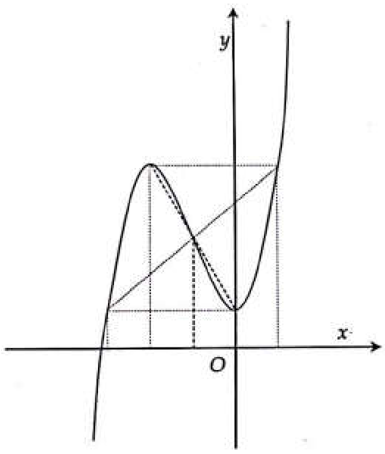
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1:

Phân tích : Bài toán này sẽ rất khó nếu cứ theo lối đường cũ. Tuy nhiên chỉ cần tinh ý một chút ta sẽ thấy ngay!

Đây là hàm bậc ba nên rõ rang điểm uốn là tâm đối xứng. miền đang xét là đối xứng thì hai diểm lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sẽ đối xứng với nhau qua điểm uốn. (Tham khảo hình vẽ).



Do đó, ta có:

$y = x^3 + 3x^2 + (m+2)x + m + 3$

$=> y' = 3x^2 + 6x + (m+2) => y'' = 6x + 6y''$ Dễ thấy:

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -1 => y = 3$

$(1-2m) + (2m-3) = -2 => \frac{y_{max} + y_{min}}{2} = \frac{2.3}{2} = 3$

Vậy đáp án đúng là B.

Nhận xét: Đôi khi bài toán chỉ cần chút tinh tế có thể khiến việc tính toán phức tạp thành đơn giản rất nhiều !!!

Câu 2:

Đáp án đúng là C.

Câu 3:

Ta có: $0 \le \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right|$

Mà $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{1}{x}\right| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$

=>Đường thẳng y = 0 là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Lưu ý: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ nên hàm số không có tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có duy nhất 1 tiệm cận ngang và là đường thẳng y=0

Đáp án đúng là B.

Câu 4:

Đồ thị của hai hàm số $y = 3x^3 - x^2 - x + 1$ và $y = x^3 + 3x - 2$ tiếp xúc với nhau khi:

$$\begin{cases} 3x^3 - x^2 - x + 1 = x^3 + 3x - 2 \\ (3x^3 - x^2 - x + 1)' = (x^3 + 3x - 2)' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - x^2 - 4x + 3 = 0 \\ 9x^2 - 2x - 1 = 3x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2(2x+3) = 0 \\ (x-1)(6x+4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy đồ thị của 2 hàm số tiếp xúc nhau tại điểm (1;2)

Đáp án đúng là B

Nhận xét: Bài toán này đòi hỏi ta cần phải nắm được điều kiện để 2 hàm số f(x) và g(x) tiếp xúc nhau đó là hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x)' = g(x)' \end{cases}$ có nghiệm.

Câu 5:

Do $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x+3}{x-1} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x+3}{x-1} = -\infty$

=>Trên đoạn [0;2] hàm số không có giá trị lớn nhất.

Đáp án đúng là D.

Sai lầm thường gặp: Rất nhiều bạn không để ý rằng trên đoạn [0;2] có điểm x=1 bị gián đoạn mà sẽ tính luôn đạo hàm và ra đạo hàm đồng biến nên miny=y(0)=-3 và maxy=y(2)=7.Từ đó chọn ngay đáp án A.

Câu 6:

TXĐ: $R \setminus \{-m\}$

Ta có:

$$y' = \frac{m(x+m) - (mx-2)}{(x+m)^2} = \frac{m^2+2}{(x+m)^2} > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-m\}$$

Vậy $\forall m \in \mathbb{R}$ thì hàm số y = $\frac{mx-2}{x+m}$ luôn đồng biến trên từng khoản xác định.

Vậy đáp án đúng là D.

Câu 7:

Đáp án đúng là C.

Câu 8: Ta có:

$$y' = \frac{(\log_3(\log_4 x))'}{\log_3(\log_4 x)\ln 2} = \frac{(\log_4 x)'}{\log_4 x.\log_3(\log_4 x)\ln 2.\ln 3} = \frac{1}{x.\log_4 x.\log_3(\log_4 x)\ln 2.\ln 3.\ln 4}$$

Đáp án đúng là B

Sai lầm thường gặp: Hàm số trong biểu thức logarit là khá cồng kềnh. Nếu không thuộc công thức đạo hàm của logarit cơ bản và tính toán cẩn thận sẽ rất nhiều bạn ra sai kết quả.

Câu 9:

Dễ thấy sẽ không là nghiệm của phương trình

Xét $f(x) = x^5 + 4x^3 - 2017$ trên (0;+∞)

$$f'(x) = 5x^4 + 12x^2 > 0 \forall x \in (0;+\infty)$$

=>f(x) đồng biến trên (0;+∞)

=>Phương trình f(x)=0 có tối đa 1 nghiệm trên (0;+∞)

Lại có $f(1) = -2012$ và f(5)=1608

$$\Rightarrow f(1).f(5) < 0$$

=> Phương trình f(x) = 0 có nghiệm trên (1;5) . Vậy nên phương trình $x^5 + 4x^3 - 2017 = 0$ có đúng một nghiệm. **Đáp án đúng là C**

Câu 10:

Giả sử $f(t) = \Delta S = (t^2 - 2t - 1).e^{-2t+3}$

$$f'(t) = (2t - 2).e^{-2t+3} - 2(t^2 - 2t - 1).e^{-2t+3}$$

$$f'(t) = (-2t^2 + 6t).e^{-2t+3}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -2t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 3 \end{array}\right.$$

