

- Nếu trình bày lời giải theo sơ đồ sau: Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} (*)$ thì lời giải chưa chính xác

Vì dấu hiệu nêu trong **định lý 3** chỉ phát biểu khi $y''(x_0) \neq 0$. Các bạn sẽ thấy điều đó rõ hơn bằng cách giải bài toán sau:

1. Tìm m để hàm số $y = x^4 + 3mx^2 + m^2 + m$ đạt cực tiểu tại $x = 0$
 2. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3(m-2)x^2 + (m-4)x + 2m - 1$ đạt cực đại tại $x = -1$.
- Nếu ta khẳng định được $y''(x_0) \neq 0$ thì ta sử dụng (*) được.

Ví dụ 2 : Tìm các hệ số a, b sao cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + ab}{ax + b}$ đạt cực trị tại điểm $x = 0$ và $x = 4$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên $\forall x \neq -\frac{b}{a}, a \neq 0$

Ta có đạo hàm $y' = \frac{a^2x^2 + 2abx + b^2 - a^2b}{(ax + b)^2}$

- Điều kiện cần :

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 0$ và $x = 4$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^2 - a^2b}{b^2} = 0 \\ \frac{16a^2 + 8ab + b^2 - a^2b}{(4a + b)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$

- Điều kiện đủ : $\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 4x}{(-x + 2)^2} \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

Từ bảng biến thiên : hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 0$ và $x = 4$.

Vậy $a = -2, b = 4$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3 : Cho hàm số: $y = 2x^2 - 3(m+1)x^2 + 6mx + m^3$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên \mathbb{R}

Ta có: $y' = 6(x-1)(x-m)$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt tức là $m \neq 1$.

Với $m \neq 1$, thì đồ thị của hàm số có các điểm cực trị là $A(1; m^3 + 3m - 1), B(m; 3m^2)$.

$$AB = \sqrt{2} \Leftrightarrow (m-1)^2 + (3m^2 - m^3 - 3m + 1) = 2 \Leftrightarrow m = 0; m = 2 \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Vậy, $m = 0; m = 2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4 : Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2}$. Tìm giá trị của tham số thực m sao cho hàm số có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn: $OA^2 + OB^2 = 120$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$

$$\text{Ta có: } y'(x) = \frac{x^2 + 4x + 4 - m^2}{(x+2)^2} = \frac{g(x)}{(x+2)^2}$$

Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi $y'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu qua mỗi nghiệm tức là $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\text{Nghĩa là phải có: } \begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ g(-2) = m^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m \neq 0.$$

Khi đó hai điểm cực trị là $A(-2 - m; -2), B(-2 + m; 4m - 2)$

$$\overrightarrow{OA} = (-2 - m; -2) \Rightarrow OA^2 = (-2 - m)^2 + (-2)^2, \overrightarrow{OB} = (-2 + m; 4m - 2) \Rightarrow OB^2 = (-2 + m)^2 + (4m - 2)^2$$

$$\Rightarrow OA^2 + OB^2 = 18m^2 - 16m + 16 = 120 \Leftrightarrow m = -2 \text{ hoặc } m = \frac{26}{9} \text{ thỏa điều kiện } m \neq 0 \text{ Vậy, } m = -2 \text{ hoặc}$$

$$m = \frac{26}{9} \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

Ví dụ 5 : Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho AB nhỏ nhất.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên \mathbb{R}

$$\text{Ta có: } y' = x^2 - 2mx - 1$$

Ta có: $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 .

Giả sử các điểm cực trị của hàm số là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

Ta có: $y = \frac{1}{3}(x-m).y' - \frac{2}{3}(m^2+1)x + \frac{2}{3}m+1$ (bạn đọc xem thêm bài toán 03, dạng toán 03)

$$\Rightarrow y_1 = -\frac{2}{3}(m^2+1)x_1 + \frac{2}{3}m+1; \quad y_2 = -\frac{2}{3}(m^2+1)x_2 + \frac{2}{3}m+1$$

$$\text{Suy ra: } AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (4m^2 + 4) \left[1 + \frac{4}{9}(m^2 + 1)^2 \right] \geq 4 \left(1 + \frac{4}{9} \right)$$

$$\Rightarrow AB \geq \frac{2\sqrt{13}}{3}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow m = 0. \text{ Vậy, } \min AB = \frac{2\sqrt{13}}{3} \text{ khi } m = 0.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x$ là:

- A. 4 B. -2 C. 2 D. -4

Câu 2: Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^3 - m^2$ có hai điểm cực trị A, B. Tìm m để đường thẳng AB đi qua điểm M(0; -2)

- A. $m = 0$ hoặc $m = 2$ B. $m = -1$ hoặc $m = 2$
C. $m = 0$ hoặc $m = -2$ D. $m = -1$ hoặc $m = -2$

