Đáp án

1-D	6-A	11-A	16-A	21-B	26-A	31-D	36-B	41-B	46-B
2-A	7-D	12-A	17-A	22-A	27-C	32-A	37-D	42-D	47-D
3-B	8-B	13-D	18-D	23-A	28-A	33-A	38-C	43-D	48-C
4-D	9-D	14-C	19-A	24-B	29-D	34-A	39-A	44-B	49-A
5-A	10-C	15-B	20-C	25-C	30-D	35-A	40-C	45-D	50-A

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Đáp án **D**

Câu 2: Đáp án **A**

Những bài toán dạng này chúng ta nên kẻ bảng biến thiên để tránh nhầm lẫn.

Ta có: $y'=4x^3-4x^2$ suy ra $y'=0 \Leftrightarrow x=0;\pm 1$

BBT:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		–	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên chúng ta có thể thấy đáp án A là chính xác.

Câu 3: Đáp án **B**

Chú ý điều kiện xác định của hàm số đã cho là $D=(0;+\infty)$

$$y'=3x^2-2-\frac{1}{x}=\frac{3x^2-2x-1}{x}=\frac{(x-1)(3x^2+3x+1)}{x}$$

$$y'=0 \Rightarrow x=1$$

Kẻ bảng biến thiên ta thu được kết quả hàm số nghịch biến trên (0;1)

<u>**Nhận xét:**</u> *Một số thí sinh khi đi thi không để ý đến điều kiện xác định của hàm số đã cho.*

Câu 4: Đáp án **D**

A, B, C đều sai vì từ đề bài cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K ta có thể suy ra các điều sau:

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \forall x \in K \\ x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{cases}$$

Câu 5: Đáp án **A**

Lưu ý bài toán bắt tìm tổng GTLN và GTNN chứ không phải tổng giá trị cực tiểu và giá trị cực đại, cần chú ý điều này để tránh sai sót không đáng có.

Giải: Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$

Phương trình: $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \in [-4;4] \\ x = -1 \in [-4;4] \end{array}\right.$

Tính các giá trị

$y_{(-4)} = -41; y_{(-1)} = 40; y_{(3)} = 8; y_{(4)} = 15$. So sánh các giá trị ta cần suy ra GLTN là 40 và GTNN là -41

Tổng cần tìm là -1

Câu 6: Đáp án **A**

Nhìn vào đồ thị ta có thể thấy tập giá trị của x là $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Suy ra đây chính là điều kiện xác định của hàm số, do đó b phải bằng -2.

Lại có đường tiệm cận ngang của đồ thị là y=1 nên

$$\lim_{x\to\infty} y = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\text{ax+2}}{x-2} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{a+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

Câu 7: Đáp án **D**

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \left(\frac{1}{3} - m\right)x^2 - \left(\frac{1}{3} - m\right)x - \left(m + \frac{2}{3}\right)x + m + \frac{2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{3}x^2 + \left(\frac{1}{3} - m\right)x - m - \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \frac{1}{3}x^2 + \left(\frac{1}{3} - m\right)x - m - \frac{2}{3} = 0 (*) \end{array}\right.$$

Để m thỏa mãn điều kiện đề bài thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 đều khác 1 và $x_1^2 + x_2^2 < 6$

Áp dụng Vi-et ta có $x_1+x_2=\frac{m}{3}-1; x_1x_2=-\frac{m}{3}-2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}+\frac{1}{3}-m-m-\frac{2}{3}\neq 0 \\ \Delta=\left(\frac{1}{3}-m\right)^2+4\frac{1}{3}.\left(m+\frac{2}{3}\right)>0 \\ \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m^2+\frac{2}{3}m+1>0 \\ \left(\frac{m}{3}-1\right)^2+2\left(\frac{m}{3}+2\right)<6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m^2<9 \end{cases} \Leftrightarrow m\in[-3;3]\setminus\{0\}$$

Vậy các giá trị nguyên của m là -3; -2; -1; 1; 2; 3. Có tất cả 6 giá trị

<u>Sai lầm thường gặp:</u> *Không chú ý đến điều kiện phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt nhưng phải khác 1.*

Câu 8: Đáp án **B**

Viết lại $y=\sin x(1+\cos x)=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}$

Có: $y'=\cos x+\cos 2x=2\cos^2 x+\cos x-1$

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=\frac{1}{2} \\ \cos x=-1 \end{array}\right.$. Trên đoạn $[0;\pi]$ thì phương trình $y'=0$ có nghiệm là $x=\frac{\pi}{3}; x=\pi$

Tính các giá trị $y_{(0)}; y_{\left(\frac{\pi}{3}\right)}; y_{(\pi)}$ ta được giá trị lớn nhất của hàm số là $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ khi $x=\frac{\pi}{3}$

Câu 9: Đáp án **D**

Ta có thể viết lại $f(x)$ dưới dạng

$$f(x)=\frac{x^2+x-2x-2+4}{x+1}=x-2+\frac{4}{x+1}$$

Nhận thấy tọa độ điểm là cặp số nguyên thì x nguyên và x+1 là ước của 4.

Suy ra số điểm chính là số nghiệm của 4. Vậy có 6 điểm thuộc đồ thị $f(x)$ có tọa độ là cặp số nguyên.

Câu 10: Đáp án **C**

Điều kiện để x là điểm cực đại của hàm số $y=\cos x$ là:

$$\begin{cases} y'_{(x)}=0 \\ y''_{(x)}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s\text{inx}=0 \\ \cos x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2k\pi(k\in Z)$$

Câu 11: Đáp án **A**

Đây là một bài toán tuy không quá khó nhưng đòi hỏi khả năng biến đổi chính xác.

Tập xác định $D=[-2;5]$

$$f'(x)=-\frac{x-2}{\sqrt{-x^2+4x+21}}+\frac{2x-3}{2\sqrt{-x^2+3x+10}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x-3}{2\sqrt{-x^2+3x+10}}=\frac{x-2}{\sqrt{-x^2+4x+21}}(*)$$

Đến đây chúng ta có thể sử dụng chức năng $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{SOLVE}}$ của máy tính để tìm nghiệm. Dưới đây chúng tôi sẽ trình bày cả hướng sử dụng và cả giải đầy đủ.

SD Máy tính: Nhập màn hình biểu thức $\frac{2x-3}{2\sqrt{-x^2+3x+10}}=\frac{x-2}{\sqrt{-x^2+4x+21}}$. Bấm $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{SOLVE}}$

sau đó ấn một số bất kì và ấn =. Màn hình cho kết quả $x=0,3333333333$ tức $x=\frac{1}{3}$.

Thử với các giá trị khác nhau trên $D=[-2;5]$ ta đều thu được kết quả $x=0,3333333333$

Thử lại ta thấy $f'\left(\frac{1}{3}\right)=0$

So sánh các giá trị $f(-2);f(5)$ và $f\left(\frac{1}{3}\right)$ ta thấy min $f(x)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt{2}$

Tuy nhiên cách làm này còn nhiều hạn chế vì chúng ta chưa thể chắc chắn tìm được hết nghiệm của phương trình $f'(x)=0$

Biến đổi thông thường:

$$(*)\Rightarrow\frac{x^2-4x+4}{-x^2+4x+21}=\frac{4x^2-12x+9}{4(-x^2+3x+10)}$$

$$\Rightarrow4(x^2-4x+4)(-x^2+3x+10)=(4x^2-12x+9)\left(-x^2+4x+21\right)$$

$$\Leftrightarrow51x^2-104x+29=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}\\x=\frac{29}{17}\end{array}\right.$$

Thử lại chỉ có $x=\frac{1}{3}$ là nghiệm.

So sánh các giá trị $f(-2); f(5)$ và $f\left(\frac{1}{3}\right)$ ta thấy min $f(x)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt{2}$

Câu 12: Đáp án **A**

Điều kiện $-x^2+5x-6>0 \Rightarrow 2<x<3$

Câu 13: Đáp án **D**

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên R.

Áp dụng công thức $(uv)'=u'v+uv'$ suy ra $y'=e^{-x}-x.e^{-x}=e^{-x}(1-x); y'=0 \Leftrightarrow x=1$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} =-\infty$ suy ra hàm số không tồn tại GTNN

$\lim\limits_{x\to+\infty} =0; y_{(1)}=\frac{1}{e}$ suy ra $\max\limits_{x\in(0;+\infty)} y=\frac{1}{e}$

Câu 14: Đáp án **C**

Đối với những câu dễ như thế này, thí sinh cần tránh sai sót không đáng có, ở bài toán này một vài thí sinh quên không để ý đến điều kiện xác định dẫn đến chọn đáp án A.

