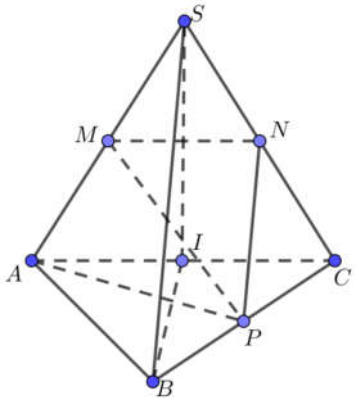
Câu 9. **Đáp án D.**



Từ giả thiết suy ra các mặt của hình chóp đều là các tam giác đều. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SC, BC. Giả sử cạnh hình chóp đều là a thì $MN = NP = \frac{a}{2}; MP \perp SA$ vì $\triangle SAP$ cân tại P.

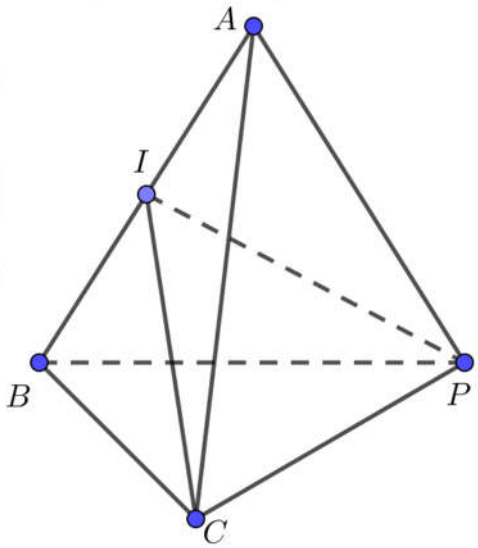
$$PM = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \cos\widehat{MNP} = \frac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2.MN.NP} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{2a^2}{4}}{2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}}$$

$\cos\widehat{MNP} = 0 \Rightarrow \left(\widehat{SB, AC}\right) = 90^0$.

Cách 2: Lấy I là trung điểm của AC ta có: $AC \perp (SIB) \Rightarrow AC \perp SB$.

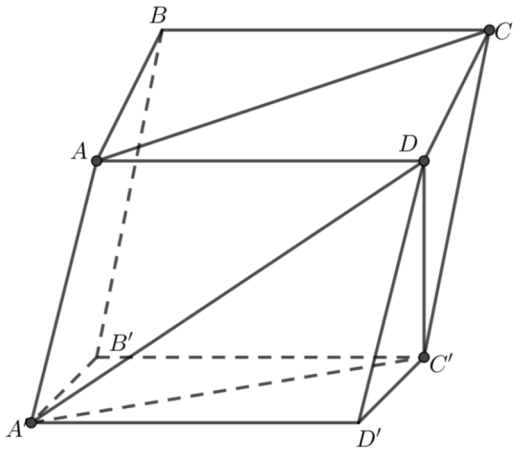
Cách 3: $\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SB}\left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}\right) = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SA} = 0$.

Câu 10. **Đáp án C.**



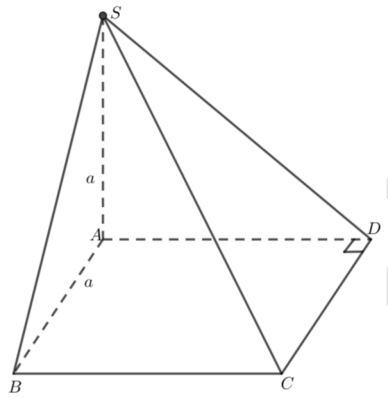
Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow AB \perp (IDC) \Rightarrow AB \perp CD$.
Ngoài ra ta cũng có thể sử dụng tích vô hướng để giải quyết bài toán này.

Câu 11. **Đáp án B.**



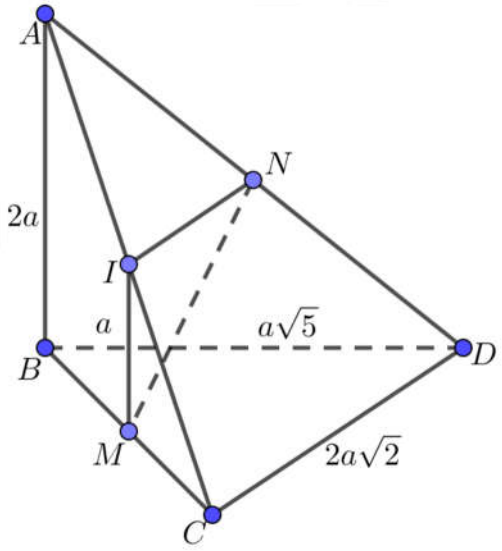
Ta có: $AC//A'C' \Rightarrow \widehat{(AC, A'D)} = \widehat{(A'C', A'D)} = \widehat{DA'C'}$ (góc nhọn).