Câu 3. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = x^3 - mx + 1$ có hai cực trị:

- A. $m > 0$ B. $m < 0$ C. $m \geq 0$ D. $m \leq 0$

Câu 4. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = x^3 - 2mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$:

- A. $m = \frac{3}{2}$ B. $m = -\frac{3}{2}$ C. $m = \frac{2}{3}$ D. $m = -\frac{2}{3}$

Câu 5. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 5x - 17$ có hai điểm cực trị là x_1, x_2 . Khi đó tích $x_1 \cdot x_2$ bằng:

- A. 5 B. -5 C. 8 D. $-2\sqrt{11}$

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 . Tích $x_1 \cdot x_2$ bằng

- A. -3 B. 2 C. -2 D. 3

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$. Biểu thức liên hệ giữa giá trị cực đại (y_{CD}) và giá trị cực tiểu (y_{CT}) là:

- A. $y_{CD} = -3 \cdot y_{CT}$ B. $y_{CD} = 3 \cdot y_{CT}$ C. $y_{CT} = -3 \cdot y_{CD}$ D. $y_{CD} = -y_{CT}$

Câu 8: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx + m - 5$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi tham số m lấy giá trị bằng bao nhiêu?

- A. $m = 4$ B. $m = 1$ C. $m = -3$ D. $m = -1$

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - x^2 + mx - 5$ có hai cực trị. Chọn kết quả đúng:

- A. $m < \frac{1}{3}$ B. $m > \frac{1}{3}$ C. $m \geq \frac{1}{3}$ D. $m \leq \frac{1}{3}$

Câu 10. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 1$. Khi đó đoạn thẳng AB bằng :

- A. $2\sqrt{5}$ B. $3\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{2}$

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + (m + 1)x^2 + (m^2 - 4)x - m + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$

- A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. $m = -3$ D. $m = 3$

Câu 12. Hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - (m + 1)x^2 + mx - 7$ có hai cực trị khi và chỉ khi:

- A. $m > -\frac{1}{2}$ và $m \neq 0$ B. $m = 3$ C. $m = 0$ D. $m < 5$

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (2m - 1)x - 1$, m là tham số thực. Mệnh đề nào sau đây là sai

- A. Hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu với mọi $m \in \mathbb{R}$
B. Hàm số có hai điểm cực trị khi $m < 1$
C. Hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu khi $m \neq 1$
D. Hàm số có cực trị khi $m > 1$

Câu 14. Hàm số $y = x^3 - mx + 1$, m là tham số thực, có 2 cực trị khi :

- A. $m > 0$ B. $m < 0$ C. $m = 0$ D. $m \neq 0$

Câu 15. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi giá trị của tham số m thỏa mãn:

- A. $m = 0$ B. $m \neq 0$ C. $m > 0$ D. $m < 0$

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)$ đạt cực đại tại $x = 1$. Kết quả nào đúng?

- A. Không có giá trị m B. $m = 2$ C. $m = -1$ D. $m = -2$

Câu 17: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$ là

- A. $(-1; -1) \vee (-3; -5)$. B. $(-3; -5)$.
C. $(-1; -1)$. D. $(-1; -3)$.

Câu 18: Điểm cực đại của hàm số $y = x - \sin 2x$ là .

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$. B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.

Câu 19: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m^2 - m + 2)x^2 + (3m^2 + 1)x - 1$ đạt cực tiểu tại $x = -2$ khi và chỉ khi.

- A. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -3 \end{cases}$. C. $m = 1$. D. $m = 3$.

Câu 20: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2m$ có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$ khi và chỉ khi :

- A. $m \in \{-1; 0; 1\}$. B. $m = -1$. C. $m = \pm 1$. D. $m \in \varnothing$.

Câu 21. Giá trị m để đồ thị hàm $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

- A. $m = 1$ B. $m = \sqrt[3]{3}$ C. $m = -\sqrt[3]{3}$ D. $m = -1$

Câu 22. Giá trị m để đồ thị hàm $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$

- A. $m = 2$ B. $m = -4$ C. $m = -2$ D. $m = 1$

Câu 23. Ba điểm cực trị của hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 1$ tạo thành một tam giác cân có diện tích S bằng

- A. $S = 2\sqrt{2}$ B. $S = 8\sqrt{2}$ C. $S = 3\sqrt{2}$ D. $S = 4\sqrt{2}$

Câu 24. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 1)x - m + 2$ có cực đại, cực tiểu và hoành độ các điểm cực trị dương thì tập giá trị của m bằng

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ B. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ C. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$ D. $(-\infty; 0)''$

Câu 25. Cho hàm số $y = x^3 - 2mx + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- A. $m = \frac{3}{2}$ B. $m = -\frac{3}{2}$ C. $m = \frac{2}{3}$ D. $m = -\frac{2}{3}$

Câu 26. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m + 1)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có cực trị.