Điều kiện x>2

$\Leftrightarrow x-2<2^2=4 \Leftrightarrow \log_2(x-2)<2 \Leftrightarrow x<6$

Vậy $2<x<6$

Câu 15: Đáp án **B**

TXD: D=R

Phương trình

$9^x+2.3^x-3=0 \Leftrightarrow (3^x)^2-3^x+3.3^x-3=0$

$\Leftrightarrow (3^x-1)(3^x+3)=0$

$\left[\begin{array}{l} 3^x=1 \\ 3^x=-3(VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0$

Vậy phương trình có duy nhất 1 nghiệm.

Câu 16: Đáp án **A**

Từ điều kiện ta suy ra

$a^2+b^2+2ab=9ab \Leftrightarrow (a+b)^2=9ab$

$$\left(\frac{a+b}{3}\right)^2=ab \Leftrightarrow \log_7\left(\frac{a+b}{3}\right)^2=\log_7 ab \Leftrightarrow 2\log_7\left(\frac{a+b}{3}\right)=\log_7 a+\log_7 b$$

Câu 17: Đáp án **A**

Áp dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ ta có

$$y'=\frac{\left(\ln^2 x\right)'.x-x'.\ln^2 x}{x^2} \Leftrightarrow y'=\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}$$

Câu 18: Đáp án **D**

Vì $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ nhưng theo biến đổi ý D thì $1+2+3+...+n=n(n+1)$

Câu 19: Đáp án **A**

Ta sử dụng phương pháp biến đổi tương đương:

$$4.3^x+3.2^x=12+6^x \Leftrightarrow 4.(3^x-3)+2^x(3-3^x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x-4\right)\left(3^x-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=4\\3^x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\end{array}\right.$$

Câu 20: Đáp án **C**

Tập xác định $D=\left(0;+\infty\right)$

Đặt $\log_2 x=t \Leftrightarrow x=2^t$ suy ra $2^{t^2}+\left(2^t\right)^t\le 8$

$$\Leftrightarrow 2^{t^2}+2^{t^2}\le 8 \Leftrightarrow 2^{t^2}\le 2^2=4 \Leftrightarrow t^2\le 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2}\le\log_2 x\le\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2^{-\sqrt{2}}\le x\le 2^{\sqrt{2}}$$

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm là $\left[2^{-\sqrt{2}};2^{\sqrt{2}}\right]$

Đáp án A sai vì có 2 giá trị tự nhiên của x là 1 và 2

Đáp án B sai vì $2^{-\sqrt{2}}<\frac{2}{5}$

Đáp án C đúng vì các giá trị x bán nguyên là 0,5; 1,5 và 2,5

Đáp án D sai vì $2^{-\sqrt{2}}$ là một số vô tỉ

Câu 21: Đáp án **B**

Gọi n là số tháng anh cần trả với n tự nhiên

Sau tháng thứ nhất anh còn nợ

$S_1 = 10^9.(1+\frac{0,5}{100}) - 30.10^6 = 10^9.1,005 - 30.10^6$ đồng

Sau tháng thứ hai anh còn nợ

$S_2 = S_1.1,005 - 12.10^6 = \left(10^9.1,005 - 30.10^6\right).1,005 - 30.10^6$

$= 10^9.1,005^2 - 30.10^6.\frac{1,005^2 - 1}{0,005}$ đồng

Tiếp tục quá trình trên thì số tiền anh Sơn còn nợ sau n tháng sẽ là

$S_n = 10^9.1,005^n - 30.10^6.\frac{1,005^n - 1}{0,005} = 0$

$\Rightarrow 1,005^n = 1,2 \Rightarrow n = \log_{1,005} 1,2 \approx 36,555$

Do đó sau 37 tháng sẽ trả hết nợ tức 3 năm 1 tháng

Câu 22: Đáp án **A**

Chúng ta có thể thử bằng cách tính đạo hàm các đáp án và $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ tại cùng một giá trị để chọn đáp án đúng.

Đối với cách làm trực tiếp, đây là một dạng khá cổ điển của bài tập nguyên hàm.

Đặt $\sqrt{1+x^2} = t > 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = t^2 \Leftrightarrow xdx = tdt$

Nguyên hàm cần tính có thể viết lại bằng:

$$\int x\sqrt{x^2+1}dx = \int t.tdt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}{3}$$

Câu 23: Đáp án **A**

Tương tự như bài toán trên, bài toán này cũng có cách thử tương tự, tuy nhiên đôi khi việc thử lại tốn thời gian hơn việc làm trực tiếp.

Sau đây là cách làm trực tiếp:

Đặt $e^x + e^{-x} = t \Rightarrow \left(e^x - e^{-x}\right)dx = dt$

Nguyên hàm cần tính:

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|e^x + e^{-x}\right| + C$$

Câu 24: Đáp án **B**

Xét phương trình $\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Như vậy, thể tích cần tìm sẽ được tính theo công thức: $V=\pi\int_{-1}^{1}\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx$

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left|\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2-\frac{x^4}{4}\right|dx=\pi\left|\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx-\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{4}dx\right|$$

$$\pi\left|\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx-\left.\frac{x^5}{20}\right|_{-1}^{1}\right|=\pi\left|\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx-\frac{1}{10}\right|$$

$V=\pi\left|I-\frac{1}{10}\right|$ với $I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

Tính I: Đặt $x=\tan t, t\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$$dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt=(1+\tan^2 t)dt$$

Ta có thể viết I lại dưới dạng

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 t}{\left(1+\tan^2 t\right)^2}dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t dt=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}V=\pi\left|\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right|=\frac{\pi^2}{4}+\frac{2\pi}{5}$$

__Nhận xét:__ *Đây là một bài toán khá khó, đòi hỏi thí sinh phải biết đúng công thức và việc xử lí tích phân khéo léo.*

Câu 25: Đáp án **C**

Đây là một bài toán khá đơn giản nhưng có thể gây khó khăn với một vài thí sinh không nhớ đúng công thức.

Ở đây ta áp dụng công thức: $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$

Câu 26: Đáp án **A**

Câu 27: Đáp án **C**

Trước tiên ta phải tìm giao điểm của hai đồ thị $y=x^3-3x$ và $y=x$

Phương trình hoành độ giao điểm là

$$x^3-3x=x\Leftrightarrow x(x^2-4)=0\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\x=2\end{array}\right.$$

Do đó $S=\int\limits_{-2}^{0}\left|x^3-4x\right|dx+\int\limits_{0}^{2}\left|x^3-4x\right|dx=\int\limits_{-2}^{0}\left(x^3-4x\right)dx+\int\limits_{0}^{2}\left(4x-x^3\right)dx=8$

Câu 28: Đáp án **A**

Ở bài toán này máy tính dường như không giúp được nhiều trong việc giải quyết bài toán, đây là bài toán sử dụng phương pháp tích phân thành phần ở mức độ vận dunjng.

Đặt

$$\begin{cases}u=3+\ln x\\ v=\dfrac{dx}{(x+1)^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{dx}{x}\\ v=\dfrac{-1}{x+1}+1=\dfrac{x}{x+1}\end{cases}$$

Áp dụng công thức tính tích phân thành phần $\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu$ thì ta được

$$I=\frac{(3+\ln x)x}{x+1}\Bigg|_1^3-\int\limits_1^3\frac{dx}{x+1}=\frac{(3+\ln x)x}{x+1}\Bigg|_1^3-\ln(x+1)\Big|_1^3$$

$$I=\left(\frac{3\left(3+\ln 3\right)}{4}-\frac{3}{2}\right)-\left(\ln 4-\ln 2\right)$$

$$=\frac{3}{4}(\ln 3+1)-\ln 2=\frac{3}{4}(\ln 3+1)+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Vậy $a=\dfrac{3}{4};b=\dfrac{1}{2}\Rightarrow T=4a+2b=3+1=4$

<u>Nhận xét:</u> *Điểm mấu chốt để xử lí nhanh bài toán nằm ở việc đặt* $v=\dfrac{-1}{x+1}+1=\dfrac{x}{x+1}$. *Một số thí sinh chọn đáp án B vì khi làm đến* $I=\dfrac{3}{4}(\ln 3+1)-\ln 2$ *không để ý dấu nên suy ra luôn* $a=\dfrac{3}{4};b=2$ *dẫn đến kết quả sai.*

Câu 29: Đáp án **D**

Sử dụng máy tính ở chế độ CMPLX. Nhập màn hình biểu thức $\left(\sqrt{2}+3i\right)^2$ và ấn "=" ta được kết quả

$z=-7+6\sqrt{2}i$

Câu 30: Đáp án **D**

Nhiều thí sinh tỏ ra lung túng trước biểu thức $(1+i)^6$, nếu như đây là bài tự luận thì các bước khai triển biểu thức này khá dài và phức tạp, tuy nhiên chúng ta có thể sử dụng máy tính để có kết quả chính xác.

Một lưu ý là máy tính không thể tính được lũy thừa bậc 4 trở lên của một số phức. Do đó ta phải tính gián tiếp qua 2 bước. Vì $(1+i)^6 = \left[(1+i)^3\right]^2$ nên ta sẽ tính $(1+i)^3$ trước rồi tính bình phương của giá trị vừa tìm được.

Sử dụng máy tính Casio ta tính được $(1+i)^3 = -2+2i \Rightarrow (1+i)^6 = (-2+2i)^2 = -8i$

Vậy $z = 5+2i-(1+i)^6 = 5+2i-(-8i) = 5+10i$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{5^2+10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

Nhận xét: *Một số sai lầm trong quá trình biến đổi có thể dẫn đến đáp án sai là B hoặc C. Nếu như sử dụng phương pháp khai triển trực tiếp ra nháp thì bài toán này tốn khá nhiều thời gian khi đi thi, thí sinh có thể sẽ bị không đủ thời gian làm những câu khác.*

Câu 31: Đáp án **D**

Với $z = a+bi(a,b \in R)$ thì theo đề bài ta sẽ có:

$|a-1+bi| = |a-2(b+3)i|$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = (a-2)^2 + (b+3)^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 + b^2 = a^2 - 4a + 4 + b^2 + 4b + 9$

$\Leftrightarrow -2a + 6b + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x - 3y - 6 = 0$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $x-3y-6=0$

Câu 32: Đáp án **A**

Các nhận định đúng là 1;3

Đáp án A đúng vì cả số phức và số phức liên hợp đều có mô đun là $\sqrt{a^2+b^2}$

Đáp án B sai vì mô đun của số phức $|z| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ còn $2+3i$ là số phức liên hợp của z

Đáp án C đúng vì $z = bi; \overline{z} = -bi; bi = -(-bi) \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

Đáp án D sai. Với $z = a+bi(a,b \in R)$ thì ta có

$z + \overline{z} + 1 = a + bi + a - bi + 1 = 2a + 1$

$$\Rightarrow |z+\bar{z}+1| = |2a+1| = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{2} \\ a = \dfrac{-3}{2} \end{array}\right.$$

Như vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là hai đường thẳng song song chứ không phải một đường tròn.

Câu 33: Đáp án **A**

Từ dữ kiện đề bài ta suy ra $A(1;1); B(2;4); C(6;5) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1;3)$

Đặt số phức z biểu diễn điểm D là $z = a + bi(a,b \in R)$ thì $D(a,b)\overrightarrow{CD} = (a-6;b-5)$

Tứ giác ABDC là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-6=1 \\ b-5=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=8 \end{cases} \Leftrightarrow z = 7+8i$$

<u>Sai lầm thường gặp:</u> *Nhầm chiều vecto:* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ dẫn đến lực chọn đáp án C.

Câu 34: Đáp án **A**

Đây là một bài toán số phức ở mức độ vận dụng cao khá hay và khó. Để giải quyết cần sự tinh ý và cẩn thận trong từng bước giải.

Từ phương trình $\left(\dfrac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1$, ta suy ra

$$(2z-i)^4 - (z-i)^4 = 0$$

Đặt $f(z) = (2z-i)^4 - (z-i)^4$

$$= 15(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$$

Vì $i_2 = -1 \Rightarrow z^2 + 1 = z^2 - i^2 = (z-i)(z+i)$

$$\Rightarrow T = \left[(z_1-i)(z_2-i)(z_3-i)(z_4-i)\right]$$

$$\left[(z_1+i)(z_2+i)(z_3+i)(z_4+i)\right]$$

$$\Leftrightarrow T = \left[(i-z_1)(i-z_2)(i-z_3)(i-z_4)\right]$$

$$\left[(-i-z_1)(-i-z_2)(-i-z_3)(-i-z_4)\right]$$

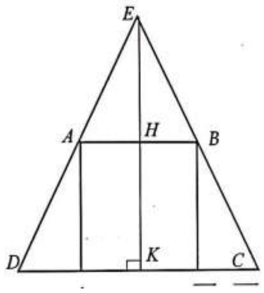
$$\Leftrightarrow T = \frac{f(i)}{15}.\frac{f(-i)}{15} = \frac{f(i).f(-i)}{225}$$

