C. Hàm số luôn giảm trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số đơn điệu trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ (vừa tăng, vừa giảm trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$).

Hướng dẫn giải

+) Xét trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$$y=\cos 2x+\sin 2x.\tan x=\frac{\cos 2x.\cos x+\sin 2x.\sin x}{\cos x}=1\Rightarrow y'=0$$

+) Hàm số không đổi trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

1.1.2 Tìm tham số, để hàm số đơn điệu.

Câu 21. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định ?

A. $m<1$. B. $m\le -3$. C. $m\le 1$. D. $m<-3$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

+) $y'=\frac{m-1}{(x+1)^2}$

+) Để hàm số giảm trên các khoảng mà nó xác định $\Leftrightarrow y'<0,\forall x\ne -1\Leftrightarrow m<1$

Câu 22. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-3\le m\le 1$. B. $m\le 1$. C. $-3<m<1$. D. $m\le -3; m\ge 1$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

+) $y'=-x^2-2mx+2m-3$

+) Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{y'}<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<0 \ \ (hn) \\ m^2+2m-3\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3\le m\le 1$$

Câu 23. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+1)+2m-1}{x-m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó?

A. $m\le 1$. B. $m>1$. C. $m<1$. D. $m\ge 1$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

+) $y'=\dfrac{x^2-2mx+m^2-m+1}{(x-m)^2}$

+) Để hàm số tăng trên từng khoảng xác định của nó

$\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in D \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-m+1\ge 0, \forall x\in D$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1\ge 0\,(hn) \\ m-1\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\le 1$$

Câu 24. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=x+m\cos x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $|m|\le 1$. B. $m>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. C. $|m|\ge 1$. D. $m<\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

+) $y'=1-m\sin x$

+) Đặt $t=\sin x, t\in[-1;1] \Rightarrow y'=1-mt=g(t)$

+) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow g(t)=1-mt\ge 0, \forall t\in[-1;1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(-1)\ge 0 \\ g(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -1 \\ m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1\le m\le 1$$

Câu 25. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=(m-3)x-(2m+1)\cos x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m\in\left[-4;\dfrac{2}{3}\right]$. B. $m\ge 2$. C. $\begin{cases} m>3 \\ m\ne 1 \end{cases}$. D. $m\in(-\infty;2]$.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

+) $y'=m-3+(2m+1)\sin x$

+) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (2m+1)\sin x\le 3-m$

Trường hợp 1: $m=-\frac{1}{2}$ ta có $0\le\frac{7}{2}$ (hn). Vậy hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $m<-\frac{1}{2}$ ta có $\sin x\ge\frac{3-m}{2m+1},\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1}\le -1$

$$\Leftrightarrow 3-m\ge -2m-1 \Leftrightarrow m\ge -4$$

Trường hợp 3: $m>-\frac{1}{2}$ ta có $\sin x\le\frac{3-m}{2m+1},\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1}\ge 1$

$$\Leftrightarrow 3-m\ge 2m+1 \Leftrightarrow m\le\frac{2}{3}$$

+) Vậy $m\in\left[-4;\frac{2}{3}\right]$

Cách 2:

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

+) $y'=m-3+(2m+1)\sin x$

+) Đặt $t=\cos x, t\in\left[-1;1\right] \Rightarrow y'=m-3+(2m+1)t=g(t)$

+) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow g(t)=m-3+(2m+1)t\le 0,\forall t\in\left[-1;1\right]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(-1)\le 0 \\ g(1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -4 \\ m\le\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -4\le m\le\frac{2}{3}$$

Câu 26. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=2x^3-3(m+2)x^2+6(m+1)x-3m+5=0$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 0. B. -1. C. 2. D. 1.

Hướng dẫn giải

+) Tính nhanh, ta có $f^{'}(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=m+1 \end{array}\right.$

+) Phương trình $f^{'}(x)=0$ có nghiệm kép khi $m=0$, nghĩa là hàm số luôn đồng biến.