- A. $m < 0$ B. $m < 2$ C. $m \geq 2$ D. $m \geq 0$

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

- A. $m = 0$ B. $m < 0$ C. $m > 0$ D. $m \neq 0$

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 + (m + 1)x^2 - 2m + 1$ đạt cực đại tại $x = 2$.

- A. $m = 2$ B. $m = 1$ C. $m = 5$ D. $m = 3$

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx^2 + \left(m - \frac{2}{3}\right)x - 7$ có cực trị tại $x = 1$.

- A. $m = -\frac{7}{9}$ B. $m = -3$ C. $m = 7$ D. $m = -7$

Câu 30. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho.

- A. $y = -2x + 1$. B. $y = 2x - 1$. C. $y = -2x - 1$. D. $y = 2x + 1$.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + 3mx + m^2 - 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

- A. $m = 0$. B. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.
C. $m < 0$. D. $m > 0$.

Câu 32. Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 2(5m - 8)x + 1$ đạt cực đại và cực tiểu.

- A. $m < 2$ hoặc $m > 8$ B. $2 \leq m \leq 8$ C. $2 < m < 8$ D. $m \leq 2$ hoặc $m \geq 8$

Câu 33. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 5$ đạt cực tiểu tại $x = -1$ khi:

- A. $m = -3$ B. $m = -1$ C. $m = 0$ D. $m = 1$

Câu 34. Tìm tất cả giá trị m sao cho điểm $I(1;0)$ thuộc đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$

- A. $m = \pm 1$ B. $m = \pm 2$ C. $m = 0$ D. $\forall m$

Câu 35. Tìm tất cả giá trị m để hàm số $y = mx^4 + (m + 3)x^2 + 2m - 1$ chỉ đạt cực đại mà không có cực tiểu

- A. $m \leq -3$ B. $m \leq 0$ C. $\begin{cases} m > 3 \\ m \leq 0 \end{cases}$ D. $m > 3$

Câu 36. Tìm tất cả giá trị m để hàm số $y = (m - 1)x^4 + (m^2 - 2m)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị

- A. $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m < 0 \\ 1 < m < 2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} -1 < m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m < -1 \\ 1 < m < 2 \end{cases}$

Câu 37. Tìm tất cả giá trị m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6mx + m$ có hai điểm cực trị

A. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases}$ B. $0 < m < 8$ C. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 8 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 2 \end{cases}$

Câu 38. Hàm số $y = x^3 - mx + 1$ có hai cực trị khi:

A. $m < 0$ B. $m > 0$ C. $m = 0$ D. $m \neq 0$

Câu 39: Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$. Với giá trị nào của m thì hàm số có 3 điểm cực trị:

A. $y = x^4 + 4x^2 + 2$ B. $m < 0$ C. $m = 0$ D. $m \neq 0$

Câu 40: Giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 2mx + 1$ ãiit cõic tieäu tại $x = 1$ là:

A. $m = -\frac{2}{3}$; B. $m = \frac{2}{3}$; C. $m = -\frac{3}{2}$; D. $m = \frac{3}{2}$

Câu 41: Hàm số $y = -x^3 + 2mx + 3$ có 2 điểm cực trị khi :

A. $m > 0$ B. $m < 0$ C. $m = 0$ D. $m \neq 0$

Câu 42. Giá trị của m để hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$ là:

A. $m = 1$ B. $m = -2$ C. $m = \frac{3}{2}$ D. $m = \frac{1}{2}$

Câu 43. Khoảng cách giữa 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ là:

A. 4 B. $\sqrt{5}$ C. 5 D. $2\sqrt{5}$

Câu 44. Giá trị của m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có cực đại và cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O là:

A. $m = \pm \frac{1}{2}$ B. $m = 3$ C. $m = 0, m = \pm \frac{1}{2}$ D. $m = 0, m = 2$

Câu 45: Hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x$ đạt cực tiểu tại $x_0 = 1$ khi :

A. $m = 2$ B. $m = 0$. C. $m = 0$ hay $m = 2$. D. $m \neq 0$ và $m \neq 2$.

Câu 46. Phương trình đường thẳng nào sau đây là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$?

A. $y = 2x + 6$. B. $y = 2x - 6$. C. $y = 6 - 2x$. D. $y = 3x$.

Câu 47. Phương trình đường thẳng nào sau đây là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$?

A. $y = x - 2$. B. $y = 2 - x$. C. $y = 2 - 2x$. D. $y = 2x - 2$.

Câu 48. Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ có hệ số góc là

A. -2. B. 1. C. 2. D. 5.

Câu 49. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$. Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có dạng: