Đáp án

1-C	6-B	11-D	16-A	21-D	26-B	31-C	36-C	41-D	46-D
2-B	7-C	12-C	17-B	22-B	27-A	32-A	37-B	42-A	47-B
3-A	8-C	13-B	18-B	23-C	28-C	33-D	38-C	43-C	48-D
4-D	9-A	14-C	19-A	24-A	29-A	34-A	39-A	44-D	49-A
5-A	10-A	15-C	20-C	25-C	30-D	35-C	40-B	45-A	50-B

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1:

Lý thuyết cần nhớ: Điều kiện xác định bao gồm biểu thức trong căn bậc hai phải không âm và mẫu số phải khác 0.

Khi đó, với bài toán ta có: $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq 1$

Vậy đáp án đúng là **C**.

Sai lầm thường gặp: Nhiều học sinh quên điều kiện mẫu số khác 0 và đưa tới kết quả B. Một số khác giải sai bất phương trình $1-x^2 \geq 0$ và đưa ra kết quả khác.

Câu 2:

Phân tích: Ta xét:

$$y' = 2 + \frac{1}{x} - 2x = \frac{2x+1-2x^2}{x}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Đến đây ta phải xét dấu của y'.Lưu ý rằng điều kiện xác định của hàm số là $x > 0$ (để $\ln x$ tồn tại). Và ta thu được hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left(0; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$.

Vậy đáp án đúng là **B.**

Sai lầm thường gặp: Sai lầm cơ bản nhất:

+ Mặc định là hàm số đồng biến khi và chỉ khi $y' > 0$ và đưa tới đáp án A.

+ Khi khắc phục được $y' \geq 0$ nhưng do quên mất điều kiện $x > 0$ nên lại thu được đáp án D.

+ Giải sai bất phương trình có thể thu được đáp án C

Câu 3:

Điều kiện cần và đủ hai đồ thị không cắt nhau là hệ phương trình không có nghiệm:

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x + 1 \\ y = \dfrac{4x + m - 1}{x - 1} \end{cases}$$

Điều này tương đương với phương trình (*) sau không có nghiệm:

$$x^3 - 3x + 1 = \frac{4x + m - 1}{x - 1} (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^3 - 3x + 1)(x - 1) = 4x + m - 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - x^3 - 3x^2 = m \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Xét $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2$ dễ thấy f(x) là một hàm liên tục và nhận mọi giá trị dương. Nên điều kiện cần để (*) vô nghiệm là: $m = f(1)$. Nhưng $f(1) = -3 < 0$ do đó, trường hợp này cũng không xảy ra. Vậy đáp án bài toán là không tồn tại giá trị của m và đáp án đúng là **A**.

Lưu ý: Nhiều học sinh cảm thấy lúng túng khi giải quyết phương trình (*) và thường sẽ lập luận theo kiểu tính:

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x = x(4x^3 - 3x^2 - 6x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{8}$$

Và rõ ràng là đang làm phức tạp bài toán lên. Hãy đọc kĩ đề bài vì đề bài chỉ yêu cầu tìm $m > 0$ thôi nhé.

Câu 4: Ta có:

$$y = \frac{x}{x^2 - 3x} = \frac{x}{x(x - 3)} = \frac{1}{x - 3}; \forall x \neq 0; x \neq 3$$

Rõ ràng, hàm số này chỉ có duy nhất một tiệm cận đứng là $x = 3$. Vậy đáp án đúng là **D.**

Sai lầm thường gặp: Do không rút gọn nên nhiều học sinh ra đáp án A.

Câu 5: Ta có: $y' = 3x^2 - 2x + m$

Điều kiện cần tìm là:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ y'\left(-\dfrac{1}{2}\right) \geq 0 \\ y'\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3m > 0 \\ \dfrac{3}{4} + 1 + m \geq 0 \\ \dfrac{3}{4} - 1 + m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{4} \leq m < \frac{1}{4}$$

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 6:

Phân tích: Khẳng định 2 và 3 đúng chúng ta dễ dàng kiểm tra được tính đúng đắn! Còn khẳng định 1 là một câu hỏi khá lạ đối với học sinh. Tuy nhiên, ta chỉ cần chú ý tính chất điểm uốn là tâm đối xứng và ta chỉ cần chú ý nếu tồn tại 2 điểm cùng một bên điểm uốn mà cách đều điểm uốn thì bài toán được giải quyết. (Công việc này khác đơn giản). Đáp án đúng là **B.**

Cây 7: Công việc của bài toán này thì không có gì khó. Bài toán này có thể dùng đạo hàm và rút ra nhận xét, hoặc đơn giản hơn ta chỉ cần xét tại các điểm mà đề bài đã cho. Đáp án đúng là **C.**

Câu 8: Ta có $y'=4x(x^2-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\end{array}\right.$

Để hàm số có CĐ, CT thì $m>0$

Khi đó, đồ thị hàm số có các điểm CĐ, CT là $A(0;3m+1);B(-\sqrt{m};-m^2+3m+1);$

$C(\sqrt{m};-m^2+3m+1)$

Vì $A\in Oy;B,C$ đối xứng với nhau qua Oy nên:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|y_A-y_B|.|x_B-x_C|=m^2.\sqrt{m}=1\Leftrightarrow m=1(tm)$$

Đáp án đúng là **C**.

Sai lầm thường gặp: Trong công thức diện tích thiếu $1/2$ nên có thể dẫn tới đáp án A. Bài toán này sẽ phức tạp nếu không để ý tới tính đối xứng của B và C.

Câu 9: Rõ ràng từ hình vẽ ta có thể tháy ngay đó là đồ thị hàm số bậc ba. Tuy nhiên dễ nhìn thấy khi x càng lớn thì đồ thị càng đi xuống tức là y càng ngày càng âm. Do đó, hệ số của x^3 phải âm nên chỉ có thể là đáp án **A.**

Câu 10: Ta có: $y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$, điều kiện có 3 cực trị là $m>0$.

Khi đó cực trị là $A(0;2),B(\sqrt{m};-m^2+2);C(-\sqrt{m};-m^2+2)$, tam giác ABC cân tại A. Tâm I của đường tròn (ABC) nằm trên trục tung $\Rightarrow I(0;y)$

Ta có $IA=IB\Rightarrow I\left(0;2-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2m}\right)$

Đường tròn (ABC) qua $D\left(\frac{3}{5};\frac{9}{5}\right)$

$$\Leftrightarrow ID=IA\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2m}\right)^2=\left(\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2m}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2m}-1=0\Leftrightarrow m=1 \text{ hoặc } m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(do $m>0$). Vậy đáp án đúng là **A.**

<u>Sai lầm thường gặp:</u> Quên điều kiện $m>0$ nên có thể ra đáp án B.

Câu 11: Đáp án đúng là **D** vì:

f(x) xác định liên tục trên đoạn $[0;2]$; ta có : $f'(x)=-8x^3+8x$

Với $x\in[0;2]$ thì $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Ta có: $f(0)=10;f(1)=12;f(2)=-6$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)=12, \min\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=-6$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]} f(x)+\min\limits_{[0;2]} f(x)=6$

Câu 12: Ta có tập xác định: $\log_3(x+1)\neq 0$

$\begin{cases}x+1>0\\x+1\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x\neq 0\end{cases}$. Vậy đáp án đúng là **C.**

Câu 13:

Điều kiện: $x>\dfrac{1}{3}(*)$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho:

$\Leftrightarrow \log_5(3x-1)^2+1=3\log_5(2x+1)\Leftrightarrow \log_5 5(3x-1)^2=\log_5(2x+1)^3$

$\Leftrightarrow 5(3x-1)^2=(2x+1)^3\Leftrightarrow 8x^3-33x^2+36x-4=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2.(8x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{1}{8}\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện (*) thì $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình nên đáp án đúng là **B.**

<u>Sai lầm thường gặp:</u> Quên đối chiếu với điều kiện nên sẽ khoanh đáp án A. Đặc biệt sai lầm này thường xảy ra khi các học sinh chỉ chú tâm vào phương trình bậc ba và bấm máy tính.

Câu 14: Đáp án đúng là **C.**

Điều kện: $x>0(*)$

Với điều kiện (*) ta có:

$\Leftrightarrow \log_3(x^2+3x)=\log_3(2x+2)\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1(chon)\\x=-2(loai)\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$

Câu 15:

Phân tích:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x + 1 \neq 0; x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \neq x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$

Khi đó phương trình:

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2-1) = \log_2(x+1)^2 + \log_2|x-2| \Leftrightarrow \log_2(x^2-1) = \log_2\left[(x+1)^2|x-2|\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = (x+1)^2|x-2| \Leftrightarrow x - 1 = (x+1)|x-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2 \\ x - 1 = (x+1)(x-2) \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x < 2 \vee x < -1 \\ x - 1 = (x+1)(-x+2) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < x < 2 \vee x < -1 \\ x^2 = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1 + \sqrt{2}$$

Đáp án đúng là **C.**

Sai lầm thường gặp: Không để ý tới điều kiện có thể gây ra bốn nghiệm và tổng bằng 2 và ra đáp án A.

Câu 16:

Phân tích: $\log_3(x-2) = \log_4(x^2 - 4x + 3)$

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$

Phương trình đã cho: $\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 4x + 4) = \log_2(x^2 - 4x + 3)$

Đặt $t = x^2 - 4x + 3$ ta có phương trình:

$$\log_3(t+1) = \log_2 t = a \Leftrightarrow \begin{cases} t + 1 = 3^a \\ t = 2^a \end{cases} \Rightarrow 2^a + 1 = 3^a \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^a + \left(\frac{1}{3}\right)^a = 1 \quad (1)$$

Do hàm số $f(a)=\left(\frac{2}{3}\right)^a+\left(\frac{1}{3}\right)^a$ nghịch biến trên R nên phương trình (1) có tối đa một nghiệm. Mặt khác $f(1)=1\Rightarrow a=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1)

$$a=1\Rightarrow t=2\Rightarrow x^2-4x+3=2\Leftrightarrow x^2-4x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2+\sqrt{3}\\x=2-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Đối chếu điều kiện ta có nghiệm phương trình: $x=2+\sqrt{3}$. Vậy đáp án đứng là **A.**

<u>Sai lầm thường gặp:</u> Do không kiểm tra điều kiện nên dễ dàng nhầm sang đáp án B.

<u>Lưu ý:</u> Đối với bài toán này, vì hình thức phức tạp nên ta có thể giải bằng cách thử đáp án bằng máy tính là hợp lý nhất.

Câu 17: Điều kiện:

$$\begin{cases}x^2+4x-5>0\\x+7>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-5)\cup(1;+\infty)\\x>-7\end{cases}$$
$$\Rightarrow x\in(-7;-5)\cup(1;+\infty)$$

Từ phương trình suy ra:

$$\Rightarrow \log_2(x^2+4x-5)>-2\log_2\frac{1}{x+7}\Leftrightarrow\log_2(x^2+4x-5)>\log_2(x+7)^2\Leftrightarrow x<-\frac{27}{5}$$

Đối chiếu điều kiện, ta có nghiệm $x\in\left(-7;-\frac{27}{5}\right)$

Đáp án đúng là **B.**

<u>Sai lầm thường gặp:</u> Do đối chiếu sai điều kiện hoặc không biết cách kết hợp nghiệm nên sẽ thu ra kết quả sai.

Câu 18:

<u>Phân tích:</u> 10 năm đó bao gồm 3 năm chiến tranh và 7 năm hòa bình. Do đó, dân số sẽ được tính là: $4.(0,98)^3.(1,04)^7\approx 4,95$ tỷ người

Vậy đáp án đúng là **B**

<u>Sai lầm thường gặp:</u> Không hiểu bản chất! Lại tính theo kiểu tăng giảm phần trăm: $7.4\%-3.2\%=22\%$ do đó, dân số: $4.1,22=4,88$ tỷ người và ra đáp án **A**

Câu 19: Ta có:

$$a-b=\frac{a.2^b-b.2^a}{2^a+2^b}\Leftrightarrow(a-b)(2^a+2^b)=a.2^b-b.2^a$$
$$\Leftrightarrow a.2^a-b.2^b=0\Leftrightarrow a.2^a=b.2^b\Leftrightarrow a=b(a;b>0)$$

Do đó, $2017^a - 2017^b = 0$.

Vậy đáp án đúng là **A**

Câu 20: Điều kiện: $y > 0$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x.\log_3 y - 2 = 2^{2x} (1) \\ 3.2^x.\log_3 y - 9 = \log_3^2 y(2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow \log_3 y = \dfrac{2^{2x}+2}{2^x}$. Thế vào (2) ta được: $3.2^x.\dfrac{2^{2x}+2}{2^x} - 9 = \left(\dfrac{2^{2x}+2}{2^x}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{2x} = 4 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 27(t/m) \\ 2^{2x} = -\dfrac{1}{2}(vn) \end{array}\right.$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4$

Vậy đáp án đúng là **C**

<u>Nhận xét:</u> Các câu 22, 23, 24, 25 ta hoàn toàn có thể sử dụng máy tính để bấm ra nhanh kết quả.

Câu 21: Bài toán này đòi hỏi hiểu sâu sắc lý thuyế nguyên hàm! Dễ thấy nói vắn tắt thì ta có: F(x) là nguyên hàm của f(x) khi và chỉ khi $F'(x) = f(x)$

Do đó, đáp án đúng ở đây là đáp án **D**

Câu 22:

$$I = \int_0^1 (x-1)^3\sqrt{2x-x^2}dx = \int_0^1 (x^2-2x+1)\sqrt{2x-x^2}(x-1)dx$$

Đặt $t = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow t^2 = 2x - x^2 \Rightarrow tdt = (1-x)dx.t(0) = 0; t(1) = 1$

$$I = \int_0^1 (1-t^2)t(-t)dt = \int_0^1 (t^4-t^2)dt = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{15}$$

Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 23: Ta có:

$$I = \int_{\frac{1}{3}}^1 \left[\ln(3x^4+x^2) - 2\ln x\right]dx = \int_{\frac{1}{3}}^1 \left[\ln(3x^2+1) + \ln x^2 - \ln x^2\right]dx = \int_{\frac{1}{3}}^1 \left[\ln(3x^2+1)\right]dx$$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(3x^2+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{6xdx}{3x^2+1} \\ v = x \end{cases}$

$$I = x\ln(3x^2+1)\Big|_{\frac{1}{3}}^{1} - 2\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{6x^2dx}{3x^2+1} = \frac{4\ln 2+\ln 3}{3} - J$$

Với:

$J = \int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(2-\dfrac{2}{3x^2+1}\right)dx = \dfrac{4}{3} - 2\int_{\frac{1}{3}}^{1}\dfrac{dx}{3x^2+1} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ (đặt $\sqrt{3}x = \tan t$ với $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$)

$dx = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1+\tan^2 t)dt$ đổi cận: $x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}; x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3}$. Từ đó tính được:

$$J = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \Rightarrow I = \frac{4\ln 2+\ln 3}{3} - \frac{4}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

Vậy đáp án đúng là **C**

Câu 24: Đặt $x = \sin t, t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. Ta có: $dx = \cos tdt$ và ta có:

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$$

Đổi cận với $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ từ đó:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos tdt}{1+\cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)-1}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \left(t - \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Vậy đáp án đúng là **A**

Câu 25: Đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 - 1 = x \Rightarrow 2udu = dx$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=1 \\ x=3 \Rightarrow u=2 \end{cases}$

Ta có: $\int_0^3 \frac{x-3}{3.\sqrt{x+1}+x+3}dx = \int_1^2 \frac{2u^2-8u}{u^2+3u+2}du = \int_1^2 (2u-6)du + 6\int_1^2 \frac{1}{u+1}du$

$(u^2-6u)\Big|_1^2 + 6\ln|u+1|\Big|_1^2 = -3+6\ln\frac{3}{2}$

Vậy đáp án đúng là **C**

Câu 26: Giải phương trình: $3^x = 2x^2+1$ ta được: $x=0; x=1; x=2$

Do đó, ta có:

$$I = \int_{-1}^3 \min(3^x; 2x^2+1)dx = \int_{-1}^3 3^x dx + \int_0^1 (2x^2+1)dx + \int_1^2 3^x dx + \int_2^3 (2x^2+1)dx$$

$$= \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_{-1}^0 + \left(\frac{2}{3}x^3+x\right)\Big|_0^1 + \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_1^2 + \left(\frac{2}{3}x^3+x\right)\Big|_2^3 = \frac{2}{3\ln 3}+\frac{5}{3}+\frac{6}{\ln 3}+\frac{41}{3} = \frac{46}{3}+\frac{20}{3\ln 3}$$

Vậy đáp án đúng là **B**

<u>Nhận xét</u>: Bài toán khó nhất ở bước giải phương trình để tìm giá trị nhỏ hơn trong mỗi khoảng giá trị.

Câu 27: Ta có:

$$\int_0^x (3t^2-2t+3)dt = x^3+2 \Leftrightarrow x^3-x^2+3x = x^3+2$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Vậy đáp án đúng là **A**

Câu 28: Phương trình hoành độ giao điểm:

$$|x^2-4x| = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-4x=2x \\ x^2-4x=-2x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-6x=0 \\ x^2-2x=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=6 \end{array}\right.$$

Suy ra diện tích cần tính:

$$S = \left|\int_0^2 \left(|x^2-4x|-2x\right)dx\right| + \left|\int_2^6 \left(|x^2-4x|-2x\right)dx\right|$$

Tính $I = \left|\int_0^2 \left(|x^2-4x|-2x\right)dx\right|$. Ta có:

$\forall x \in [0;2]; x^2 - 4x \le 0 \Rightarrow |x^2 - 4x| = -x^2 + 4x$

$\Rightarrow I = \int_0^2 (-x^2 + 4x - 2x)dx = \frac{4}{3}$

Tính $K = \int_2^6 \left(|x^2 - 4x| - 2x\right)dx$

Ta có:

$$\begin{cases} \forall x \in [2;4], x^2 - 4x \le 0 \\ \forall x \in [4;6], x^2 - 4x \ge 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow K = \int_2^4 (4x - x^2 - 2x)dx + \int_4^6 (x^2 - 4x - 2x)dx = -16$

Vậy $S = \frac{4}{3} + 16 = \frac{52}{3}$

Đáp án đúng là **C**

Câu 29:

Ta có: $x.\sin 2x = 2x \Leftrightarrow x.\sin 2x - 2x = 0 \Leftrightarrow x(\sin 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Diện tích hình phẳng là: $S = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x.\sin 2x - 2x)dx\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin 2x - 2x)dx\right|$

Đặt:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = (\sin 2x - 2)dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{\cos 2x}{2} - 2x \end{cases} \Leftrightarrow S = \left|\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{4}\right| = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{4}$$

Đáp án đúng là **B.**

Câu 30:

Gọi $z = a + bi, (a, b \in R) \Rightarrow \bar{z} = a - bi$

Theo giả thiết:

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{13} \\ |z + 2 - i| = \sqrt{2}|\bar{z} + 1 - i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{13} \\ |(a+2) + (b-1)i| = \sqrt{2}|(a+1) - (b+1)i| \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13} \\ \sqrt{(a+2)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{2}.\sqrt{(a+2)^2 + (b+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

Vậy $z = -3 - 2i$ hoặc $z = 3 - 2i$

Đáp án đúng là **C.**

Câu 31: Ta có:

$$(1-2i)z-\frac{9+7i}{3-i}=5-2i\Leftrightarrow(1-2i)z=7+i\Leftrightarrow z=\frac{7+i}{1-2i}=1+3i\Rightarrow R_e(z)=1$$

Vậy đáp án đúng là **C.**

Câu 32: Đặt $z=a+bi;a,b\in R$. Ta có: $z=(1+i)(3-2i)-\frac{5i\bar{z}}{(2+i)}$

$$\Leftrightarrow a+bi=5+i-i(2-i)(a-bi)\Leftrightarrow a+bi=5+i-(1+2i)(a-bi)$$
$$\Leftrightarrow a+bi=5+i-a-2b+(b-2a)i=0\Leftrightarrow 5-2a-2b+(1-2a)i=0$$

$$\begin{cases}5-2a-2b=0\\1-2a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=2\end{cases}$$

Vậy $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

Vậy đáp án đúng là **A.**

<u>Sai lầm thường gặp:</u> Không đọc kĩ đề tưởng là tìm z và thu được đáp án C.

Câu 33:

<u>Phân tích:</u>

Giả sử $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$. Từ giả thiết suy ra:

$$\left|\frac{z+2-i}{z+1-i}\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|x+2+(y-1)i|=\sqrt{2}\,|x+1-(y+1)i|$$
$$\Leftrightarrow(x+2)^2+(y-1)^2=2(x+1)^2+(y+1)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+(y+3)^2=10$$

Tập hợp biểu diễn của z là đường tròn tâm $I(0;-3)$, bán kính $R=\sqrt{10}$

Gọi M là điểm biểu diễn của z. Ta có: $|IM-IO|\le OM\le IM+OI\Leftrightarrow\sqrt{10}-3\le OM\le\sqrt{10}+3$

$$|z|_{min}\Leftrightarrow OM_{min}=\sqrt{10}-3$$
$$|z|_{max}\Leftrightarrow OM_{max}=\sqrt{10}+3$$
$$\Rightarrow\frac{|z|_{min}+|z|_{max}}{2}=\frac{(\sqrt{10}-3)\sqrt{10}+3)}{2}=\sqrt{10}$$

Vậy đáp án đúng là **D.**

Sai lầm thường gặp: Không hiểu thế nào là trung bình cộng và nhầm tưởng sang tổng của hai số có thể gây ra đáp án C.

Câu 34: Đặt $z = x + yi(x, y \in \mathbb{R})$. Ta có: $2|z-1| = |z - \bar{z} + 2|$

$$\Leftrightarrow 2|x + yi - 1| = |x + yi - x + yi + 2| \Leftrightarrow 2|x - 1 + yi| = |2 + 2yi|$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{4 + 4y^2} \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là 2 đường thẳng $x = 0; x = 2$

Đáp án đúng là **A.**

Câu 35: Ta có: $z = x + yi; (x, y \in \mathbb{R})$

$$z^3 + 12i = \bar{z} \Leftrightarrow (x + yi)^3 + 12i = x - yi$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3 + 12)i = x - yi \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2y = x(1) \\ 3x^2y - y^3 + 12 = -y(2) \end{cases}$$

Do $x > 0 \Rightarrow x^2 = 3y^2 + 1$. Thế vào (2) ta được

$$3(3y^2 + 1)y - y^3 + 12 = -y \Leftrightarrow 2y^3 + y + 3 = 0(3)$$

Giải (3) ta được: $y = -1 \Rightarrow x^2 = 4$. Do $x > 0$ nên $x = 2$

Vậy $z = 2 - i \Rightarrow \mathrm{Im}(z) = -1$

Đáp án đúng là **C**.

Câu 36: Đáp án đúng là **C.** Giải thích:

Do tam giác ABD đều nên với H là trung điểm của AB, K là trung điểm của HB ta có:

$$DH \perp AB; DH = a\sqrt{3}; OK \parallel DH; OK = \frac{1}{2}DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

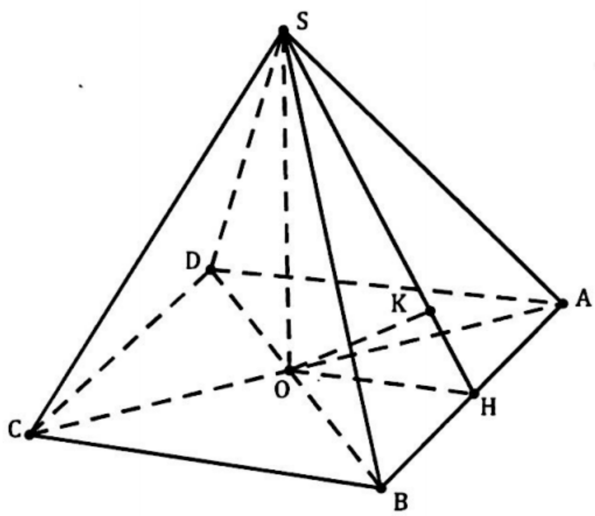
$$\Rightarrow OK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOK)$$

Gọi I là hình chiếu của O lên SK ta có:

$OI \perp SK; AB \perp OI \Rightarrow OI \perp (SAB)$, hay OI là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB).

Tam giác SOK vuông tại O, OI là đường cao

$$\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$$

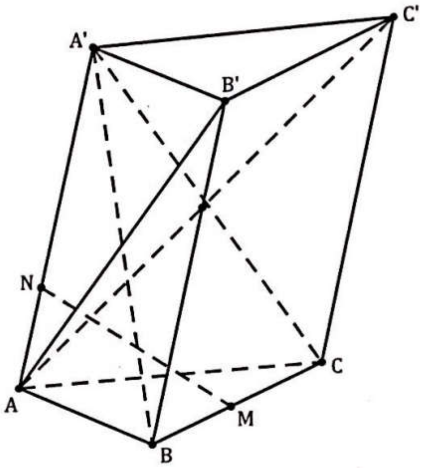


Diện tích đáy $S_{ABCD} = 4S_{ABO} = 2.OA.OB = 2\sqrt{3}a^2$

Đường cao của hình chóp $ASO = \dfrac{a}{2}$

Thể tích khối chóp S.ABCD: $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.2a^2\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 37: Đáp án đúng là **B.** Giải thích:



Gọi O là tâm của đáy ABC và M là trung điểm cạnh BC. Hạ $MN \perp A'A$. Do $BC \perp (A'AM)$ nên MN là đoạn vuông góc chung của A'A và BC $\Rightarrow MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Ta có:

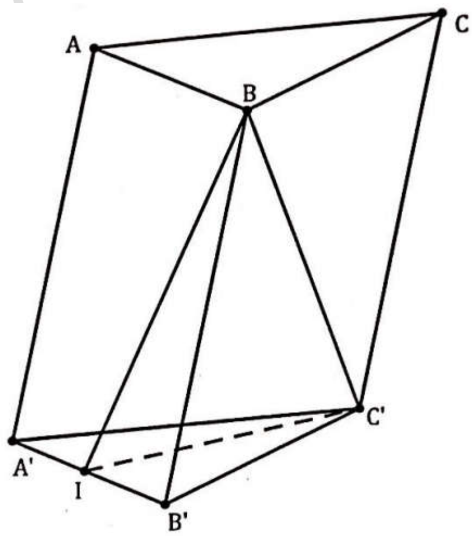
$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AO = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$
$$AN = \sqrt{AM^2 - MN^2} = \frac{3a}{4}$$

Hai tam giác A'OA và MNA đồng dạng nên

$$\frac{A'O}{MN} = \frac{AO}{AN} \Rightarrow A'O = \frac{MN.AO}{AN} = \frac{a}{3}$$

$$V_{A'.BB'.C'C} = V_{A'B'C'.ABC} - V_{A'.ABC} = A'O.S_{ABC} = \frac{2}{3}A'O.S_{ABC} = \frac{2}{3}.\frac{a}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$$

Câu 38: Đáp án đúng là **C.** Giải thích:



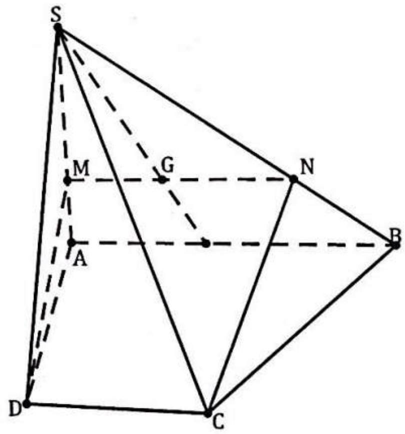
Gọi I là trung điểm A'B' thì: $\left.\begin{matrix} C'I \perp A'B' \\ C'I \perp AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow C'I \perp (ABA'B')$

