ĐÁP ÁN

1C	2B	3D	4C	5B	6D	7A	8C	9C	10B
11D	**12D**	**13C**	**14B**	**15C**	**16D**	**17A**	**18B**	**19B**	**20A**
21A	**22A**	**23B**	**24B**	**25D**	**26B**	**27A**	**28D**	**29A**	**30C**
31B	**32D**	**33A**	**34B**	**35B**	**36A**	**37D**	**38D**	**39D**	**40A**
41C	**42A**	**43D**	**44A**	**45C**	**46B**	**47C**	**48D**	**49C**	**50D**

HƯỚNG DẪN:

Câu 1: Đáp án C.

$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ta có $y=\frac{3x^2}{x^2-x}=\frac{3x^2}{x(x-1)}=\frac{3x}{x-1}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{3x}{x-1}=-\infty; \lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty$

$\Rightarrow TCD: x=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=3\Rightarrow TCN: y=3$

Câu 2.

Dễ thấy (1) đúng, (2) sai vì hàm số đã cho là hàm không chẵn không lẻ, (3) đúng (qua tính toán trực tiếp), (4) sai vì đồ thị có dạng chuẩn của hàm đa thức bậc 3, (5) sai vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)=-\infty$.

Ta chọn phương án **B**.

Câu 3: Đáp án D.

Vì

$$y'=\frac{(\cos x)'2\sin^2 x-\cos x.(2\sin^2 x)'}{(2\sin^2 x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x.2\sin^2 x-\cos x.(2.2\sin x.\cos x)}{4.\sin^4 x}$$

$$=\frac{-2\sin^3 x-4\sin x\cos^2 x}{4\sin^4 x}=-\frac{\sin^2 x+2\cos^2 x}{2\sin^3 x}$$

$$=-\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)+\cos^2 x}{2\sin^3 x}=-\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$$

Câu 4.

Dựa vào tính đồng biến – nghịch biến (tính biến thiên) ta loại hai phương án **A** và **D**.

Với $x=0$, suy ra $y=4$, hay đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(0;4)$ ta loại phương án **B**.

Vậy ta chọn phương án **C**.

Câu 5.

Xét $(\gamma_\alpha): f(x) = -\frac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha$ và $(\Gamma): g(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$.

Nhận thấy (γ_α) tiếp xúc với (Γ) khi và chỉ khi $\begin{cases} f(x)=g(x) & (1) \\ f'(x)=g'(x) & (2) \end{cases}$

Ta có

$$(2) \Leftrightarrow -\frac{g}{v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x + \tan\alpha = -\frac{g}{v_0^2}x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{g}{v_0^2}\left[\tan^2\alpha\right]x + \tan\alpha = 0 \Leftrightarrow x = \frac{v_0^2}{g\tan\alpha}$$

Ta chọn phương án **B**. (Ta cũng có thể tính được $y = \frac{v_0^2}{2g}(1-\cot^2\alpha) = \frac{v_0^2}{2g}\left(1-\frac{1}{\tan^2\alpha}\right)$).

Câu 6: Đáp án D.

Do hàm $f(x)$ đơn điệu trên (a,b) tức là luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên (a,b). Do vậy $f'(x)$ không đổi dấu trên (a,b).

Câu 7: Đáp án A.

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 \Rightarrow y=4 \\ x=1 \Rightarrow y=-1 \end{array}\right.$

Do giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD} = 4$.

Câu 8.

Phương án **A** sai, giá trị cực đại của hàm số có thể nhỏ hơn giá trị cực tiểu của hàm số.

Phương án **B** sai, vì đây chỉ là điều kiện cần, tham khảo SGK Giải Tích 12 – Nâng Cao – trang 11.

Phương án **D** sai, vì điều này chỉ đúng khi kèm thêm điều kiện $f'(x_0) = 0$.

Ta chọn phương án **C**.

Câu 9.

Xét hàm số $y = -3x^4 + 2\sqrt{5}x^3 - 6x^2 + 6\sqrt{5}x + 7$, ta tính được $y'=-12x^3+6\sqrt{5}x^2-12x+6\sqrt{5}$. Khi đó

$$y'=0\Leftrightarrow -12x^3+6\sqrt{5}x^2-12x+6\sqrt{5}=0$$
$$\Leftrightarrow -6\left(2x-\sqrt{5}\right)\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Vận dụng bảng biến thiên ta suy ra hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Do đó khoảng cách từ cổng trường Đại học Y Dược TP. Hồ Chí Minh đến nhà bạn Trân là $\frac{\sqrt{5}}{2}(km)$.

Suy ra thời gian Trân đi từ nhà đến trường là $t=\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 1000}{60}\approx 18,63$ (*phút*)

Ta chọn phương án **C**.

