ĐÁP ÁN

1A	2B	3B	4D	5A	6D	7C	8D	9B	10A
11C	12C	13C	14A	15D	16B	17B	18A	19B	20D
21B	22A	23D	24A	25B	26D	27C	28C	29A	30C
31D	32A	33B	34D	35D	36B	37D	38C	39B	40A
41C	42D	43A	44A	45B	46C	47C	48A	49B	50D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: ***<u>Phân tích:</u>*** Ta có: $y' = x^2 - (m-1)x - m$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - (m-1)x - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = m \end{array}\right.$

Khi đó,ta có: $y(-1) = \frac{1}{3}.(-1)^3 - \frac{1}{2}(m-1).(-1)^2 - m(-1) + \frac{1}{3}$, $y(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m$

$y(m) = \frac{1}{3}m^3 - \frac{1}{2}(m-1)m^2 - m.m + \frac{1}{3}$, $y(m) = -\frac{1}{6}m^3 - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}$

+ Nếu $m < -1$ thì $y(-1) = y_{ct} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow m = \frac{-1}{3}$ không thỏa mãn.

+ Nếu $m > -1$ thì $y(m) = y_{ct} = \frac{1}{3}$ nên: $-\frac{1}{6}m^3 - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow m^3 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -3 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện ta được $m = 0$. Vậy chỉ có duy nhất $m = 0$ thỏa mãn và đáp án đúng là **A.**

<u>Sai lầm thường gặp:</u> Không đối chiếu với điều kiện và đưa ra những kết quả sai.

Câu 2: Ta có: $y = -x^3 + 3x - 2 \Rightarrow y' = -3x^2 + 3; y'' = -6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

+ $y''(1) = -6 < 0 \Rightarrow (1;0)$ là một điểm cực đại.

+ $y''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow (-1;-4)$ là một điểm cực tiểu

Vậy hàm số có đúng một điểm cực đại là (1;0).Vậy đáp án đúng là **B.**

<u>Lý thuyết cần nhớ:</u> $y' = 0; y'' < 0$ là cực đại ngược lại là cực tiểu.

Câu 3: Đây là một bài toán khá dễ dàng. $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x - 2$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 - \sqrt{\frac{5}{3}} \\ x = -1 + \sqrt{\frac{5}{3}} \end{array}\right.$$

Khi đó nếu thay vào biểu thức để tìm tọa độ hai điểm,dù máy tính CASIO cũng chỉ đưa ra kết quả xấp xỉ nên có nhiều khả năng gây ra sai lầm. Do đó ta phải thực hiện phép chia:

$x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right)\left(3x^2 + 6x - 2\right) + \frac{5}{3} - \frac{10x}{3}$. Do đó phương trình đường thẳng đi qua hai cực trị là: $y = \frac{-10}{3}x + \frac{5}{3}$. Do đó hệ số góc là : $\frac{-10}{3}$.Đáp án đúng là **B.**

<u>Sai lầm thường gặp:</u> Nhiều học sinh sau khi thực hiện phép chia xong hay nhầm thương $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ là đường thẳng cần tìm thì đưa ra đáp án **A.**

Câu 4: Ta có: + Tiệm cận ngang thì y=3; tiệm cận đứng $x = 1$

+ Giao điểm: $A(1;3);B(1;5);C(0;3)$ + Diện tích tam giác ABC: (dễ thấy $AB \perp AC$) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.2.1 = 1$. Vậy đáp án đúng là **D.**

Câu 5: ***Phân tích:*** Ta có:

$y = x^4 - 2(+1)x^2 + m(+1)^2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4(m+1)x \Rightarrow y' = 4x\left[x^2 - (m+1)\right]$

Đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi hai điểm cực tiểu nằm trên trục hoành: $\begin{cases} m > -1 \\ y\left(\sqrt{m+1}\right) = y\left(-\sqrt{m+1}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ (m+1)^2 - 2(m+1)(m+1) + m(m+1)^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ (m+1)^2(-1+m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$. Vậy đáp án đúng là **A**

Sai lầm thường gặp: Không biết xử lý bài toán nên có nhiều cách làm "khó hiểu" như đặt $x^2 = t$ rồi tìm nghiệm t để có hai nghiệm phân biệt và đưa ra đáp án **B**

Câu 6: Ta có: $y = \frac{x|x|}{2} \Leftrightarrow y = \begin{cases} \frac{x^2}{2}; x \ge 0 \\ \frac{-x^2}{2}; x < 0 \end{cases}$. Dùng định nghĩa đạo hàm ta có:

$f'(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2} - 0}{x} = 0$, $f'(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-\frac{x^2}{2} - 0}{x} = 0$

Do hàm số có đạo hàm tại 0 nên khẳng định (1) luôn đúng. Ngoài ra ta thấy : $f(x) = g(x) = \begin{cases} x; x > 0 \\ 0; x = 0 \\ -x; x < 0 \end{cases}$

Tiếp tục sử dụng định nghĩa đạo hàm ta có:

$g'(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1$, $g'(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x} = 0$

Do đó hàm số không có đạo hàm cấp hai tại 0 nên khẳng định (2) là sai.Rõ ràng theo công thức $f''(x) = g'(x)$ ở trên thì $f''(x)$ đổi dấu qua điểm 0 nên hiển nhiên $M(0;0)$ là điểm uốn của đồ thị hàm số.Do đó khẳng định (3) luôn đúng.Rõ ràng theeo công thức $f'(x)$ ở trên thì $f'(x) > 0; \forall \ne 0; f'(0) = 0$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên khẳng định(4)đúng.Vậy đáp án đúng là **D.**

Câu 7: ***Phân tích:*** Để tìm giá trị lớn nhất của hàm số này thì ta cần tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất cảu hàm số trong dấu giá trị tuyệt đối. Do đó ta cần xét đạo hàm :

$f(x) = x^3 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Khi đó ta có:

$f(-2) = -1; f(-1) = 3; f(1) = -1; f(2) = 3$. Do đó $y = |f(x)|$ có giá trị lớn nhất bằng 3. Đáp án đúng **C**

Câu 8: Ta có: $y' = 3mx^2 + 4x - 1$.Muốn hàm số nghịch biến với mọi $x < -1$ thì ta phải có:

$$y'\le 0;\forall x<-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3m<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}3m<0\\ \Delta'>0\\ y'(-1)<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m<0\\ m\le -\dfrac{4}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}m<0\\ m>-\dfrac{4}{3}\\ 3m-5<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -\dfrac{4}{3}\\ -\dfrac{4}{3}<m<o\end{array}\right.\Leftrightarrow m<0$$. Vậy đáp án đúng là **D**

Câu 9: ***Phân tích:***Để tìm được điểm cố định ta phân tích thành: $AM+B=0$.Khi đó,ta sẽ tìm được số điểm cố định bằng số nghiệm của hệ phương trình: $A=B=0$.Khi đó ta có:

$$y=x^3-(m+1)^2-(2m-1)x+3m+1\Leftrightarrow m(x^2+2x-3)+(y-x^3+x^2-x-1)=0$$

Số nghiệm cố định bằng số nghiệm của hệ: $\begin{cases}x^2-2x-3=0\\ y=x^3-x^2+x+1\end{cases}$. Dễ thấy hệ trên có đúng hai nghiệm nên đáp án đúng là **B.**

Câu 10: ***Phân tích nhanh:*** Ta có: $y'=4x^3-12x^2+4x; y'=4x(x^2-3x+1)$

$y'\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\ 0\le x\le\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$.Hàm số đồng biến trên từng khoảng: $\left[0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right];\left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$

Vậy đáp án đúng là **A.**

Sai lầm thường gặp: Nhiều học sinh cho rằng $y'>0$ nên sẽ ra đáp án **B**(nhưng điều này trái với định lý mở rộng trong sách giáo khoa).Giải bất phương trình sai sẽ dẫn đến đáp án khác

Câu 11: Điều kiện $-2<x<7$

$$\log_3(x+2)+\log_3(x+3)-\log_{\sqrt{3}}(7-x)=-1\Rightarrow\log_3(x+2)+\log_3(x+3)-\log_3(7-x)=\log_3\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{(x+2)(x+3)}{(7-x)^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-31}{2}\\ x=1\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được $x=1$. Vậy đáp án đúng là **C**.

Câu 12: Ta có:

$$\frac{2.9^x-3.6^x}{6^x-4^x}<2\Leftrightarrow\frac{3^x\left(2.3^x-3.2^x\right)}{2^x\left(3^x-2^x\right)}<2\Leftrightarrow\frac{2.\left(\frac{3}{2}\right)^x-3}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}<2\Leftrightarrow\frac{2a-3}{1-\frac{1}{a}}<2\left(a=\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2a^2-5a+2}{a-1}<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<\dfrac{1}{2}\\ 1<a<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-\log_{3/2}2\\ 0<x<\log_{3/2}2\end{array}\right.$$. Vậy đáp án đúng là **C.**

Câu 13: Điều kiện $m\ne 1$.***Phân tích:*** Bất phương trình dạng này cần chú ý:

$\log_A B > 0 \Leftrightarrow (A-1)(B-1) > 0$.Do đó ta có:

$\log_m(x^2+2x+m+1) > 0 \Leftrightarrow (m-1)\left[(x+1)^2+(m-1)\right] > 0(*)$ .Bất đẳng thưc (*) đúng với mọi x khi nào?