Tính các giá trị $f(i); f(-i)$

$$\left.\begin{array}{l} f(i)=(2i-i)^4-(i-1)^4=i^4-(i-1)^4=5 \\ f(-i)=(-2i-i)^4-(-i-1)^4=85 \end{array}\right\} \Rightarrow T=\frac{5.85}{225}=\frac{17}{9}$$

<u>Nhận xét:</u> Đối với bài toán này, có lẽ Casio hay Vinacal cũng "bó tay". Một số bạn thì có hướng làm đúng nhưng lại chọn đáp án C vì ngay từ đầu khi đặt F(z) đã không có hệ số 15 ở đâu.

Câu 35: Đáp án **A**



Gọi AD và BC cắt nhau tại E. $2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ nên AB là đường trung bình Δ EDC$\Rightarrow ED=2AD=6a$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm AB và CD thì ta có EK vuông góc với CD và HK là trục đối xứng của ABCD.

$$EK=\sqrt{ED^2-DK^2}=4a\sqrt{2}\ ;EH=\frac{EK}{2}=2a\sqrt{2}$$

Khối nón xoay sinh bởi hình thang ABCD khi quay quanh trục của nó chính là phần thể tích nằm giữa 2 khối nón:

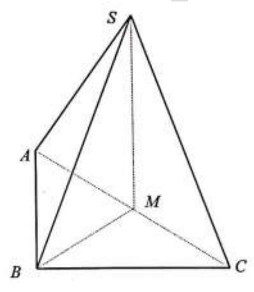
+Khối nón 1: Có đáy là hình tròn tâm K, bán kính KD=2a, đường cao EK=$4a\sqrt{2}$

+Khối nón 2: Có đáy là hình tròn tâm H, bán kính HA=a, đường cao $EH=2a\sqrt{2}$

Do đó thể tích cần tìm là

$$V=V_1-V_2=\frac{1}{3}.(2a)^2.\pi.4a\sqrt{2}-\frac{1}{3}.a^2.\pi.2a\sqrt{2}=\frac{14a^3\sqrt{2}}{3}$$

Câu 36:



Gọi M là trung điểm AC thì M là trọng tâm, trực tâm tam giác ABC

SA=SB=SC=a nên SM$\perp$ (ABC)

Vì ΔABC vuông cân tại B, $AC=a\sqrt{2}$ nên

BA=BC=a

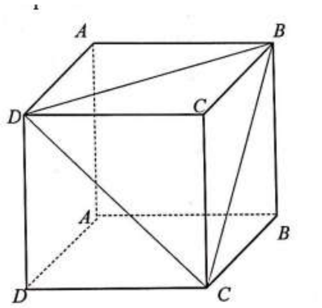
$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{a^2}{2}$$

$$SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Do đó thể tích cần tìm là:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SM = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Câu 37: Đáp án **D**



Nhìn vào hình vẽ ta có thể thấy 2 phần của hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ chia bởi mặt phẳng (BDC’) gồm hình chóp BCC’D và phần còn lại

Tỉ lệ cần tính sẽ là $T = \dfrac{V_{BCC'D}}{V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{BCC'D}}$

Giả sử hình lập phương có cạnh là 1

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 1^3 = 1$$

Hình chóp BCC’D có đáy là tam giác vuông cân DCC’, đỉnh B, đường cao BC

$$\Rightarrow V_{BCC'D} = \frac{1}{3}.BC.S_{DCC'} = \frac{1}{3}.1.1.1.\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$T = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$$

<u>Sai lầm thường gặp:</u>

Tính nhầm giá trị $T = \dfrac{V_{BCC'D}}{V_{ABCDA'B'C'D'}}$ *dẫn đến đáp án B.*

Câu 38: Đáp án **C**

Nhắc lại kiến thức: Hình chóp đa giác đều: là hình chóp có đáy là đa giác đều và hình chiếu của đỉnh xuống đáy trùng với tâm của đáy. Như vậy hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD và hình chiếu của S xuống đáy là tâm hình vuông ABCD.

Câu 39: Đáp án **A**

Gọi đáy của hình hộp có độ dài 2 đường chéo là AC=a; BD=b và đường cao hình hộp là AA'=BB'=c

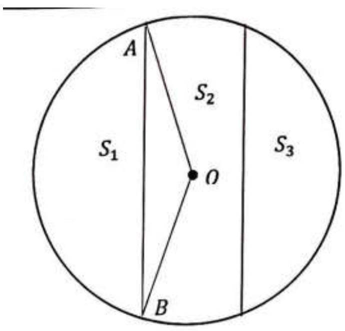
Suy ra được $S_1 = \frac{1}{2}ab$; $S_2 = AC.AA' = ac$; $S_3 = BD.BB' = bc \Rightarrow S_1S_2S_3 = \frac{a^2b^2c^2}{2}$

Thể tích khối hộp là

$$V = S_1.c = \frac{1}{2}abc = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{2}} = \sqrt{\frac{S_1S_2S_3}{2}}$$

__**Nhận xét:**__ Đây là một bài toán không khó nhưng dễ gây nản đối với những thí sinh lười biến đổi.

Câu 40: Đáp án **C**



Thực chất bài toàn là chai hình tròn thành 3 phần bằng nhau như hình vẽ:

Vì các miếng bánh có cũng chiều cao nên diện tích đáy của các miếng bánh phải bằng nhau và bằng $\frac{1}{3}$ diện tích chiếc bánh ban đầu.

Trong hình vẽ thì ta có OA=OB=6 và $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{\pi.OA^2}{3} = 12\pi$

Đặt AOB=α$\in (0,\pi)$ thì ta có:

$$S_1 + S_{\Delta OAB} = S_{OAB}$$

$$\Leftrightarrow 12\pi + \frac{1}{2}OA.OB.\sin\alpha = \frac{OA^2.\pi}{2\pi}.\alpha$$

$$\Leftrightarrow 12\pi + 18\sin\alpha = 18\alpha$$

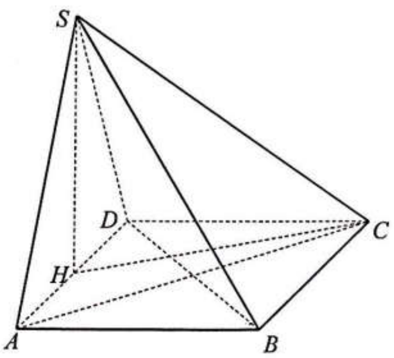
Sử dụng chức năng $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{SOLVE}}$ trên máy tính ta tìm được giá trị

α ≈ 2,605325675

Khoảng cách 2 nhát dao là

$$x = OA.\cos\frac{\alpha}{2}2 \approx 3,179185015$$

Câu 41: Đáp án **B**



Gọi H là chân đường cao hạ từ S của tam giác đều SAD

Suy ra $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và SH $\perp$ (ABCD)

Trong tam giác vuông HSC có $HC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\cos HDC = \frac{DH^2 + DC^2 - CH^2}{2DH.DC} = \frac{\frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{3a^2}{4}}{2.\frac{a}{2}.a} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow HDC = 60^0$$

Suy ra $S_{ABCD} = DA.DC.\sin ADC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}a^3$$

Câu 42: Đáp án **D**

Lưu ý rằng góc giữa hai vectơ nhỏ hơn hoặc bằng 180^0 còn góc giữa hai đường thẳng nhỏ hơn hoặc bằng 90^0. ở đây, góc giữa hai vectơ được tính theo công thức $\cos(\vec{m};\vec{n}) = \frac{\vec{m};\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|} = \frac{-1}{2}$

$$\Rightarrow \left(\vec{m};\vec{n}\right) = 120^0$$

Câu 43: Đáp án **D**

Vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$

Phương trình thàm số của đường thẳng AB là

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=t \quad (t\in R) \\ z=2-t \end{cases}$$

Gọi tâm I(1+t;t;2-t)$\in$ AB ;(t>-1)

(S) tiếp xúc mp (P)

$$\Leftrightarrow d(I;(P))=4 \Leftrightarrow 5t+2=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5t+2=12 \\ 5t+2=-12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2(TM) \\ t=-\dfrac{14}{5}(L) \end{array}\right.$$

Phương trình mặt cầu (S) cần tìm:

$$(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=16$$

__**Nhận xét:**__ Đây là bài toán không khó nhưng lại tốn thời gian trong quá trình làm bài

Câu 44: Đáp án **B**

Ta có $O(0;0;0)$, do mặt cầu (S) có tâm O và tiếp xúc với mp(P) nên ta có:

$R=d_{(O;(P))}=\dfrac{|-6|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=\sqrt{6}$. Vậy đáp án A sai.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (P), H chính là tiếp điểm của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P). Đường thẳng OH đi qua O và vuông góc mp (P) nhận $\vec{n}=(1,1,-2)$ là vectơ pháp tuyến của mp (P) làm vectơ chỉ phương, pt đường thẳng OH có dạng

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-2t \end{cases}$$

H$\in OH \Rightarrow$ H(t,t,-2t)

Ta lại có $H\in mp(P)\Rightarrow t+t-2(-2t)-6=0\Leftrightarrow t=1$

Vậy H(1,1,-2)

Vậy hoành độ của H có giá trị dương, $\overrightarrow{OH}.\vec{a}\neq 0$ và khoảng cách từ h đến (Q) : $2x+y+2z-5=0$ là 2

Câu 45 : Đáp án **D**

Câu 46 : Đáp án **B**

Câu 47 : Đáp án **D**

Từ đề bài ta suy ra $\overrightarrow{u_{\Delta 1}}=(2;-3;4)$; $\overrightarrow{u_{\Delta 2}}=(1;2;-1)$ Vì mặt phẳng cần tìm song song với hai đường đã cho nên tích có hướng của hai vectơ trên chính là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó $\Rightarrow \vec{n}=[\overrightarrow{u_{\Delta 1}};\overrightarrow{u_{\Delta 2}}]$=(-5;6;7)

Câu 48 : Đáp án **C**

Giả sử có mặt phẳng (P) thỏa yêu cầu đề bài thì ta có :

$A\in d_1 \Rightarrow A(1+2t;2-2t;-1+t)$

$B\in d_2 \Rightarrow B(3+2l;-1-2l;l)$

$\overrightarrow{AB}=(2(l-t)+2;-2(l-t)-3;(l-t)+1)$

$$AB^2=9(l-t)^2+22(l-t)+14=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l-t=-1 \\ l-t=-\dfrac{13}{9}\end{array}\right.$$

Nếu l-t=-1 thì

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(0;-1;0) \Rightarrow VTPP\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{i}\right]=(0;0;1)$

Phương trình mặt phẳng (P) : z=0(loại vì (P) chứa Ox)

Nếu l-t=-13/9$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{-8}{9};\dfrac{-1}{9};\dfrac{-4}{9}\right) \Rightarrow VTPP\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{i}\right]=\left(0;-\dfrac{4}{9};\dfrac{1}{9}\right)$

Phương trình mặt phẳng (P) : $-4y+z+8=0$ (thỏa đề bài nhận)

Câu 49 : Đáp án **A**

Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

$$\Rightarrow \begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{n_P} \\ \vec{u}\perp\overrightarrow{n_Q}\end{cases} \Rightarrow \vec{u}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]=(2;-3-1)$$

Như vậy đáp án chỉ có thể là **A** và **B**

Một đường thẳng có thể có nhiều dạng phương trình chính tắc nên đến đây thử đáp an là tối ưu hết. Trên mỗi đường thẳng lấy một điểm và thử xem điểm đó có thuộc hai mặt phẳng không.

Lấy điểm A(-1 ;2 ;1) thuộc đường thẳng $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-1}{1}$ thì A không thuộc mặt phẳng (P)

Lấy điểm $A(0;2;-1)$ thuộc đường $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$ thì nhận thấy $A(0;2;-1)$ thuộc cả hai mặt phẳng (P) và (Q)

Vậy đường thẳng cần tìm là $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{1}$

Câu 50: Đáp án **A**

Gọi H là trung điểm AB và A' là điểm đối xứng của A qua M

Khi đó: $\begin{cases} MH\,//\,A'B \\ MH \perp AB \end{cases} \Rightarrow A'B \perp AB \Rightarrow A' \in (P)$

Vì M là trung điểm AA' nên $A'(-t+3;-2t+9;t-3)$

Mà $A' \in (P) \Rightarrow t=2 \Rightarrow A(3;1;3)$