Câu 12. **Đáp án A.**
Câu 13. **Đáp án A.**
Câu 14. **Đáp án C.**



Ta có: $AD//BC \Rightarrow \widehat{(SD, BC)} = \widehat{(SD, AD)} = \widehat{ADS} = 45^0$.

Câu 15. **Đáp án D.**

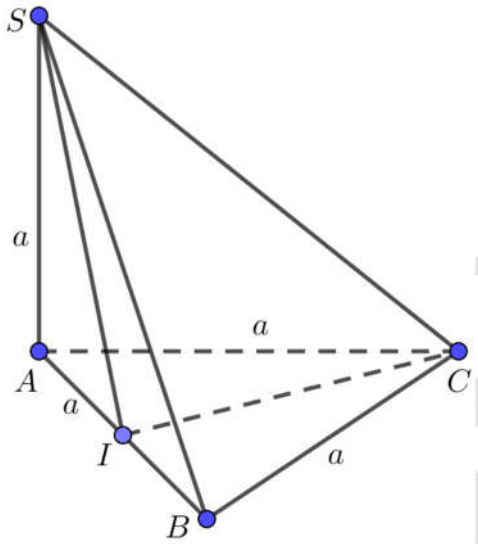


Theo tính chất đường trung bình trong tam giác: $\begin{cases} IN//CD; IN = \frac{1}{2}CD = a\sqrt{2} \\ IM//AB; IM = \frac{1}{2}AB = a \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi = \widehat{(AB, CD)} = \widehat{(IM, IN)}$. Áp dụng định lý cosin ta có:

$\cos\varphi = \left|\frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2.IM.IN}\right| = \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^0$.

Câu 16. **Đáp án C.**



Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow \varphi = \widehat{ASB} = \widehat{(SD, AD)} = 45^0$.

Câu 17. **Đáp án A.**

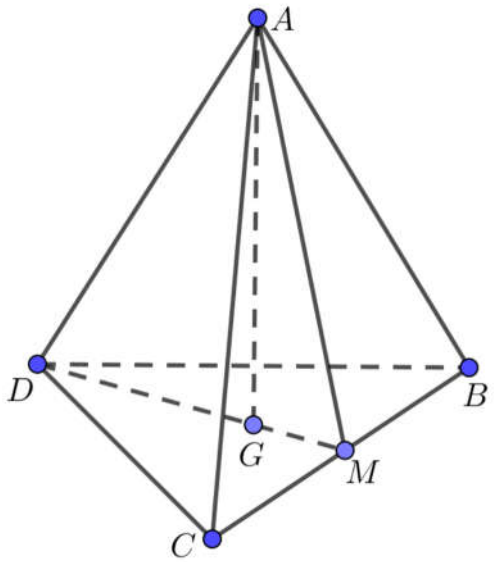
Hình câu 16.

Gọi I là trung điểm của AB. Ta có: $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp SA \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB)$

$\Rightarrow SI$ là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(SAB) \Rightarrow \beta = \widehat{CSI} = \widehat{(SC, (SAB))}$

$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{CI}{SI} = \frac{CI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Câu 18. **Đáp án B.**

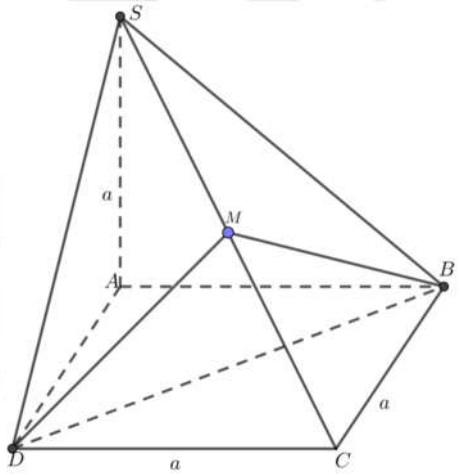


Gọi M là trung điểm CB và G là trọng tâm tam giác BCD nên ta có

$BC \perp (AGM) \Rightarrow \varphi = \widehat{AMG}$. Có $DM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow GM = \frac{a\sqrt{3}}{6}; AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{GM}{AM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Câu 19. **Đáp án A.**



Ta có giao tuyến $BC \perp (SBA) \Rightarrow \varphi = \widehat{SBA}$ (góc nhọn). Mà ΔSBA vuông cân tại A nên $\varphi = 45^0$

Câu 20. **Đáp án D.**

(Hình vẽ của câu 19)

Hai tam giác vuông SBC và SDC nên có chung chân đường cao M kẻ từ B và D

$\Rightarrow \beta = (\widehat{MB, MD})$. Ta đi tính góc $\widehat{BMD}$.