+ Nếu $m<1$ thì x đủ lớn ta thấy ngay(*) là sai.

+ Nếu $m>1$ thì ta có: $\left[(x+1)^2+(m-1)\right] > 0; \forall x \in \mathbb{R}$ .Vậy điều kiện cần và đủ là $m>1$.Đáp án đúng **C.**

Câu 14: Ta có:

$$\int_0^x te^{f(t)}dt = F(x)-F(0); F'(x) = xe^{f(x)}; \int_0^x te^{f(t)}dt = xe^{f(x)} \Rightarrow xe^{f(x)} = f'(x)xe^{f(x)} \Rightarrow f'(x) = x$$

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 15: Ta có:

$$f^2(x)-g^2(x) = \left(\frac{a^x+a^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^x-a^{-x}}{2}\right)^2 = 1; g(2x) = \frac{a^{2x}+a^{-2x}}{2}.2\left(\frac{a^x-a^{-x}}{2}\right).\left(\frac{a^x+a^{-x}}{2}\right) = 2g(x)f(x)$$

$$\begin{cases} f\left(g(0)\right) = f(0) = 1 \\ g\left(f(0)\right) = g(1) = \dfrac{a-a^{-1}}{2} = \dfrac{a^2-1}{2a} \end{cases} \Rightarrow f\left(g(0)\right) \neq g\left(f(0)\right)$$

$$g(2x) = 2f(x)g(x) \Rightarrow g'(2x) = g'(x)f(x) + g(x)f'(x); f(x) = \frac{a^x+a^{-x}}{2}; g(x) = \frac{a^x-a^{-x}}{2}$$

Nhận xét: Dễ kiểm tra khẳng định 1;2 là đúng còn khẳng định 3;4 là sai. Khẳng định 3 rõ ràng là sai. Còn khẳng định 4 có thể nhìn nhanh thông qua khẳng định 2.Vậy đáp án đúng là **D.**

Câu 16: Bài này có phong cách giải khác bài 13 trong cùng đề, bởi vì ta có thể cô lập tham số:

$5^x+(m-1)2^x = (m-1) > 0 \Leftrightarrow (m-1)(2^x+1) > -5^x \Leftrightarrow m > 1 - \dfrac{5^x}{2^x+1} = f(x)$ .Ta có:

$$f'(x) = \frac{5^x \ln 5(2^x+1) - (2^x \ln 2)5^x}{\left(2^x\right)^2} = -\frac{10^x(\ln 5 - \ln 2) + 5^x \ln 5}{\left(2^x\right)^2} < 0; \forall x$$

Do đó ta chỉ cần tìm: $m \geq \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. Vậy đáp án đúng là **B.**

Nhận xét: Ý tưởng cô lập tham số là ý tưởng chuẩn mực nhất mà chúng ta cần phải nắm vững .

Câu 17: ***Phân tích:*** Ý tưởng của bài toán này là so sánh các hàm mũ! Ta có:

+ Với $x \geq 0$ thì ta có: $3^x \leq 5^x; 4^x \leq 5^x; \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} > 0$ nên: $3^x+4^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} < 2.5^x$

+ Với $x<0$ thì ta có: $3^x < 1; 4^x < 1; \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = 2; 5^x > 0$ nên: $3^x+4^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} < 0 < 2.5^x$

Phương trình vô nghiệm.Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 18: Ta có: $\dfrac{f(x)f(x+1)f(x+2)}{f(3x)} = \dfrac{2017^x.2017^{x+1}.2017^{x+2}}{2017^{3x}} = 2017^3$. Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 19: ***Phân tích:*** Đối xứng của đồ thị hàm số $y = -\log x$ qua đường thẳng $y = x$ là:

$x=-\log y \Leftrightarrow y=10^{-x}=\frac{1}{10^x}$.Vậy đáp án đúng là **B.**

Lưu ý: Khi giải bài toán này cần luw ý $\log x$ là logarit cơ số tự nhiên hay chính là logarit cơ số 10

Câu 20: ***Kiểm tra nhanh:*** Ta có thể nhìn thấy ngay: $f(x)=f(-x)\Rightarrow f'(x)=-f'(-x)\Rightarrow f'(0)=0$

Do đó khẳng định 1 sai.

