widehat{KBH} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow HE = \frac{HS \cdot HK}{\sqrt{HS^2 + HK^2}} = \frac{a}{3}$.

Do đó $d(A; (SBD)) = 2d(H; (SBD)) = 2HE = \frac{2a}{3}$.

STUDY TIP: $d(A; (SBD)) = 2d(H; (SBD))$.

Ví dụ 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC .

A. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

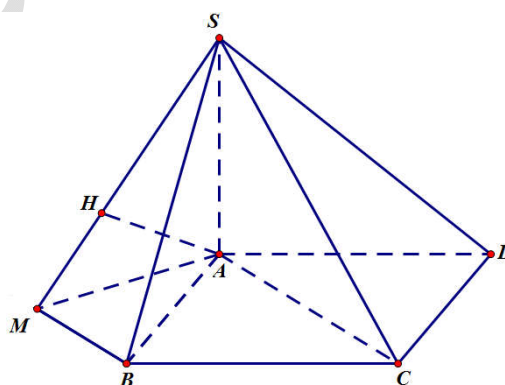
B. $\frac{\sqrt{5}a}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Kẻ đường thẳng d qua B và song song với AC . Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên d ; H là hình chiếu vuông góc của A trên SM .

Ta có $SA \perp BM$, $MA \perp BM$ nên $AH \perp BM \Rightarrow AH \perp (SBM)$.

Do đó $d(AC; SB) = d(A; (SBM)) = AH$.

ΔSAM vuông tại A có đường cao AH nên $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{5}{2a^2}$.

Vậy $d(AC; SB) = AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

STUDY TIP: Dựng mặt phẳng (SBM) chứa SB và song song với AC .

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B không nằm trong (P). Đặt $d_1 = d(A; (P))$ và $d_2 = d(B; (P))$. Trong các kết luận sau thì kết luận nào đúng?

A. $\frac{d_1}{d_2} = 1$ khi và chỉ khi $AB \parallel (P)$.

B. $\frac{d_1}{d_2} \neq 1$ khi và chỉ khi đoạn thẳng AB cắt (P).

C. $\frac{d_1}{d_2} \neq 1$ khi đoạn thẳng AB cắt (P).

D. Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại điểm I thì $\frac{IA}{IB} = \frac{d_1}{d_2}$.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc. Giả sử $AB = 1, AC = 2, AD = 3$. Khi đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng:

A. $\frac{7}{5}$.

B. $\frac{5}{7}$.

C. $\frac{6}{7}$.

D. $\frac{7}{11}$.

Câu 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, AA' = c$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC' là:

A. $\frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$.

B. $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

C. $\frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

D. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

A. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

B. $\frac{a\sqrt{7}}{21}$.

C. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

D. $\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng ($A'BD$) bằng $\frac{a}{3}$.

B. Độ dài $AC' = a\sqrt{3}$.

C. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng ($CDD'C'$) bằng $a\sqrt{2}$.

D. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng ($BCC'B'$) bằng $\frac{3a}{2}$.

Câu 6. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi A' là hình chiếu của A trên mặt phẳng (BCD). Độ dài cạnh AA' là:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$.

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a$, $BD = 3a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Biết $AC \perp BD$. Tính MN .

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh a . Tính tích $AB.EG$?

A. $a^2\sqrt{3}$. B. a^2 . C. $a^2\sqrt{2}$. D. $2a^2$.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6$, $CD = 3$. Góc giữa AB và CD bằng 60° . Điểm M nằm trên đoạn BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt AC , AD và BD lần lượt tại N , P , Q . Tính diện tích $MNPQ$?

A. $2\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $3\sqrt{2}$.

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$, $AB = CD = 6$; M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = xBC$ ($0 < x < 1$). Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC , AC , AD , BD tại M , N , P , Q . Diện tích lớn nhất của tứ giác $MNPQ$ là:

A. 9. B. 6. C. 10. D. 12.

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA \perp (ABC)$, $AC = AD = 4$, $AB = 3$, $CD = 5$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) .

A. $\frac{12}{5}$. B. $\frac{12}{\sqrt{34}}$. C. $\frac{6}{\sqrt{34}}$. D. $\frac{\sqrt{34}}{3}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 3a$, $AB = BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) .

A. a . B. $2a$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3a}{2}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) theo a .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. B. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. D. $\frac{3a}{7}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = AD = a$, $CD = 2a$, cạnh SD vuông góc với $(ABCD)$, $SD = a$. Tính $d(A; (SBC))$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của SC đến (SBD) .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{2a}{3}$.