Câu 10.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-3;-\frac{5}{2}\right\}$.

Ta tính được $y'(x)=5.\frac{1}{x+3}-9.\frac{1}{2x+5}$

Khi đó $y'(x)=0\Leftrightarrow x=2$.

Vận dụng bảng biến thiên ta suy ra hàm số đồng biến trên từng khoảng $\left(-3;-\frac{5}{2}\right)$ và $(2;+\infty)$.

Ta chọn phương án **B**.

Câu 11.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định. Vì *M* là điểm cố định nên với mọi giá trị của *m* thì *M* vẫn thuộc (C_m).

Chọn $m=2$, suy ra $(C_2):y=\frac{x-8}{2(2x-1)}$, hay $y_0=\frac{x_0-8}{2(2x_0-1)}$.

Chọn $m=3$, suy ra $(C_3):y=\frac{x-12}{2(3x-1)}$, hay $y_0=\frac{x_0-12}{2(3x_0-1)}$

Do đó

$$\frac{x_0-8}{2(2x_0-1)}=\frac{x_0-12}{2(3x_0-1)}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\\x_0=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y_0=-1\\y_0=1\end{array}\right.$$

Ta chọn phương án **D**.

Câu 12.

Như ta đã biết " $f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ $\Leftrightarrow$ $f'(x) \le 0, \forall x \in (a;b)$ (dấu "=" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm)"

Do đó, dùng chức năng tính đạo hàm tại một điểm của hàm số trong máy tính Casio – Vinacal ta thu được kết quả như sau: với phương án **A**: $y'(1) > 0$, với phương án **B**: $y'(2) > 0$ và phương án **C**: $y'(1) > 0$. Ta loại cả ba phương án **A**, **B**, **C**.

Ta chọn phương án **D**.

Lưu ý rằng bài toán này vẫn có thể giải được theo phương pháp thông thường nhưng mất rất nhiều thời gian. Với một tí tinh ý cùng chiếc máy tính trong tay học sinh có thể xử lí câu này chỉ trong vài "nốt nhạc"

Câu 13.

Ta tính được

$$y'(x) = \frac{(3x^2+2x)(x^2+1)-(x^3+x^2+4).2x}{(x^2+1)^2}$$

Khi đó

$$\begin{cases} y'(x)=0 \\ x \in [-1;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+3x^2-6x=0 \\ x \in [-1;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3+3x-6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0 \\ x \in [-1;1] \end{cases}$$

Mặt khác $y(0)=4, y(1)=3, y(-1)=2$.

Vậy $\min\limits_{[-1;1]} y(x) = y(-1) = 2$. Ta chọn phương án **C**.

Câu 14*.

Điều kiện xác định $x > 0, x \ne 1$. Ta có

$$\begin{aligned} &24x^6-2x^5+27x^4-2x^3+1997x^2+2016 \\ &= x^4(24x^2-2x+1)+x^2(26x^2-2x+1) \\ &\qquad +1996x^2+2016 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Mặt khác, đặt $y = \log_x \frac{22}{3}$ và kết hợp với $\log_x \frac{22}{3} = \frac{1}{\log_{\frac{22}{3}} x}$, ta được

$$\sqrt{2y^2-2y+5}+\sqrt{2y^2-4y+4}$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{2}y\right)^2-2\sqrt{2}y.\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{9}{2}}$$
$$+\sqrt{\left(\sqrt{2}y\right)^2-2.\sqrt{2}y.\sqrt{2}+2+2}$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}y-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

Đặt $\vec{a}=\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right);\vec{b}=\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}y;\sqrt{2}\right)$

Suy ra

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\Rightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{2}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

Ta có bất đẳng thức (bổ đề) sau $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\ge\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.

Do đó

$$\sqrt{\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}y\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$$
$$\ge\sqrt{\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-\sqrt{2}y\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{13}$$

Suy ra $\sqrt{2y^2-2y+5}-\sqrt{13}+\sqrt{2y^2-4y+4}\ge 0$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}y-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}y}=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}>0\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=3\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}y\right)$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}y-\sqrt{2}=3\sqrt{2}-3\sqrt{2}y\Leftrightarrow 5\sqrt{2}y=4\sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow y=\frac{4}{5}$ (nhận)

Từ đó ta được

$\left(\sqrt{2y^2-2y+5}-\sqrt{13}+\sqrt{2y^2-4y+4}\right)$
$\left(24x^6-2x^5+27x^4-2x^3+1997x^2+2016\right)\le 0$

Kết hợp đề suy ra

$\left(\sqrt{2y^2-2y+5}-\sqrt{13}+\sqrt{2y^2-4y+4}\right)$
$\left(24x^6-2x^5+27x^4-2x^3+1997x^2+2016\right)=0$

Nhận thấy $y=\frac{4}{5}$ là nghiệm duy nhất.

Từ đó suy ra

$\log_x\frac{22}{3}=\frac{4}{5}\Leftrightarrow x^{\frac{4}{5}}=\frac{22}{3}\Leftrightarrow \ln x^{\frac{4}{5}}=\ln\frac{22}{3}$

$\Leftrightarrow\frac{4}{5}\ln x=\ln\frac{22}{3}\Leftrightarrow \ln x=\frac{\ln\frac{22}{3}}{\frac{4}{5}}\Leftrightarrow x=e^{\frac{5}{4}\ln\frac{22}{3}}$

Vậy giá trị tổng các nghiệm cần tìm là

$e^{\frac{5}{4}\ln\frac{22}{3}}\approx 12,1$. Ta chọn phương án **B.**

Câu 15.

Với $\log_b\sqrt{c}=x^2+1$, ta suy ra

$$\frac{1}{2}\log_b c=x^2+1\Rightarrow \log_b c=2x^2+2$$

Với $\log_{a^2}\sqrt{b^3}=x$, ta suy ra

$\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\log_a b=x\Rightarrow \log_a b=\frac{4}{3}x.$

Với $\log_{\sqrt[3]{c}} a=x$, ta suy ra $3\log_c a=x\Rightarrow \log_c a=\frac{x}{3}$.

Mặt khác ta có đẳng thức $\log_a b.\log_b c.\log_c a=1$, do đó:

$$\frac{4}{3}x.\left(2x^2+2\right).\frac{x}{3}=1 \Leftrightarrow x^4+x^2-\frac{9}{8}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{-2+\sqrt{22}}{4} \\ x^2=\dfrac{-2-\sqrt{22}}{4}<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-2+\sqrt{22}}{4}}$$

Vậy $Q\approx -1982$ hoặc $Q\approx -1979$.

Ta chọn phương án **C**.

Câu 16.

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ \dfrac{\sqrt{8x^2-12}}{\ln\dfrac{1}{x}}>0 \\ 8x^2-12>0 \\ \ln\dfrac{1}{x}>0 \\ x\neq 0 \\ \sin x-\cos x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x>\sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ x<-\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{array}\right. \\ x<1 \\ x\neq \dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

(vô lí).

Vậy tập xác định của bất phương trình đã cho là

$D=\varnothing$. Ta chọn phương án **D**.

Câu 17.

Ta có

$$5^{x-1}+5\cdot 0,2^{x-2}=26 \Leftrightarrow \frac{1}{5}\cdot\left(5^x\right)^2-26\cdot\left(5^x\right)+125=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x=5 \\ 5^x=125 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=3 \end{array}\right.$$

Do đó $x_1x_2=3$. Ta chọn phương án **A**.

<u>Sai lầm thường gặp:</u> *Không tính đại lượng x_1x_2 mà tính $5^{x_1}\cdot 5^{x_2}$, ta sẽ chọn nhầm phương án C. Nhầm tổng và tích ta sẽ chọn nhầm B.*

Câu 18.

Ta có $f\left(x\right)=x^{x}$, suy ra $\ln f\left(x\right)=\ln\left(x^{x}\right)=x\ln x$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được $\dfrac{f'(x)}{f\left(x\right)}=\ln x+1$, hay $f'(x)=f\left(x\right)\left[\ln x+1\right]=x^{x}\left(\ln x+1\right)$

Ta chọn phương án B.

<u>Sai lầm thường gặp:</u> *Dùng công thức $\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a$, suy ra $\left(x^{x}\right)'=x^{x}\ln x$, ta sẽ chọn nhầm C.*

Không biết cách dùng công thức logarit nepe hai vế sẽ khó tìm được đáp án, ta sẽ chọn nhầm A hoặc ưu tiên chọn D!

Câu 19.

Vì $a,b,c>0$ và $abc=1$ nên áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta được $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$.

Do đó $a+b+c<\left(a+b+c\right)^{3}$.

Mặt khác ta có

$$\left(a+b+c\right)^{3}=\left(a^{3}+b^{3}+c^{3}\right)+6abc$$
$$+3\left(ab^{2}+bc^{2}+ca^{2}\right)+3\left(a^{2}b+b^{2}c+c^{2}a\right)$$

(dễ dàng chứng minh bằng khai triển hằng đẳng thức).

$$a+b+c<\left(a+b+c\right)^{3}$$

Suy ra $=\left(a^{3}+b^{3}+c^{3}\right)+6abc+3\left(ab^{2}+bc^{2}+ca^{2}\right)$

$$+3\left(a^{2}b+b^{2}c+c^{2}a\right)$$

hay

$\left[a+b+c\right]^{n}<\begin{bmatrix}\left(a^{3}+b^{3}+c^{3}\right)+6abc\\+3\left(ab^{2}+bc^{2}+ca^{2}\right)+3\left(a^{2}b+b^{2}c+c^{2}a\right)\end{bmatrix}^{n}$ Kết hợp với giả thiết đã cho ta được

$\left[a+b+c\right]^{m}>\left[a+b+c\right]^{n}$, với $a+b+c\geq 3>1$.