$f(x)=\frac{1}{3+2^x}+\frac{1}{3+2^{-x}}=\frac{6+2^x+2^{-x}}{10+3\left(2^x+2^{-x}\right)}<1;\forall x$. Do đó khẳng định 2 sai.

Khẳng định 3 cũng sai bởi vì: $f(x^2)=\frac{1}{3+2^{x^2}}+\frac{1}{3+2^{-x^2}}\neq\frac{1}{3+4^x}+\frac{1}{3+4^{-x}}$. Vậy đáp án đúng là **D.**

Sai lầm thường gặp: Nhiều họ sinh cố rút gọn biểu thức trong khẳng định 2 nên sẽ lúng túng.Một số khác thì có nhầm lẫn $2^{2^x}=4^x$

Nhận xét: Các câu 21,22,23 có thể sử dụng máy tính để ra kết quả nhanh

Câu 21: Đáp án đúng là **B.** Nếu để ý thì tích phân nay được tách thành hai tích phân cơ bản $\sqrt{x^2+1};\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Do đó ta có:

$$I=\int_0^2\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}\right)+3\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^2;I=\sqrt{5}+\frac{3}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$

Câu 22: Đáp án đúng là **A.**Ta chỉ cần để ý:

$$(x+\cos x+2)'=1-\sin x\Rightarrow I=\int_0^1\frac{1-\sin x}{x+\cos x+2}dx=\int_0^1\frac{(x+\cos x+2)'}{x+\cos x+2}dx\Rightarrow I=\left(\ln|x+\cos x+2|\right)\Big|_0^1=\ln\left(\frac{3+\cos 1}{3}\right)$$

Câu 23: Đáp án đúng là **D.**Ta có:

$$I=\int_{1/2}^1\frac{5}{x^6+x}dx=I=\int_{1/2}^1\frac{5}{x^6+\left(\frac{1}{x^5}\right)}dx\xrightarrow[dt=-\frac{5}{x^6}dx]{t=1+\frac{1}{x^5}}I=\int_{33}^2\left(-\frac{1}{t}\right)dt=\int_{33}^2\frac{dt}{t};i=\left(\ln|t|\right)\Big|_2^{33}=\ln\frac{33}{2}$$

Câu 24: Đáp án **A.**

+ Phương trình $3^x=2x+1$ có hai nghiệm là 0;1

+ Diện tích giới hạn được tính bởi:

$$S=\int_0^1\left|3^x-(2x+1)\right|dx=\int_0^1(2x+1-3^x)dx;S=\left(x^2+x-\frac{3^x}{\ln 3}\right)\Bigg|_0^1=2-\frac{2}{\ln 3}$$

Câu 25: Đáp án đúng là **B.** ***Phân tích:***

$$\int_0^{\sqrt{2}}xf(x^2)dx=1\Rightarrow\int_0^2f(x)dx=\int_0^{\sqrt{2}}f(x^2)dx^2\Rightarrow\int_0^2f(x)dx=2\int_0^{\sqrt{2}}xf(x^2)dx=2$$

$$\int_2^3f(z)dz=2\Rightarrow\int_2^3f(x)dx=\int_2^3f(z)dz=2;$$

$$\int_9^{16}\frac{f\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}dt=12\Rightarrow 12\Rightarrow\int_3^4f(x)dx=\int_9^{16}f\left(\sqrt{t}\right)d\left(\sqrt{t}\right)\Rightarrow\int_3^4f(x)dx=\frac{1}{2}\int_9^{16}\frac{f\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}dt=6$$

$$\Rightarrow\int_0^4f(x)dx=\int_0^2f(x)dx+\int_2^3f(x)dx+\int_4^3f(x)dx\Rightarrow\int_0^4f(x)dx=2+2+6=10$$

Nhận xét: Bài toán chỉ kiểm tra phép đổi biến của hàm số nê không có gì đặc biệt ở đây cả.