Suy ra góc giữa BC' và mp (ABB'A') chính là góc C'BI. Suy ra $C'BI = 60^o$

$$C'I = BI.\tan C'BI = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{A'B'C'} = AA'.\frac{1}{2}.CI.A'B' = \frac{a^3\sqrt{15}}{4}$$

Câu 39: Đáp án đúng là **A.** Giải thích:



Đặt $V = V_{S.ABCD}$, ta có:

$$V_{S.CDA} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD}; V_{S.ABC} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD}$$

Mặt phẳng (P) đi qua CD và trọng tâm G của tam giác SAB cắt các cạnh SA, SB lần lượt tại M, N. Khi đó $MN \parallel AB$ và

$$\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}$$

Ta có:

$$\frac{V_{S.CDM}}{V_{S.CDA}} = \frac{SC}{SC}.\frac{SD}{SD}.\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.CDM} = \frac{2}{3}V_{S.CDA} = \frac{2}{9}V$$

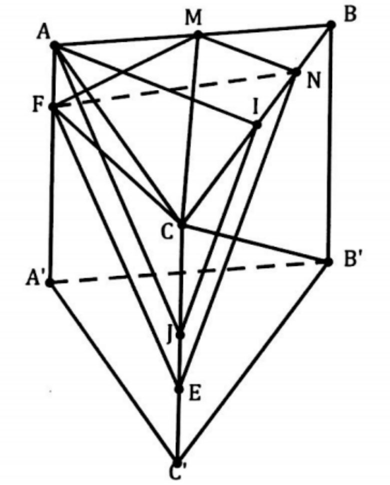
$$\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SC}{SC} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow V_{S.MNC} = \frac{4}{9}V_{S.ABC} = \frac{8}{27}V$$

Bởi vậy:

$$V_{S.CDMN} = V_{S.CDM} + V_{S.MNC} = \frac{2}{9}V + \frac{8}{27}V = \frac{14}{27}V$$

Câu 40: Đáp án đúng là **B.** Giải thích



Xác định N, E, D. Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC, CC'. Khi đó mp $(AIJ) \perp B'C$. Suy ra mp (P) qua M và song song mặt phẳng mp(AIJ). Do đó $MN \parallel AI, NE \parallel IJ; EF \parallel AJ$

Tính thể tích khối chóp C.MNEF. Thấy ngay ENC là góc giữa mặt phẳng (P) và mp(ABC). Tứ giác MNCA là hình chiếu vuông góc của tứ giác MNEF trên mp(ABC).

Suy ra $dt(MNEF) = \dfrac{dt(MNCA)}{\cos ENC}$

Ta có $ENC = \dfrac{\pi}{4}; dt(ABC) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Suy ra:

$$dt(MNEF) = \frac{dt(ABC) - dt(BMN)}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{32}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{7\sqrt{6}a^2}{32}$$

Mặt khác $d(C, mp(MNFEF)) = \dfrac{3}{4}.\dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}a}{8}$

Gọi V là thể tích khối chóp C.MNEF, ta có:

$$V = \frac{1}{3}.\frac{7\sqrt{6}a^2}{32}.\frac{3\sqrt{2}a}{8} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{128}$$

Câu 41: Đáp án đúng là **D.** Lưu ý đề bài cho là đường kính R nên công thức thể tích phải là:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi R^3$$

Câu 42: Gọi ba cạnh hình hộp chữ nhật là a;b;c. Khi đó: $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ và $V = abc$. Do đó, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có ngay: $V = abc = \sqrt{a^2.b^2.c^2} \le \sqrt{\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3} = 3\sqrt{3}$

Vậy thể tích lớn nhất bằng $3\sqrt{3}$ khi hình hộp là hình lập phương.