Trong tam giác vuông SBC ta có:

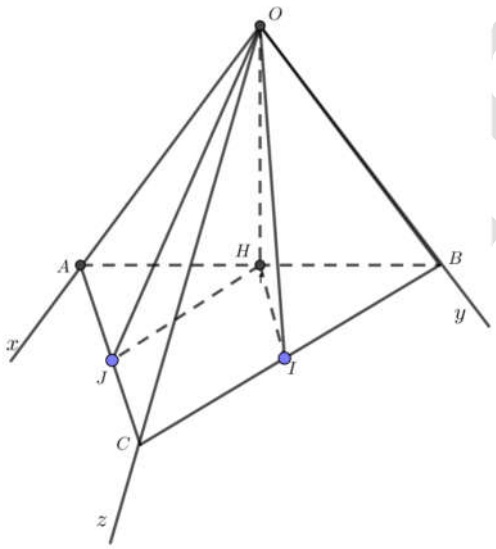
$\frac{1}{BM^2}=\frac{1}{SB^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow BM^2=\frac{2a^2}{3}$. Tương tự $DM^2=\frac{2a^2}{3}$.

Áp dụng định lý cosin cho ΔBMD ta có:

$$\cos\widehat{BMD}=\frac{MB^2+MD^2-BD^2}{2.MB.MD}=\frac{\frac{4a^2}{4}-2a^2}{2.\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BMD}=120^0\Rightarrow\beta=180^0-120^0=60^0$$

Hay $\frac{\pi}{3}$.

Câu 21. **Đáp án A.**



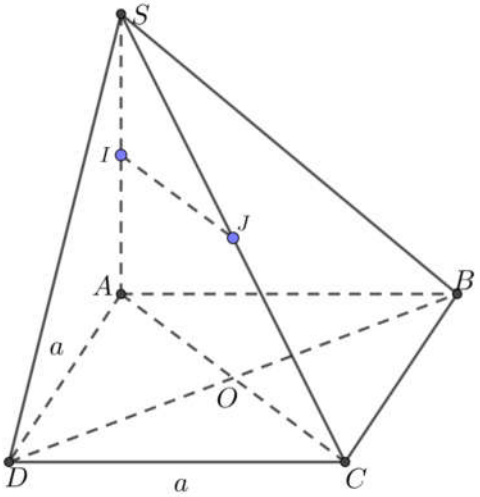
ΔOAB đều $\Rightarrow AC=a$. Tam giác OBC vuông $BC=a\sqrt{2}$. Áp dụng định lý cosin cho ΔOAB $\Rightarrow AB=a\sqrt{3}\Rightarrow\Delta ABC$ có $AB^2=AC^2+BC^2\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại C.

Gọi H là trung điểm của $AB\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC\Rightarrow OH\perp(ABC)$

$\Rightarrow\alpha=\widehat{OIH};\beta=\widehat{OJH}$ (với I,J lần lượt là trung điểm của BC và AC).

$$\Rightarrow\tan\alpha.\tan\beta=\frac{OH}{HI}.\frac{OH}{HJ}=\frac{OH^2}{HI.HJ}=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 22. **Đáp án A.**



Vì $BC//AD, \widehat{SAD}=90^0 \Rightarrow \left(\widehat{SD,BC}\right)=\widehat{SDA} \Rightarrow \tan\widehat{SDA}=\dfrac{SA}{SD}=\sqrt{3} \Rightarrow \left(SD,BC\right)=60^0$.

Câu 23. **Đáp án A.**

(Hình vẽ như câu 22)

Ta có $\mathrm{IJ}//AC, \left(\widehat{\mathrm{IJ},BD}\right)=\widehat{AOB}=90^0$.