Câu 26: Ta có: $y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$. Áp dụng công thức thể tích ta có:

$V = \pi\int_1^2 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy = \pi\int_1^2 y^{2/3}dy$; $V = \pi\left(\frac{y^{5/3}}{5/3}\right)\Big|_1^2 = \frac{3\left(2\sqrt[3]{4}-1\right)\pi}{5}$. Vậy đáp án đúng là **D.**

Câu 27: Cách giải quyết mà phù hợp đối với bài toán này có lẽ là thử đạo hàm của các hàm số trong đáp án $\int \ln^2 x dx = x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + C$. Ta thu được đáp án đúng là **C.**

Câu 28: Bài toán này có vẻ dễ dàng bởi vì:

$\left(x^3 + x + 2\right)' = 3x^2 + 1$; $\int f(x)dx = \int\left(3x^2+1\right)e^{x^3+x+2}dx$

$\int f(x)dx = \int e^{x^3+x+2}d(x^3+x+2) = e^{x^3+x+2} + C$. Vậy đáp án đúng là **C.**

Câu 29: Ta có:

$$\frac{\left(|z|-1\right)(1+iz)}{z-\frac{1}{z}} = i \Leftrightarrow \frac{\left(|z|-1\right)(1+iz).\bar{z}.i}{z.\bar{z}.-1} = i^2 \Leftrightarrow \frac{\left(|z|-1\right)\left(i.\bar{z}-|z|^2\right)}{|z|^2-1} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} i.\bar{z}-|z|^2 = -\left(|z|+1\right) \\ |z| \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i.\bar{z} = |z|^2 - \left(|z|+1\right) \\ |z| \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = xi \\ x = |x|^2 - \left(|x|+1\right) \\ |z| \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ z = xi \\ x = x^2-(x+1) \\ x \neq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} z = xi \\ x < 0 \\ x = (-x)^2-(-x+1) \\ x \neq -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1+\sqrt{2}; z = \left(1+\sqrt{2}\right)i$$

Vậy $z = \left(1+\sqrt{2}\right)i$. Do đó đáp án đúng là **A.**

Câu 30: Đặt $z = a+bi$. Khi đó ta có: $\left|\frac{z-4}{z-2}\right| = 1; \left|\frac{z-1-2i}{z-1+i}\right| = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|(a-4)+bi\right| = \left|(a-2)+bi\right| \\ \left|(a-1)+(b-2)i\right| = \left|2(a-1)+2(b+1)i\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-4)^2+b^2 = (a-2)^2+b^2 \\ (a-1)^2+(b-2)^2 = 4(a-1)^2+(b+1)^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ 3b^2+12b+12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow z = 3-2i$. Do đó đáp án đúng là **C.**

Câu 31: Do $|z| = 1$ nên nếu đặt $z = a+bi$ thì $a^2+b^2 = 1$. Do đó tồn tại góc θ để: $a = \cos\theta; b = \sin\theta$ .Do đó ta có: $z^2 = \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^2 = \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2\cos\theta.\sin\theta.i \Leftrightarrow w = z^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

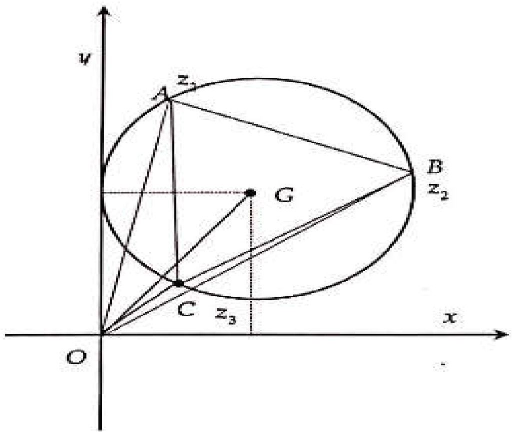
Do đó tập các điểm biểu diễn trên mặt phẳng phức của số $w = z^2$ chính là đường tròn: $x^2+y^2 = 1$. Vậy đáp án đúng là **D.**

Câu 32: Do phần thực gấp phần ảo hai lần nên số phức z có dạng:

$$z=2a+ai\Rightarrow\begin{cases}\overline{z}=2a-ai\\ |z|=\sqrt{4a^2+a^2}=\sqrt{5a^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left|z-\overline{z}\right|=|2ai|=\sqrt{4a^2}\\ \sqrt{5a^2}=3\end{cases}\Rightarrow\left|z-\overline{z}\right|=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 33:



Với mỗi điểm z trên mặt phẳng phức sẽ có sự tương ứng với mỗi vec tơ(mà điểm đầu là gốc tọa độ và điểm cuối chính là điểm biểu diễn).Khi đó theo tính chất trọng tâm ta có:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3.\overrightarrow{OG}$$

$$\Rightarrow z_1+z_2+z_3=3(3+4i)=9+12i$$

$$\Rightarrow \mathrm{w}=9+12i$$

Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 34: Ta có: $z^4+1=0\Leftrightarrow z^4-i^2=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z^2=i\\ z^2=-i\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(a^2-b^2\right)+2abi=i\\ \left(a^2-b^2\right)+2abi=i\end{array}\right.\left(z=a+bi\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2-b^2=0\\ 2ab=1\end{cases}\\ \begin{cases}a^2-b^2=0\\ 2ab=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}a=\frac{1}{\sqrt{2}};b=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ a=-\frac{1}{\sqrt{2}};b=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}a=\frac{1}{\sqrt{2}};b=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ a=-\frac{1}{\sqrt{2}};b=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\\ z=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\\ z=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\end{array}\right.$$. Vậy đáp án đúng là **D.**

Câu 35: Đáp án đúng là **D** do biệt thức delta hỏ hơn 0.