+) Trường hợp $m\neq 0$, phương trình $f^{'}(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt (không thỏa yên cầu bài toán).

Câu 27. **[VD]**Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}+mx^2-mx-m$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m=-1$. B. $m=0$. C. $m=-5$. D. $m=-6$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

+) $y'=x^2+2mx-m$

+) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0(hn) \\ m^2+m\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1\leq m\leq 0$

+) Vậy giá trị nhỏ nhất của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $m=-1$

Câu 28. **[VD]**Tìm số nguyên m nhỏ nhất sao cho hàm số $y=\frac{(m+3)x-2}{x+m}$ luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó?

A. Không có m. B. $m=-2$. C. $m=0$. D. $m=-1$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

+) $y'=\frac{m^2+3m+2}{(x+m)^2}$

+) Yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow y'<0, \forall x\in D \Leftrightarrow m^2+3m+2<0 \Leftrightarrow -2<m<-1$

+) Vậy không có số nguyên m nào thuộc khoảng $(-2;-1)$.

Câu 29. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty;1)$?

A. $-2<m\leq -1$. B. $-2\leq m\leq -1$. C. $-2<m<2$. D. $-2\leq m\leq 2$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

+) $y' = \dfrac{m^2 - 4}{(x+m)^2}$

+) Để hàm số giảm trên khoảng $(-\infty;1) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (-\infty;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ 1 \le -m \end{cases}$

$\Leftrightarrow -2 < m \le -1$

Câu 30. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $m \ge 12$. B. $m \le 12$. C. $m \ge 0$. D. $m \le 0$.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = 3x^2 - 12x + m$

Trường hợp 1: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0\ (hn) \\ 36 - 3m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 12$

Trường hợp 2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 \le 0$ (*)

Trường hợp 2.1: $y' = 0$ có nghiệm $x = 0$ suy ra $m = 0$. Nghiệm còn lại của $y' = 0$ là $x = 4$ (không thỏa (*))

Trường hợp 2.2: $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 36 - 3m > 0 \\ 4 < 0 (vl) \\ \dfrac{m}{3} > 0 \end{cases} \Rightarrow$ không có m

+) Vậy $m \ge 12$

Cách 2:

+) Hàm số đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$ $\Leftrightarrow m\ge 12x-3x^2=g(x),\forall x\in(0;+\infty)$.

+) Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $\left(0;+\infty\right)$.

x	0		2		$+\infty$
g'		+	0	-	
g			12		
		↗		↘	
	0				$-\infty$

+) Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m\ge \max g(x)\Leftrightarrow m\ge 12$

Câu 31. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m-2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. $m\in\left(-\infty;2\right]$. B. $m\in\left[-5;2\right)$. C. $m\in\left(2,+\infty\right)$. D. $m\in\left(-\infty;-5\right)$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

+) $y'=4x^3-4(m-1)x$.

+) Hàm số đồng biến trên $(1;3)$

$\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(1;3)\Leftrightarrow g(x)=x^2+1\ge m,\forall x\in(1;3)$.

+) Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;3)$.

x	1		3
g'		+	0
g			10
		↗	
	2		

+) Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \le \min g(x) \Leftrightarrow m \le 2$.

Câu 32. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

A. $m = -1; m = 9$. B. $m = -1$. C. $m = 9$. D. $m = 1; m = -9$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = x^2 - mx + 2m$

+) Ta không xét trường hợp $y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$ vì $a = 1 > 0$

+) Hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3 $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 8 \ hay \ m < 0 \\ m^2 - 8m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1 \ hay \ m = 9$$

Câu 33. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\sin x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$?

A. $m \le 0; \frac{1}{2} \le m < 1$. B. $m \le 0; \frac{1}{2} \le m \le 1$. C. $m < 1$. D. $m \le 1$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sin x, t \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(t) = \frac{1 - t}{t - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

+) Hàm số nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f'(t) = \frac{m - 1}{(t - m)^2} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge \frac{1}{2} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0 \text{ hoặc } \frac{1}{2} \le m < 1$$

Câu 34. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$?