- Câu 16.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Đường thẳng $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD .
- A. a . B. $a\sqrt{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $2a$.
- Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Đường thẳng $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của CD . Khoảng cách từ M đến (SAB) nhận giá trị nào sau đây?
- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. a . C. $a\sqrt{2}$. D. $2a$.
- Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC đôi một vuông góc và $SA = AB = BC = 1$. Tính độ dài SC .
- A. $\sqrt{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. 2 . D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 19.** Cho tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = DC$ và $\widehat{BCD} = 60^\circ$, $\widehat{ADC} = 90^\circ$, $\widehat{ADB} = 120^\circ$. Trong các mặt của tứ diện đó:
- A. Tam giác ABD có diện tích lớn nhất. B. Tam giác ACD có diện tích lớn nhất.
C. Tam giác BCD có diện tích lớn nhất. D. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất.
- Câu 20.** Cho tứ diện $ABCD$ có hai cặp cạnh đối diện vuông góc. Cắt tứ diện đó bằng một mặt phẳng song song với một cặp cạnh đối diện còn lại của tứ diện. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
- A. Thiết diện là hình thang. B. Thiết diện là hình bình hành.
C. Thiết diện là hình chữ nhật. D. Thiết diện là hình vuông.
- Câu 21.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .
- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{3a}{2}$. D. $\frac{a}{3}$.
- Câu 22.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với đáy lớn $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) .
- A. a . B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.
- Câu 23.** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi a, b, c tương ứng là độ dài của các cạnh OA, OB, OC . Gọi h là khoảng cách từ O đến (ABC) thì h có giá trị là:
- A. $h = \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$. B. $h = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$.
C. $h = \sqrt{\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2}}$. D. $h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.
- Câu 24.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh a , đường chéo $AC = a$, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi I là trung điểm của AB . Tính khoảng cách từ I đến (SBC) .

A. $\frac{3a\sqrt{13}}{26}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{13}}{26}$.

D. $\frac{3a\sqrt{13}}{16}$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = AD = 2a$, $CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi I là trung điểm của AD , hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với $(ABCD)$. Tính theo a khoảng cách từ A đến (SBC) .

A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

B. $\frac{3a\sqrt{15}}{10}$.

C. $\frac{2a\sqrt{15}}{10}$.

D. $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B không nằm trong (P) . Đặt $d_1 = d(A; (P))$ và $d_2 = d(B; (P))$. Trong các kết luận sau thì kết luận nào đúng?

A. $\frac{d_1}{d_2} = 1$ khi và chỉ khi $AB \parallel (P)$.

B. $\frac{d_1}{d_2} \neq 1$ khi và chỉ khi đoạn thẳng AB cắt (P) .

C. $\frac{d_1}{d_2} \neq 1$ khi đoạn thẳng AB cắt (P) .

D. Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại điểm I thì $\frac{IA}{IB} = \frac{d_1}{d_2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc. Giả sử $AB = 1, AC = 2, AD = 3$. Khi đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng:

A. $\frac{7}{5}$.

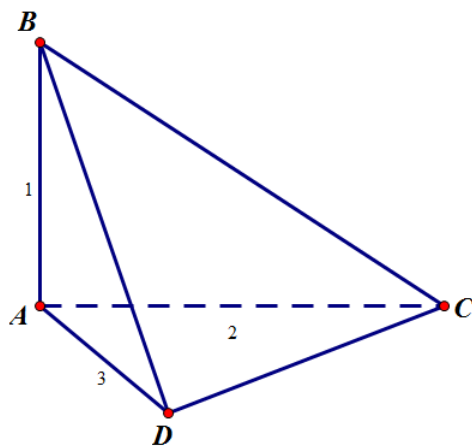
B. $\frac{5}{7}$.

C. $\frac{6}{7}$.

D. $\frac{7}{11}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Vi $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{49}{36} \Rightarrow d = \frac{6}{7}$.