Câu 36: Ta có:

$z^4+3z^3+5z^2+4z+2=0 \Leftrightarrow \left(z^2+z+1\right)\left(z^2+2z+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2+z+1=0 \\ z^2+2z+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z=-1\pm i \end{array}\right.$

Đáp án đúng là **B.**

Câu 37: Ta có: + Mặt cầu tâm $I(-2;-1;1)$ bán kính $R=\sqrt{5}$.

+ Thiết diện đường tròn có $S=\frac{\pi}{9} \Leftrightarrow r=\frac{1}{3}$.

+ Khoảng cách của tâm I đến mặt phẳng (P) là: $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{5-\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{44}}{3}$

+ Mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ đi qua hai điểm $M(1;-1;1); N(0;-1;0)$ nên có hệ phương trình:

$\begin{cases} a-b+c+d=0 \\ -b+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=b \\ c=-a \end{cases} \Rightarrow (P): ax+by-az+b=0$

+ Khoảng cách từ $I(-2;-1;1)$ đến (P) bằng $\frac{\sqrt{44}}{3}$ nên:

$\frac{|-2a-b-a+b|}{\sqrt{a^2+b^2+(-a)^2}}=\frac{\sqrt{44}}{3} \Leftrightarrow \frac{3|a|}{\sqrt{2a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{44}}{3} \Leftrightarrow \sqrt{2+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{9}{\sqrt{44}} \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{-7}{44}$ \

Không tồn tại mặt phẳng (P). Đáp án đúng là **D.**

Câu 38: ***Phân tích:*** $ABCD$ là hình bình hành nên trung điểm của AC cũng là trung điểm của BD. Ta có:

$\begin{cases} \frac{x_A+x_C}{2}=\frac{xB+x_D}{2} \\ \frac{y_A+y_C}{2}=\frac{y_B+y_D}{2} \\ \frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B=x_A+x_C-x_D \\ y_B=y_A+y_C-y_D \\ z_B=z_A+z_C-z_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B=0+0-4=-4 \\ y_B=2+0-0=2 \\ z_B=0+2-0=2 \end{cases} \Rightarrow B(-4;2;2)$

Giả sử phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OBCD$ là: $(S): x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

Khi đó ta có:

$\begin{cases} 0^2+0^2+0^2+0.a+0.b+0.c+d=0 \\ (-4)^2+2^2+2^2+(-4).a+2b+2c+d=0 \\ 0^2+0^2+2^2+0.a+o.b+0.c+2c+d=0 \\ 4^2+0^2+0^2+4.a+0.b+0.c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ b=-18 \\ c=-2 \\ a=-4 \end{cases} \Rightarrow (S): x^2+y^2+z^2-4x-18y-2z=0$

$\Leftrightarrow (S): (x-2)^2+(y-9)^2+(z-1)^2=86$

Vậy đáp án đúng là **C.**

Câu 39: Ta có:

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}(-2;0;-3)\\ \overrightarrow{CD}(-2;0;3)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]=(0;12;0)$;

$\begin{cases}A\in AB\\ C\in CD\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AC}=(0;4;-3) \Rightarrow d(AB;CD)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|}=\dfrac{48}{2\sqrt{3}}=8\sqrt{3}$. Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 40: Gọi $D(a;b;c)$ .Khi đó ta gọi $I;J$ là trung điểm $AB;CD$, ta có điều kiện cần và đủ: $\begin{cases}AB//CD\\ \mathrm{IJ}\perp AB\end{cases}$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;2;2);\overrightarrow{CD}=(a;b-1;c-3)$

$I(2;1;2);J\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b+1}{2};\dfrac{c+3}{2}\right) \Rightarrow \vec{\mathrm{IJ}}=\left(\dfrac{a-4}{2};\dfrac{b-1}{2};\dfrac{c-1}{2}\right)$

$$\begin{cases}AB//CD\\ \mathrm{IJ}\perp AB\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{CD}=k.\overrightarrow{AB}\\ \vec{\mathrm{IJ}}=\overrightarrow{AB}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b-1=c-3\\ \left(\dfrac{a-4}{2}\right).2+\left(\dfrac{b-1}{2}\right).2+\left(\dfrac{c-1}{2}\right).2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=a+1\\ c=a+3\\ a+b+c=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\ b=\dfrac{5}{3}\\ c=\dfrac{11}{3}\end{cases}$$