Câu 24. **Đáp án A.**

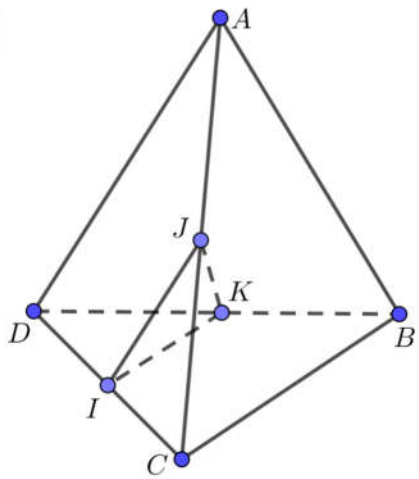
Đặt $AB=a$. Ta có: $\mathrm{IJ}=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$.

$IK=\dfrac{CD}{2}=\dfrac{2}{3}AB=\dfrac{2a}{3}; JK=\dfrac{5}{6}AB=\dfrac{5a}{6}$.

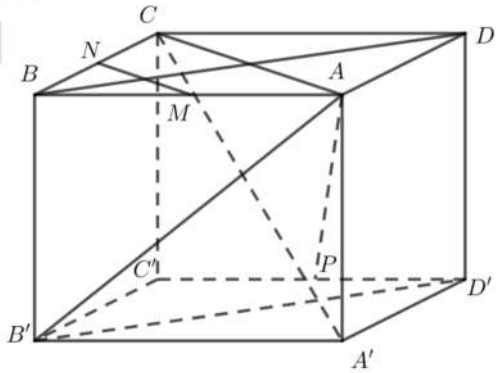
Ta có: $\mathrm{IJ}^2+IK^2=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{4a^2}{9}=\dfrac{25a^a}{16}=JK^2$.

Vậy $\Delta \mathrm{IJ}K$ vuông tại I.

Ta có $IK//CD \Rightarrow \left(\widehat{AB,CD}\right)=\widehat{JIK}=90^0$.



Câu 25. **Đáp án B.**



Ta có: $AB//C'D' \Rightarrow \widehat{(MN,C'D')} = \widehat{(MN,AB)} = \widehat{BMN} = 45^0$.

Câu 26. **Đáp án C.**
(Hình vẽ câu 25)

Có $B'D'//BD \Rightarrow \widehat{(BD,AD')} = \widehat{(B'D',AD')} = \widehat{AD'B'} = 60^0$ vì $\Delta AB'D'$ đều cạnh $a\sqrt{2}$.

Câu 27. **Đáp án B.**
(Hình vẽ câu 25)

$MN//AC \Rightarrow \widehat{(MN,AP)} = \widehat{(AC,AP)} = \widehat{CAP}$ (góc nhọn). Ta có: $AC = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông $CC'P$ có $CP = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Trong tam giác vuông APA' có $AP = \frac{3a}{2}$.

Áp dụng định lý cosin cho ΔCAP ta có: $\cos\widehat{CAP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{(MN,AP)} = 45^0$.

Câu 28. **Đáp án A.**
(Hình vẽ câu 25)

Gọi N' là trung điểm của $B'C'$. Ta có

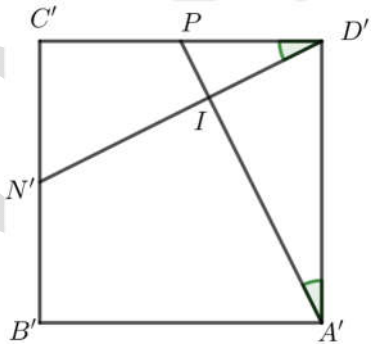
$ND//N'D' \Rightarrow \widehat{(ND,A'P)} = \widehat{(N'D',A'P)}$.

Có $\triangle N'C'D' = \triangle PD'A' \Rightarrow \widehat{C'D'N'} = \widehat{D'A'P'}$

Mà $\widehat{C'D'N'} + \widehat{A'D'N'} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{D'A'P} + \widehat{A'D'N'} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{DIA'} = 90^0$ hay $\widehat{(DN,A'P)} = 90^0$.



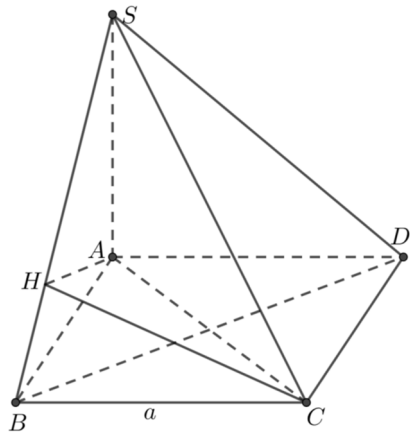
Câu 29. **Đáp án C.**

Ta có: $CB \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (SAB)

$\Rightarrow \widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{(SC,SB)} = \widehat{CSB}$.