Đáp án đúng là **A.**

Câu 43: Đáp án đúng là **C.**

Câu 44: Đáp án đúng là **D.**

Câu 45: Đáp án đúng là **A.** Giải thích:

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{2} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow x - y + 2z = 0$

Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với mp(ABC) thì $I(1;-1;0)$ và đường thẳng Δ đi qua I. mp(ABC) có vtpt $\vec{n} = (1;-1;2)$, d có vtcp $\vec{u} = (1;1;-1)$. Gọi $\overrightarrow{u_1}$ là vtcp của Δ . Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{u_1} \perp \vec{n} \\ \overrightarrow{u_1} \perp \vec{u}' \end{cases}$

Chọn $\overrightarrow{u_1} = \left[\vec{n}; \vec{u}\right] = (-1;3;2)$. Vậy phương trình đường thẳng: $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$

Câu 46: Đáp án đúng là **D.** Giải thích:

Gọi $M(a;b;c)$, khi đó: $M \in (Q) \Leftrightarrow a + b + c = 0$ (1)

Tam giác ABM cân tại M khi và chỉ khi: $AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow (a-4)^2 + (b+3)^2 + (c-1)^2$

$= (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \Leftrightarrow -a + 2b + 5 = 0(2)$

Từ (1) và (2) ta có:

Trung điểm AB là $I(3;-1;1)$

Tam giác ABM cân tại M, suy ra: $MI = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow (a-3)^2 + (b+1)^2 + (c-1)^2 = 5(3)$

Thay (*) vào (3) ta được:

$(2b+2)^2 + (b+1)^2 + (-6-3b)^2 = 5 \Leftrightarrow 7b^2 + 23b + 18 = 0 \Leftrightarrow b = -2; b = -\frac{9}{7}$

Với $b = -2 \Rightarrow a = 1; c = 1 \Rightarrow M(1;-2;1)$

Với $b = -\frac{9}{7} \Rightarrow a = \frac{17}{7}; c = -\frac{8}{7} \Rightarrow M\left(\frac{17}{7}; -\frac{9}{7}; -\frac{8}{7}\right)$

Vậy điểm M cần tìm là $M(1;-2;1)$ và $M\left(\frac{17}{7}; -\frac{9}{7}; -\frac{8}{7}\right)$

Câu 47: Đáp án đúng là **B.** Giải thích:

Vì điểm C trên trục Ox nên $C(t;0;0)$

Ta có: $\overrightarrow{CA} = (1-t;2;-1), \overrightarrow{CB} = (-2-t;1;3)$

Tam giác ABC vuông tại C điều kiện là: $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (1-t)(-2-t) + 2.1 + (-1).3 + 0$

$\Leftrightarrow t^2+t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1-\sqrt{3} \\ t=-1+\sqrt{3} \end{array}\right.$

Như vậy $C(-1-\sqrt{3};0;0)$ hoặc $C(-1+\sqrt{3};0;0)$

Câu 48: Đáp án đúng là **D.** Giải thích:

Giả sử Δ có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}=(a;b;c), a^2+b^2+c^2>0$

$\Delta \perp d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{u_1}=0 \Leftrightarrow a-b+c=0 \qquad (1)$

$(\Delta, d_2)=60^o \Leftrightarrow \cos 60^o = \dfrac{|a-b-2c|}{\sqrt{1+1+4}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Leftrightarrow 2(a-b-2c)^2=3(a^2+b^2+c^2)(2)$

Từ (1) $\Rightarrow b=a+c$ thay vào (2) ta được: $18c^2=3\left[a^2+(a+c)^2+c^2\right] \Leftrightarrow a^2+ac-2c^2=0$

$\Leftrightarrow (a-c)(a+2c)=0 \Rightarrow a=c \vee a=-2c$

- $a=c \Rightarrow b=2c$ chọn $c=1 \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}=(1;2;1)$

  Ta có: $\Delta: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{1}$

  $a=-2c \Rightarrow b=-c$ chọn $c=-1 \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}=(2;1;-1)$

  Ta có: $\Delta: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$

Câu 49: Đáp án đúng là **A.** Giải thích:

Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với hai mặt phẳng $5x-4y+3z+20=0$ và $3x-4y+z-8=0$. Hai mp này lần lượt có các vtpt là $\vec{u}, \vec{v}$ thì $\left[\vec{u};\vec{v}\right]$ là một vtpt của (P).

$\vec{u}=(5;-4;3); \vec{v}=(3;-4;1) \Rightarrow \left[\vec{u};\vec{v}\right]=(8;4;-8)$

Suy ra phương trình của (p): $8(x-2)+4(y-3)-8(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+y-2z-9=0$

Câu 50: Đáp án đúng là **B.** Giải thích:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$, bán kính $R=\sqrt{14}$

Vì $(Q) \parallel (P)$ nên (Q) có phương trình dạng: $(Q): 2x+3y+z+d=0, d \neq -11$

Theo giả thiết (Q) cắt (S) theo một đường tròn có bán kính $r=\dfrac{R}{2}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ nên ta có:

$$d(I;(Q)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{\frac{21}{2}} \Leftrightarrow \frac{|d-3|}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{21}{2}} \Leftrightarrow d = 3 \pm 7\sqrt{3}$$

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là:

$(Q_1): 2x + 3y + z + 3 + 7\sqrt{3} = 0$

$(Q_2): 2x + 3y + z + 3 - 7\sqrt{3} = 0$