Vậy $m>n$. Ta chọn phương án **B**.

Câu 20.

Nhận thấy

$$\frac{10+\pi^{e}\sqrt{5}}{\left|3-\ln 11\right|.\left\{\left(\log_{2}5\right)\left[7^{2}-9\sqrt[3]{26}\right]\right\}\cdot\log 11}>1$$

nên $a<b$. Ta chọn phương án **A**.

Câu 21.

Cách 1. Tính $f'(x)$ bằng công thức, sau đó tính giá trị $f'\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Cách 2. Dùng chức năng tính đạo hàm của máy tính Casio – Vinacal.

Dễ dàng tính được $f''\left(\frac{\pi}{5}\right)\approx -0,2435$. Ta chọn phương án **A**.

Câu 22.

Điều kiện $x>0$. Ta có $y=24\log_2 x$, suy ra $y'=\frac{24}{x\ln 2}$, do đó $y''=-\frac{24}{x^2\ln 2}<0$ với mọi $x>0$. Ta chọn phương án **A**.

Câu 23.

Ta có công thức quen thuộc từ sách giáo khoa:

$$V=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx.$$

Chỉ cần áp dụng công thức và dùng máy tính cầm tay, ta có thể nhanh chóng giải ra câu này.

Ta có

$$V=\pi\int_0^2\left|\left(e^x\right)^2-\left(e^{-x+2}\right)^2\right|dx=\pi\int_0^2\left|e^{2x}-e^4.e^{-2x}\right|dx$$

Vì $f(x)=e^{2x}-e^4.e^{-2x}=\frac{e^{4x}-e^4}{e^{2x}}, f(x)>0$ với $x>1$ và $f(x)<0$ với $x<1$ nên

$$V=\pi\left[\int_0^1\left(e^{-2x+4}-e^{2x}\right)dx+\int_1^2\left(e^{2x}-e^{-2x+4}\right)dx\right]$$

$$=\pi\left[\left[\frac{-e^{-2x+4}-e^{2x}}{2}\right]\Bigg|_0^1+\left[\frac{e^{2x}+e^{-2x+4}}{2}\right]\Bigg|_1^2\right]$$

$$=\pi\left[\frac{-e^2-e^2+e^4+1}{2}+\frac{e^4+1-e^2-e^2}{2}\right]$$

$$=\pi\left(e^2-1\right)^2$$

Ta chọn phương án B.

Câu 24.

Ta có

$$I=\int_1^2 \frac{dx}{x^5+x^3}=\int_1^2 \frac{dx}{x^3.\left(x^2+1\right)}=\int_1^2 \frac{x}{x^4.\left(x^2+1\right)}dx$$

Đặt $t=x^2+1$, suy ra $dt=2xdx \Leftrightarrow \frac{1}{2}dt=xdx$.

Đổi cận $x=1 \Rightarrow t=2, x=2 \Rightarrow t=5$.

Suy ra $I=\int_2^5 \frac{1}{2}.\frac{1}{(t-1)^2.t}dt$.

Ta cần tách tiếp $\frac{1}{(t-1)^2.t}$ về dạng $\frac{mt+n}{(t-1)^2}+\frac{k}{t}$ để có thể lấy nguyên hàm được. Dễ dàng tìm được m,n,k bằng phương pháp đồng nhất hệ số. Ta tìm được $m=-1, n=2, k=1$.

$$I=\frac{1}{2}\int_2^5\left[\frac{1}{t}+\frac{2-t}{(t-1)^2}\right]dt$$

Suy ra $=\frac{1}{2}\ln|x|\Big|_2^5-\frac{1}{2}.\frac{1}{t-1}\Big|_2^5-\frac{1}{2}\ln|t-1|\Big|_2^5$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}-\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{4}-1\right)-\frac{1}{2}\ln 4=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{8}+\frac{3}{8}$$

Suy ra $a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{8} \Rightarrow a+2b=\frac{5}{4}$.

Ta chọn phương án **B.**

Câu 25

Cách 1. Ta tính đạo hàm của từng hàm số trong các phương án A, B, C, D.

Cách 2. Ta tính đạo hàm của hàm số trong phương án A. Nếu kết quả vừa tính được không trùng với $q(x)$, ta chọn ngay phương án A. Nếu kết quả vừa tính được trùng với $q(x)$, ta sẽ thực hiện quy trình sau:

- Chẳng hạn với phương án B: Xác định xem <u>tồn tại hay không</u> hệ số *m* <u>nguyên duy nhất</u> sao cho $3x^2+1+m\left(x^2+x-1\right)=-3x+4$ với mọi *x*, hay $m=\frac{(-3x+4)-\left(3x^2+1\right)}{x^2+x-1}$. Ta dễ dàng thực hiện quy trình này với sự hỗ trợ của Casio – Vinacal.
- Thực hiện tương tự với phương án C và D cho đến khi "không tồn tại hệ số *m* nguyên duy nhất" thỏa mãn quy trình, và đó chính là đáp án của bài toán.

Ta chọn phương án D, chính xác phải là $\frac{4x^2+x}{x^2+x-1}$.

Câu 26: Đáp án B.

Ta có

$$\int e^x.e^{x+1}dx = \int e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x+1}d(2x+1) = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C$$

Câu 27.

Theo công thức tính diện tích hình phẳng, ta có

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{3+\sin 2x}}\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{3+\sin 2x}}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{4-(\sin x - \cos x)^2}}\right) dx$$

Đặt $\sin x - \cos x = 2\sin t \Rightarrow (\cos x + \sin x)dx = 2\cos tdt$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = \frac{-\pi}{6}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

Suy ra

$\alpha = \int_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos tdt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = \int_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t}{2\sqrt{\cos^2 t}}dt = \int_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} dt = t\Big|_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}$ Vậy $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Ta chọn phương án **A**.

Đây là một dạng toán khá mới lạ, là sự kết hợp của ứng dụng tích phân và lượng giác.

Ngoài ra quý đọc giả có thể bấm máy tính cũng đi đến kết quả như tôi đã phân tích ở trên.

Câu 28.

Đặt $x = 2\tan t \Rightarrow dx = 2(1+\tan^2 t)dt, t \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Suy ra $I = \int \frac{2(1+\tan^2 t)}{4\tan^2 t + 4}dt = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}t + C$.

Trả biến ta được $I = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$.

Ta chọn phương án D.

Câu 29.

Ta có $I = \int \frac{1}{x}e^x dx + \int e^x \ln xdx = I_1 + I_2$

Xét $I_2 = \int e^x \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = e^x \end{cases}$

$\Rightarrow I_2 = \left(e^x \ln x\right) - \int \frac{1}{x} e^x dx = e^x \ln x - I_1$

Suy ra $I = e^x \ln x + C$. Ta chọn phương án **A**.

Câu 30.

Ta có $z = (3+i)^2 = 8 + 6i$, suy ra

$w = \frac{1}{z} + \bar{z} = \frac{1}{8+6i} + 8 - 6i = \frac{202}{25} - \frac{303}{50} i$.

Do đó $|w| = \sqrt{\left(\frac{202}{25}\right)^2 + \left(\frac{303}{50}\right)^2} = \frac{101}{10}$.

Ta chọn phương án **C**.

Câu 31.

Gọi $z = a + bi\left(a, b \in \mathbb{R}\right)$, suy ra

$z - 2i = a + (b-2)i$ là số thực khi và chỉ khi

$\begin{cases} a \neq 0 \\ b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow z = a + 2i, a \neq 0$

Mặt khác,

$|z - (i+1)| = 1 \Leftrightarrow |a - 1 + i| = 1$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow a = 1$ (nhận)

Vậy $z = 1 + 2i \Rightarrow \bar{z} = 1 - 2i$. Ta chọn phương án **B.**

Câu 32.

Cách 1: Bấm máy tính ta được $\begin{cases} z_1 = 2 + i \\ z_2 = 2 - i \end{cases}$.

Cách 2:

Xét phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$.

Ta có $\Delta' = -1 = i^2$, suy ra $z_1 = 2+i, z_2 = 2-i$.

Suy ra

$$P = (z_1-1)^{2011} + (z_2-1)^{2011} = (1+i)^{2011} + (1-i)^{2011}$$
$$= (1+i)\left[(1+i)^2\right]^{1005} + (1-i)\left[(1-i)^2\right]^{1005}$$
$$= (1+i)(2i)^{1005} + (1-i)(-2i)^{1005}$$
$$= 2^{1005}(1+i)i - 2^{1005}(1-i)i$$
$$= 2^{1005}(i-1-i-1) = -2^{1006}$$

Ta chọn phương án D.

Câu 33.

Gọi $z = a+bi \ (a, b \in \mathbb{R})$

Ta có

$|-2-3i+\overline{z}| = |z-i| \Leftrightarrow |a-2-(b+3)i| = |a+(b-1)i|$ Ta cần tìm z sao cho $\sqrt{a^2+b^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$\Leftrightarrow (a-2)^2 + (b+3)^2 = a^2 + (b-1)^2 \Leftrightarrow a = 2b+3$

Ta có

$$a^2+b^2 = (2b+3)^2 + b^2 = 5\left(b+\frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} \geq \frac{9}{5}$$

Do đó

$\min\left(\sqrt{a^2+b2}\right) = \sqrt{\frac{9}{5}} \Leftrightarrow b = \frac{-6}{5} \wedge a = \frac{3}{5} \Rightarrow z = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$ Vậy $z = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$. Ta chọn phương án **A**.

Câu 34.

Ta có

$$\log_4(n-3) + \log_2\sqrt{n+9} = 3 \quad (n>3)$$
$$\Leftrightarrow 2.\log_4(n-3) + 2\log_2\sqrt{n+9} = 6$$
$$\Leftrightarrow 2.\frac{1}{2}\log_2(n-3) + \log_2(n+9) = 6$$
$$\Leftrightarrow \log_2\left[(n-3)(n+9)\right] = 6$$
$$\Leftrightarrow (n-3)(n+9) = 64 \Leftrightarrow n^2 + 6n - 27 - 64 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 7 \\ n = -13 \end{array}\right.$$

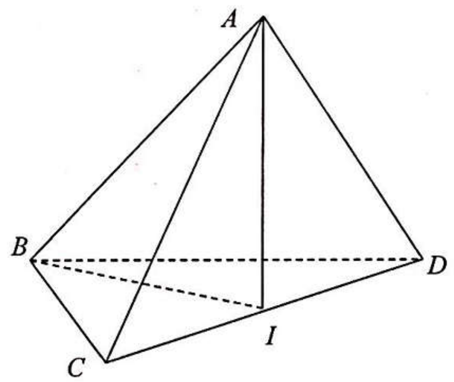
Suy ra $n=7$.

Ta có

$$z=\left(\frac{2-2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}\right)^7=\left(\sqrt{3}-i\right)^7=\left[2\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)\right]^7=128\left(\cos\frac{-7\pi}{6}+i\sin\frac{-7\pi}{6}\right)=-64\sqrt{3}+64i$$

Ta chọn phương án **B.**

Câu 35.



Vì $AC=AD=BC=BD=AB=a$ nên hai tam giác *ACD* và *BCD* lần lượt vuông cân tại *A* và *B*. Đây là một yếu tố mà đề bài muốn che giấu.

Gọi *I* là trung điểm cạnh *CD*. Ta có $AI=BI=\frac{a\sqrt{2}}{2}, AB=a$ nên tam giác *ABI* vuông cân tại *I*. Suy ra $AI\perp BI$ mà $AI\perp CD$ nên $AI\perp(BCD)$.

Vậy $V_{ABCD}=\frac{1}{3}AI.S_{BCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}a^2=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Ta chọn phương án **B.**

Sai lầm thường gặp.

Không nhận ra hai tam giác ACD và BCD lần lượt vuông cân tại A và B nên việc xác định đường cao gặp khó khăn dẫn đến không tìm được thể tích hình chóp.

Câu 36.

Giả sử xét hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có đáy là hình vuông *ABCD* và các mặt bên là các tam giác cân tại *S*, hình chiếu *S* lên mặt đáy trùng với giao điểm *F* của *AC* và *BD*.

Vì tổng diện tích các mặt bên gấp đôi diện tích mặt đáy nên $4S_{SAB}=2S_{ABCD}$.

Hay $4.\frac{1}{2}l.a=2a^2$, suy ra $l=a$ (với *l* là độ dài đường cao *AL* của tam giác *SAB*)

Ta tính được độ dài đường cao

$SF=\sqrt{SL^2-LF^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $S_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SF.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Ta chọn phương án **A**.

Sai lầm thường gặp: *Nhầm lẫn hình chóp tứ giác đều và hình chóp đều nên tính nhầm độ dài đường cao của hình chóp hoặc biến đổi nhầm hệ thức* $4S_{SAB}=2S_{ABCD}$ *dẫn đến việc chọn đáp án B hay D.*

Câu 37.

Ta có $V_{MAB'C}=V_{B'AMC}$

(với $S_{AMC}=\frac{3}{4}S_{ADC}=\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.2a^2=\frac{3a^2}{4}$)

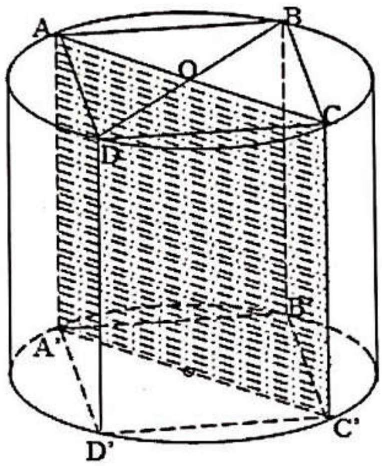
Do đó $V_{MAB'C}=\frac{1}{3}.\frac{3a^2}{4}.a=\frac{a^3}{4}$.

Ta chọn phương án **D**.

Sai lầm thường gặp.

Không nhận ra $V_{MAB'C}=V_{B'AMC}$ *để chọn đường cao ứng với đáy cho dễ dàng trong việc tính toán.*

Câu 38.



Vì thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông nên đường cao *h* và bằng *2r* (với *r* là bán kính)

Do đó $V=\pi r^2.2r=2\pi r^3$.

Lăng trụ đều nội tiếp trong hình trụ đã cho có đáy là hình vuông nội tiếp trong đường tròn đáy nên độ dài cạnh hình vuông bằng $r\sqrt{2}$. Ta tính được thể tích của hình trụ nội tiếp trong hình trụ đã cho là:

$V'=\left(r\sqrt{2}\right)^2.2r=4r^3$

Vậy $\dfrac{V'}{V}=\dfrac{4r^3}{2\pi r^3}=\dfrac{2}{\pi}$. Ta chọn phương án D.

<u>Sai lầm thường gặp:</u> *Tính ngược tỉ số $\dfrac{V'}{V}$ thành $\dfrac{V}{V'}$ dẫn đến việc khoanh nhầm câu B. Tính nhầm độ dài cạnh hình vuông nối tiếp đường tròn đáy dẫn đến việc khoanh đáp án A hoặc C.* ***Nguồn:*** *Bài tập HÌNH HỌC – Nguyễn Mộng Hy (Chủ biên).*

Câu 39.

Vì các mặt (*SAD*) và (*SAB*) vuông góc với đáy nên $SA\perp(ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} BC\perp SA \\ BC\perp AB \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$

$\Rightarrow \widehat{((SBC);(ABCD))}=\widehat{SBA}=45^0$.

Ta tính được $SA=2a.\tan 45^0=2a$.

Vì $CD//AB$ nên

$d(AB;SC)=d(AB;(SCD))=d(A;(SCD))$.

Để ý thấy $CD\perp(SAD)$ hay $CD\perp SD$,

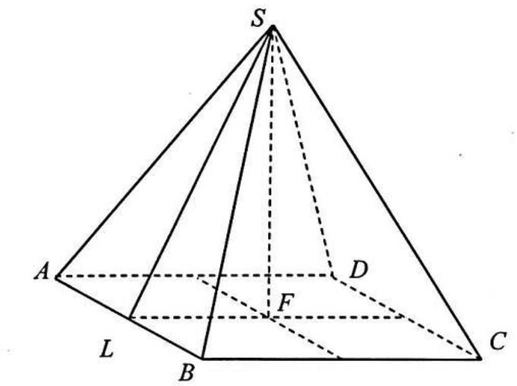
kết hợp dựng $AH\perp SD$, suy ra $CD\perp AH$.

Do đó $AH\perp(SCD)$. Do đó $d(AB;SC)=AH$.

Ta có $AH.SD=SA.AD\Rightarrow AH=2a\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Ta chọn phương án **D**.

Câu 40.



Vì *S.ABC* là hình chóp tam giác đều nên tâm *O* của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó nằm trên đường cao *SH*, trong đó *H* là trọng tâm của tam giác đều *ABC*.

Gọi *I* là trung điểm của cạnh *SA*. Ta có $OI \perp SA$. Khi đó hai tam giác vuông *SIO* và *SHA* đồng dạng. Từ đó ta suy ra $\frac{SO}{SA} = \frac{SI}{SH} = \frac{SA}{2SH}$.

Do đó $SO = \frac{SA^2}{2SH} = r$ (với *r* là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp).

Để ý rằng $SH^2 = SA^2 - AH^2 = b^2 - \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$

Ta tính được $SH = \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3b^2 - a^2}$.

Vậy $r = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{b^2}{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3b^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{3}b^2}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}$

Ta chọn phương án **A.**

Câu 41.

Trong mặt phẳng (*ABC*), qua *A* kẻ đường thẳng *d* song song với *BC*. Kẻ $HI \perp d$. Ta thấy $AI \perp (SHI)$. Trong tam giác vuông *SHI* kẻ $HK \perp SI$. Dễ thấy $HK \perp (SIA)$.

Ta có

$d(SA, BC) = d(B,(SIA)) = 2d(H,(SIA)) = 2HK$.

Ta tính được $HI = HA.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Dễ thấy $SH = HC.\tan 60^0 = \frac{3}{2}a$.

Từ $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2}$ ta tính được $HK = \frac{3a\sqrt{13}}{26}$.

Suy ra $d(SA, BC) = 2HK = \frac{3\sqrt{13}}{13}a$.

Ta chọn phương án **C**.