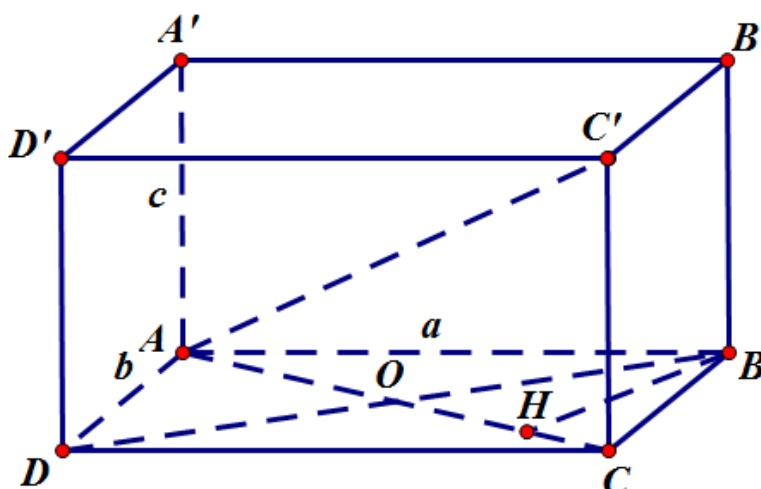
Câu 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC' là:

- A. $\frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$. **B. $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.** C. $\frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. D. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$d(BB'; AC') = d(BB'; (ACC'A')) = d(B; (ACC'A')) = BH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

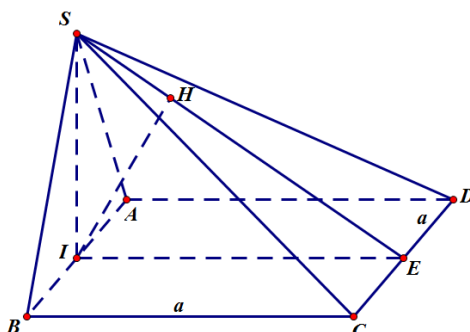


Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) .

- A. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{7}}{21}$. **C. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.** D. $\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Gọi I là trung điểm của AB , ta có $SI \perp AB$ và $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Gọi E là trung điểm của CD , trong mặt phẳng (SIE) dựng $IH \perp SE (H \in SE)$ thì $IH \perp (SCD) \Rightarrow d(I; (SCD)) = IH$.

Ta có $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $IE = a$.

$$\Rightarrow d(A; (SCD)) = d(I; (SCD)) = IH = \frac{SI \cdot IE}{\sqrt{SI^2 + IE^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{a}{3}$.

B. Độ dài $AC' = a\sqrt{3}$.

C. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(CDD'C')$ bằng $a\sqrt{2}$.

D. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{3a}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Câu 6. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi A' là hình chiếu của A trên mặt phẳng (BCD) . Độ dài cạnh AA' là:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

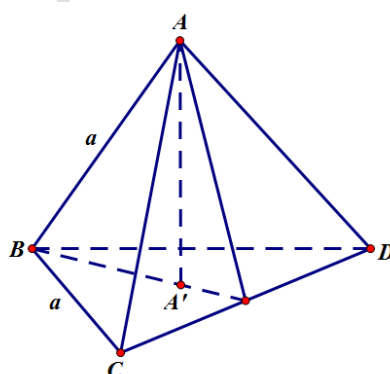
B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Ta có $BA' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $AA' = \sqrt{AB^2 - BA'^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a$, $BD = 3a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Biết $AC \perp BD$. Tính MN .

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

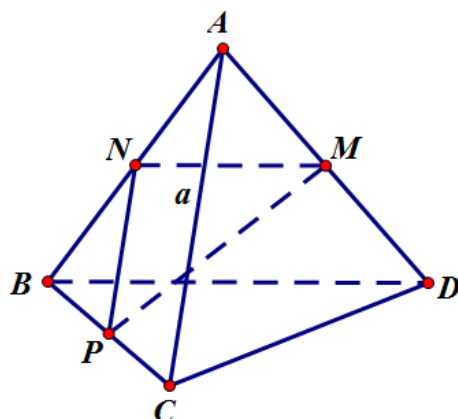
B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Lấy P là trung điểm của AB . Khi đó: $PM \parallel BD$, $PN \parallel AC$.

Vì $AC \perp BD \Rightarrow PM \perp PN$ và $PM = \frac{3a}{2}$; $PN = \frac{a}{2}$.

$$\Rightarrow MN = \sqrt{PM^2 + PN^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh a . Tính tích $AB.EG$?

- A. $a^2\sqrt{3}$. B. a^2 . **C. $a^2\sqrt{2}$.** D. $2a^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $AB = a$, $EG = a\sqrt{2} \Rightarrow AB.EG = a^2\sqrt{2}$.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6$, $CD = 3$. Góc giữa AB và CD bằng 60° . Điểm M nằm trên đoạn BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt AC , AD và BD lần lượt tại N , P , Q . Tính diện tích $MNPQ$?

- A. $2\sqrt{2}$. **B. $2\sqrt{3}$.** C. $\sqrt{3}$. D. $3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