$\Rightarrow D\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{11}{3}\right)$. Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 41*: Đây là bài toán rất khó! . Do $M(a;b;c)\in d$ nên ta có:

$$\frac{a-1}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c+1}{1}=t \Rightarrow \begin{cases}a=2t+1\\ b=3t\\ c=t-1\end{cases} \Rightarrow M(2t+1;3t;t-1)$$

Chu vi tam giác MAB nhỏ nhất khi và chỉ khi $\left(A+MB\right)_{\min} \Leftrightarrow \left(f(t)=\sqrt{14t^2+5}+\sqrt{14t^2-2t+1}\right)_{\min}$

Đến đây nếu dùng phương pháp hàm thì rất bất tiện. Ta có thể nghĩ theo phương pháp Mincopski:

$$f(t)=\sqrt{14t^2+5}+\sqrt{14t^2-2t+1};f(t)=\sqrt{\left(-t\sqrt{14}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(t\sqrt{14}-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{13}{14}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow f(t)\ge\sqrt{\left(-t\sqrt{14}+t\sqrt{14}-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2+\left(\sqrt{5}+\sqrt{\frac{13}{14}}\right)^2}$$

$\Rightarrow f(t)\ge\sqrt{\dfrac{1}{14}\left(5+2\sqrt{\dfrac{65}{14}}+\dfrac{13}{14}\right)}=\sqrt{6+2\sqrt{\dfrac{65}{14}}}$. Dấu "=" xảy ra khi:

$$\left(-t\sqrt{14}\right)\left(\sqrt{\frac{13}{14}}\right)=\left(t\sqrt{14}-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)\left(\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow t\left(\sqrt{70}+\sqrt{13}\right)=\sqrt{\frac{5}{14}} \Leftrightarrow t=\left(\frac{\sqrt{70}-\sqrt{13}}{57}\right)\sqrt{\frac{5}{14}}=\frac{5-\sqrt{\frac{65}{14}}}{57}$$

$M\left(\dfrac{67-\sqrt{\dfrac{130}{7}}}{57};\dfrac{5\sqrt{\dfrac{65}{14}}}{19};\dfrac{-52-\sqrt{\dfrac{65}{14}}}{57}\right)$. Đáp án đúng là **C.**

Câu 42: Mặt cầu đường kính AB có tâm là trung điểm của đoạn AB nên ta có:

$$\begin{cases} I\left(\dfrac{0+2}{2};\dfrac{1+1}{2};\dfrac{0+8}{2}\right)\Rightarrow I(1;1;4) \\ R=IA=\sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{17} \end{cases} \Rightarrow (S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=17$$

Vậy đáp án đúng là **D.**

Câu 43: Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}(0;-3;-1) \\ \overrightarrow{AC}(-1;0;1) \\ \overrightarrow{AD}(0;1;m-2) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-3;1;-3)$. $A;B;C;D$ đồng phẳng khi:

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=0 \Leftrightarrow (-3).0+1.1+(-3).(m-2)=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{7}{3}$. Vậy đáp án đúng là **A**

Câu 44: Ta có:

$$\frac{|m+2(m+1)|}{\sqrt{5}.\sqrt{2m^2+2m+5}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2|m+2(m+1)|=\sqrt{2.5(2m^2+2m+5} \Leftrightarrow 4(3m+2)^2=20m^2+20m+50$$

$$\Leftrightarrow 16m^2+28m-34=0 \Leftrightarrow m=\frac{-7\pm\sqrt{185}}{8}$$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn.Đáp án đúng là **A.**

Câu 45: Ta dễ dàng thấy được: $(S):\begin{cases} I_1(1;1;0) \\ R_1=3 \end{cases};(S):\begin{cases} I_2(0;0;3) \\ R_2=1 \end{cases} \Rightarrow I_1I_2=\sqrt{11}<4=R_1+R_2$

Vậy hai mặt cầu cắt nhau theo giao tuyến đường tròn. Đáp án đúng là **B.**

Câu 46: Thể ticThể tích khối trụ: $V=S_{day}.h=\pi R^2h$. Vậy đáp án đúng là **C.**