A. $m \le 0; 1 \le m < 2$.	B. $1 \le m < 2$.	C. $m \ge 2$.	D. $m \le 0$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \tan x, t \in (0;1) \Rightarrow f(t) = \dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

+) Hàm số đồng biến trên $(0;1) \Leftrightarrow f'(t) = \dfrac{-m+2}{(t-m)^2} > 0, \forall t \in (0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m+2>0 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0 \text{ hoặc } 1 \le m < 2$$

Câu 35. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ giảm trên nửa khoảng $[1;+\infty)$?

A. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right]$.	B. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right)$.	C. $\left[-2; -\frac{14}{15}\right]$.	D. $\left[-\frac{14}{15}; +\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D = \mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$mx^2 + 14mx + 14 \le 0, \forall x \ge 1$, tương đương với $g(x) = \dfrac{-14}{x^2 + 14x} \ge m$ (1)

+) Dễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x \in [1;+\infty)$

suy ra $\min\limits_{x \ge 1} g(x) = g(1) = -\dfrac{14}{15}$

+) Kết luận: (1) $\Leftrightarrow \min\limits_{x \ge 1} g(x) \ge m \Leftrightarrow -\dfrac{14}{15} \ge m$

Câu 36. **[VD]**Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty; \frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\dfrac{p}{q}$ tối giản và $q > 0$. Hỏi tổng $p + q$ là?

A. 7.	B. 9.	C. 5.	D. 3.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

+) $y' = -4x^3 + 2(2m-3)x$.

+) Hàm số nghịch biến trên $(1;2)$

$$\Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow m \le x^2 + \frac{3}{2} = g(x), \forall x \in (1;2).$$

+) Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;2)$.

+) $g'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

+) BBT

x	1		2
g'		$+$	0
g			$\frac{11}{2}$
		$\nearrow$	
	$\frac{5}{2}$		

+) Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \le \min g(x) \Leftrightarrow m \le \frac{5}{2}$

+) Vậy $p + q = 5 + 2 = 7$.

Câu 37. **[VD]**Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m + 2}{x - m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. Vô số. B. Bốn. C. Hai. D. Không có.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

+) $y' = \frac{x^2 - 2mx + 2m^2 - m - 2}{(x-m)^2} = \frac{g(x)}{(x-m)^2}$.

+) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $g(x) \ge 0, \forall x \in D$.

+) Điều kiện tương đương là $\Delta_{g(x)} = -m^2 + m + 2 \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 2 \end{array}\right.$

+) Kết luận: Có vô số giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 38. **[VD]**Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

+) $y'=\dfrac{2x^2-4mx+m^2-2m-1}{(x-m)^2}=\dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$

+) Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x)\ge 0,\forall x>1$ và $m\le 1$ (1)

Vì $\Delta'_g=2(m+1)^2\ge 0,\forall m$ nên (1)

$\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm thỏa $x_1\le x_2\le 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases}2g(1)=2(m^2-6m+1)\ge 0\\ \dfrac{S}{2}=m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow m\le 3-2\sqrt{2}\approx 0{,}2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 39. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số α và β sao cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{-x^3}{3}+\dfrac{1}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)x^2-\dfrac{3}{2}x\sin\alpha\cos\alpha-\sqrt{\beta-2}$ luôn giảm trên $\mathbb{R}$?

A. $\dfrac{\pi}{12}+k\pi\le\alpha\le\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$. B. $\dfrac{\pi}{12}+k\pi\le\alpha\le\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$.

C. $\alpha\le\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$. D. $\alpha\ge\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện xác định: $\beta\ge 2$

+) Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình $\dfrac{1}{2}\le\sin 2\alpha\le 1$

+) Kết luận: $\dfrac{\pi}{12}+k\pi\le\alpha\le\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$.

Câu 40. **[VDC]**Tìm mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số $y=f(x)=2x+a\sin x+b\cos x$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$?