<u>Sai lầm thường gặp.</u>

*Công đoạn khó khăn nhất bài này là tìm được đoạn HK từ đó dễ dàng tính được $d(SA, BC)$. Nhiều bạn thường tính được HK và vội vàng khoanh đáp án **D**.*

Câu 42.

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đã cho là $S_{xq} = 3ha = 6a^2$

Suy ra $h = 2a$. Thể tích khối lăng trụ là

$$V = h.S_{ABC} = 2a.\left(\frac{1}{2}a.\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^3.$$

Ta chọn phương án **A**.

<u>Sai lầm thường gặp.</u>

Nhầm lẫn $S_{xq} = ha$ hay $V = \frac{1}{3}h.S_{ABC}$ dẫn đến chọn nhầm đáp án là B hay D.

Câu 43.

Phương trình tham số của đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Gọi $D(1-3t; 1+t; 2+2t)$ thuộc đường thẳng *d* và mặt phẳng (*P*).

Do đó $(1-3t) + 6(1+t) - 3(2+2t) + 2 = 0$ suy ra $t = 1$ nên $D(-2; 2; 4)$. Ta chọn phương án D.

Ta cũng có thể dùng máy tính bỏ túi dò các đáp án. Thế tọa độ điểm *D* vào phương trình đường thẳng *d* và phương trình mặt phẳng (*P*) và kiểm tra xem tọa độ nào thỏa cả hai phương trình.

Câu 44.

Phương trình tham số đường thẳng *d* đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (α) là $d:\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1-t\\ z=2+2t\end{cases}$

Ta sẽ tìm hình chiếu *H* của điểm *M* trên mặt phẳng (α), khi đó *H* là trung điểm của MM', từ đó ta có thể dễ dàng tìm được tọa độ điểm M' thông qua điểm *H* và *M*.

Gọi điểm $H(1+2t;-1-t;2+2t)$ thuộc đường thẳng *d* và mặt phẳng (α).

Do đó $2(1+2t)+(1+t)+2(2+2t)+12=0$ suy ra $t=-\frac{19}{9}$ nên $H\left(-\frac{29}{9};\frac{10}{9};-\frac{20}{9}\right)$.

Vì *H* là trung điểm MM' suy ra

$M'\left(-\frac{67}{9};\frac{29}{9};-\frac{58}{9}\right)$. Ta chọn phương án **A**.

Câu 45.

Ta có $M(x;y;z)\in(P)$ suy ra

$$|3x+y-z+4|=|3x+y-z-2|$$
$$\Rightarrow 3x+y-z+1=0$$

Ta chọn phương án **C**.

Dễ dàng nhận ra rằng $\frac{4+(-2)}{2}=1$ nên ta có thể chọn ngay được đáp án **C**.

Câu 46.

Hình chiếu của điểm $A(1;-1;2)$ lên các trục tọa độ *Ox, Oy, Oz* lần lượt là $A_1(1;0;0), A_2(0;-1;0)$ và $A_3(0;0;2)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua ba điểm A_1, A_2, A_3 nên (*Q*) có phương trình theo đoạn chắn là:

$(Q):\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1$ hay $(Q):2x-2y+z-2=0$

Ta chọn phương án B.

Sai lầm thường gặp.

Không nhớ hay nhầm lẫn phương trình đoạn chắn của mặt phẳng cắt các trục tọa độ.

Câu 47.

Gọi MM' là đường vuông góc chung của hai đường thẳng đã cho với $M\in d$ và $M'\in d'$.

Khi đó ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MM'} \perp \vec{m} \\ \overrightarrow{MM'} \perp \vec{n} \end{cases}$ với $\vec{m}, \vec{n}$ lần lượt là VTCP của hai đường thẳng d và d'.

Ta tính được $M\left(\frac{2}{3};\frac{8}{3};1\right)$ và $M'\left(\frac{16}{15};\frac{43}{15};1\right)$. Phương trình đường thẳng *a* qua *M*, M' là: $a:\begin{cases} x=\frac{2}{3}+2t \\ y=\frac{8}{3}+t \\ z=1 \end{cases}$

Ta chọn phương án **C.**

Câu 48.

Ta chọn phương án D. Vì có vô số mặt phẳng song song với đường thẳng *AB*.

Câu 49.

Phương trình mặt phẳng (*ABC*) là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ suy ra $d=d\left(O,\left(ABC\right)\right)=\frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$.

Ta có $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq \frac{9}{a^2+b^2+c^2}=3$.

Suy ra $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{3}$.

Do đó $d\left(O,\left(ABC\right)\right) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy d lớn nhất bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ta chọn phương án **C.**

Câu 50.

Ta chọn phương án **D**.

<u>Sai lầm thường gặp.</u> *Ta cần phân biệt mặt cầu và khối cầu, phân biệt nửa đường tròn và đường tròn.*