Câu 47: Thể tích phần còn lại bằng: $V=\dfrac{4}{3}\pi\left(R_1^3-R_2^3\right)=\dfrac{4}{3}\pi\left(R^3-\left(\dfrac{R}{3}\right)^3\right)=\dfrac{104}{81}\pi R^3$

Vậy đáp án đúng là **C.**

Câu 48: Đây là một bài toán khá khó! Tuy nhiên thực chất của bài toán như sau: Gọi $R_1;R_2$ là bán kính của hai phần bị khoét. Khi đó ta có: $R_1+R_2=R$ đồng thời thể tích hai quả cầu sẽ là:

$$V_1+V_2=\frac{4}{3}\pi\left(R_1^3+R_2^3\right)$$

Để phần thể tích quả cầu còn lại là lớn nhất thì tổng thể tích phần khoét là nhỏ nhất tức là: $\left(R_1^3+R_2^3\right)_{\min}$.

Đến đây ta có hai phương pháp giải, một là dùng hàm số, hai là biến đổi tương đương ta có:

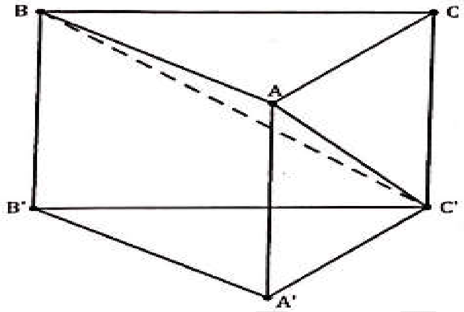
$R_1^3+R_2^3\geq 2\left(\dfrac{R_1+R_2}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \left(R_1+R_2\right)\left(R_1-R_2\right)^2\geq 0$. Do đó ta có:

$$\Delta V = V-(V_1+V_2)\le \frac{4}{3}\pi R^3-\frac{4}{3}\pi.2.\left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)^3 \Rightarrow \Delta V\le \frac{4}{3}\pi R^3-\frac{4}{3}\pi.2\left(\frac{R}{2}\right)^3 \quad \left(R_1+R_2=R\right)$$

$\Rightarrow \Delta V\le \pi R^3$. Dấu "=" xảy ra khi: $R_1=R_2=\frac{R}{2}$. Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 49: Ta có:

$\begin{cases} AB\perp AC \\ AB\perp AA' \end{cases} \Rightarrow AB\perp (ACC'A')$, do đó AC' là hình chiếu vuông góc của BC' lên $(ACC'A')$ .Từ đó, góc giữa BC' và là $BC'A=30°$.



Trong tam giác vuông ABC ta có: $AB=AC.\tan 60^\circ=a\sqrt{3}$

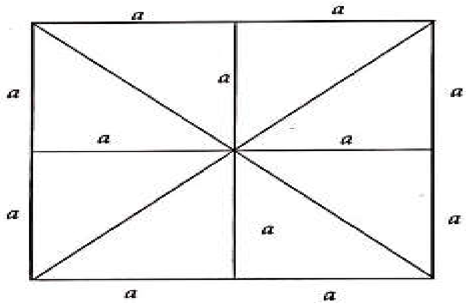
Trong tam giác vuông ABC' ta có: $AC'=AB.\cot 30°=a\sqrt{3}.\sqrt{3}=3a$

Trong tam giác vuông ACC' ta có: $CC'=\sqrt{AC'^2+AC^2}=\sqrt{(3a)^2-a^2}=2\sqrt{2}a$

Vậy thể tích hình lăng trụ là: $V=S.h=\frac{1}{2}.AB.AC.CC'=\frac{1}{2}a.\sqrt{3}.2\sqrt{2}.a.a=a^3\sqrt{6}$.

Đáp án đúng là **B.**

Câu 50: ***Phân tích:***



+ 8 mảnh thu được là như nhau.
+ Phần diện tích tăng lên là rh giới của những lát cắt tạo ra.
+ Diện tích toàn phần ban đầu của cái bánh: $S_1 = 2(2a)^2 + 4.2a.a = 16a^2$
+ Diện tích mỗi phần miếng bánh sau khi cắt ra(bao gồm 2 mặt trên dưới,2 mặt vuông góc, 1 mặt từ cạnh huyền):

$s = 2.\frac{1}{2}a^2 + 2.(a.a) + a\sqrt{2}.(a) = (3+\sqrt{2})a^2$

Do đó với 8 phần ta có diện tích toàn phần lúc sau là: $S_2 = 8s = 8(3+\sqrt{2})a^2$

Do đó diện tích đã tăng lên: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{8\left(3+\sqrt{2}\right)a^2}{16a^2} = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$

Đáp án đúng là **D.**