Do ΔCSB vuông tại B nên:

$\sin\widehat{CSB} = \frac{BC}{SC} = \frac{BC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a}{a\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$.



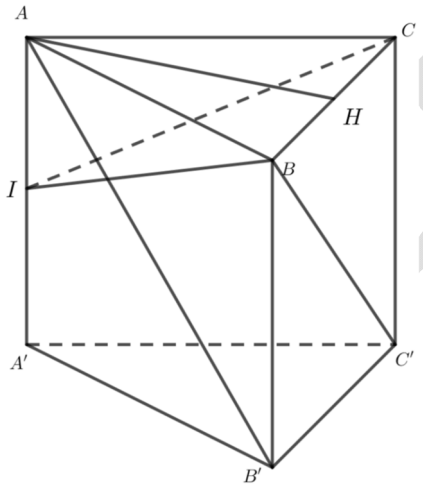
Câu 30. **Đáp án D.**
(Hình vẽ giống câu 29)

Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH$ là hình chiếu của AC lên mặt phẳng $(SBC) \Rightarrow \widehat{(AC,(SBC))} = \widehat{(AC,HC)} = \widehat{ACH}$.

Tam giác SAB vuông $\Rightarrow AH = \dfrac{SA.AB}{SB} = \dfrac{a\sqrt{6}.a}{a\sqrt{7}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

Vì ΔAHC vuông tại $H \Rightarrow \sin\widehat{ACH} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Câu 31. **Đáp án D.**



Ta có: $\tan\beta = \dfrac{BB'}{B'C'}$. $\triangle AHB$ vuông tại H

(H là trung điểm của BC)

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{2AH}{BC}$

$\Rightarrow \tan^2\alpha + \tan^2\beta = \dfrac{4\left(AI^2 + AH^2\right)}{BC^2}$ (*)

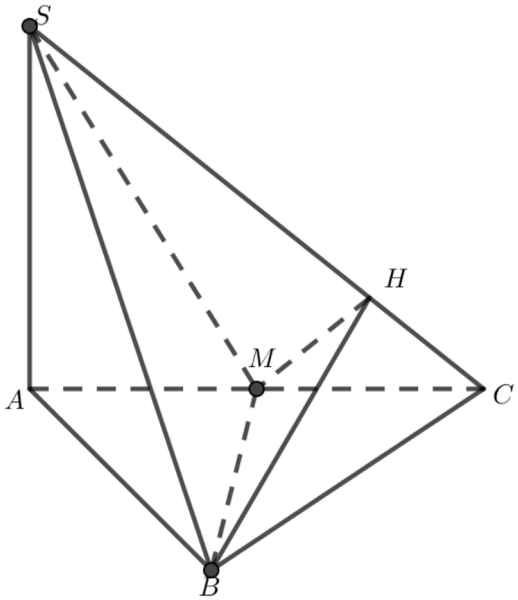
Mà $\triangle AIH$ vuông tại A nên $AI^2 + AH^2 = IH^2$.

$\triangle BIC$ vuông tại

$I \Rightarrow IH = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow BC^2 = 4IH^2$. Thay vào (*)

Ta có: $\tan^2\alpha + \tan^2\beta = 1$.

Câu 32. **Đáp án A.**



Dựng $BJ \perp SC(1), BI \perp AC \Rightarrow SA \perp BI$

$\Rightarrow BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp SC$ (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow SC \perp (BIJ) \Rightarrow IJ \perp SC$

$\Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (ASC) và

(BSC) là $\varphi = \widehat{BJI}$.

Do $\triangle BIJ$ vuông tại I nên $\widehat{BJI} = 60^0$

$\Rightarrow BI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BJ \Rightarrow \dfrac{1}{BI^2} = \dfrac{4}{3}.\dfrac{1}{BJ^2}$ (3)

ΔSBC có $\widehat{BSC} = 45^0 \Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại

B. Trong tam giác SJB vuông tại J có

$\widehat{JSB} = 45^0 \Rightarrow SB = \sqrt{2}BJ \Rightarrow \dfrac{1}{BJ^2} = \dfrac{2}{BC^2}$

Từ (3) và $(4) \Rightarrow \dfrac{1}{BC^2}\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha} + 1\right) = \dfrac{4}{3}.\dfrac{2}{BC^2}$

Giải phương trình ta được $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.