Ta thấy max f(t) = f(3) = 0,10

Đáp án đúng là A

Câu 11:

Điều kiện : $\begin{cases} x+1>0 \\ 3-x>0 \\ \log_2(x+1)+\log_{1/2}(3-x)\ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<3 \\ \log_2(x+1)-\log_2(3-x)\ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<3 \\ \log_2\left(\dfrac{x+1}{3-x}\right)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<3 \\ \dfrac{x+1}{3-x}\ge 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<3 \\ x+1\ge 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<3 \\ x\ge 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 1\le x<3$

Vậy tập xác định của hàm số

f(x) = $\sqrt{\log_2(x+1)+\log_{1/2}(3-x)}$ là [1;3)

Đáp án đúng là A

Nhận xét: Ở bất phương trình $\log_2(x+1)+\log_{1/2}(3-x)\ge 0$ chúng ta nên đưa về logarit cơ số $\dfrac{1}{2}$ thì hàm số sẽ nghịch biến và nếu không để ý sẽ rất nhiều bạn bị nhầm kết quả sang đáp án C.

Câu 12:

Điều kiện: $\begin{cases} x+2\ne 0 \\ \dfrac{x^2-2x}{x+2}>0 \end{cases} (*)$

Ta có:

$\log_3\left(\dfrac{x^2-2x}{x+2}\right)=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x}{x+2}=3$

$\Rightarrow x^2-2x=3(x+2) \Leftrightarrow x^2-5x-6=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-6)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x-6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=6 \end{array}\right.$

Thử lại với điều kiện (*) ta thấy cả x=-1 và x=6 đều thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình là x= -1 và x = 6

Đáp án đúng là C

Nhận xét: Khi làm bài thi trắc nghiệm chúng ta không nên giải điều kiện xác định của phương trình như thế sẽ mất thời gian mà chúng ta nên giải nhanh ra nghiệm rồi dùng máy tính thử lại với điều kiện. Như vậy sẽ tiết kiệm được nhiều thời gian hơn.

Câu 13:

Điều kiện: $\begin{cases} x+1>0 \\ \log_{\frac{1}{2}}^2 x^{\sqrt{2}} + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 7 > 0 \end{cases}$

Ta có:

$$\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}^2 x^{\sqrt{2}} + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 7\right) = 2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}^2 x^{\sqrt{2}} + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 7 = 9$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(2\log_{\frac{1}{2}} x - 1\right)\left(\log_{\frac{1}{2}} x + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_{\frac{1}{2}} x - 1 = 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x = \dfrac{1}{2} \\ \log_{\frac{1}{2}} x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Kiểm tra lại điều kiện trên ta thấy $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ và x=4 đều thỏa mãn

Vậy $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ và x=4 là nghiệm phương trình. Tổng hai nghiệm là $4 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Đáp án đúng là B

Sai lầm thường gặp: Khi giả bài toán này nhiều bạn thường giải cả điều kiện xác định của phương trình. Điều đó không cần thiết và gây mất nhiều thời gian. Chúng ta nên giải ra nghiệm sau đó thử lại điều kiện sẽ nhanh hơn.

Câu 14:

Ta có:

$$y' = \frac{\frac{4x^3}{x^4+1}x^3 - 3x^2\ln(x^4+1)}{x^6} = \frac{4x^4 - 3\left(x^4+1\right)\ln(x^4+1)}{x^4\left(x^4+1\right)} = \frac{4}{x^4+1} - \frac{3\ln(x^4+1)}{x^4}$$

Đáp án đúng là D.

Sai lầm thường gặp: Bài toán này là đạo hàm của hàm hợp nếu bạn nào không nắm chắc công thức đạo hàm của các hàm cơ bản sẽ rất dễ dẫn đến tính toán hầm vì hàm số cũng khá cồng kềnh.

Câu 15:

Đồ thị hàm số y = $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ đi qua các điểm $(0,a)$; $(b;\frac{2}{3})$; $(c;\frac{3}{2})$ nên ta có

$$\begin{cases} a=\left(\frac{2}{3}\right)^0=1 \\ \frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^b \\ \frac{3}{2}=\left(\frac{2}{3}\right)^c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=1+1-1=1$$

Đáp án đúng là C.

Câu 16:

Ta thấy hàm số a^x đồng biến khi a>1

Mà dễ thấy $\frac{\pi}{3}>1$ và $\sqrt{9-2\sqrt{14}}=\sqrt{7}-\sqrt{2}>1$

=>Hàm số $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ và $y=\left(\sqrt{9-2\sqrt{14}}\right)^x$ đồng biến

Lại có $\left(y=\left(\frac{e}{3}\right)^{\sqrt{x^2+1}-x}\right)'=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)\ln\frac{e}{3}>0$

=>Loại các đáp án A,C,D

Đáp án đúng là B.

Nhận xét: Để làm nhanh được dạng baog này cần phải thuộc điều kiện đồng biến nghịch biến của các hàm số cơ bản.

Câu 17:

Hoành độ giao điểm của hàm số y =3^x và đường thẳng y = 2x +1 là nghiệm của phương trình:

$3^x = 2x + 1 \Leftrightarrow 3^x - 2x - 1 = 0$

Xét $f(x) = 3^x - 2x - 1 = 0$ trên R $f'(x) = 3^x\ln3-2$

Do phương trình f'(x) = 0 có 1 nghiệm là $x=\log_3\left(\frac{2}{\ln3}\right)$ nên phương trình f(x)=0 có tối đa 2 nghiệm.

Mà lại có f(0) = f(1) = 0 nên x=0 và x=1 là 2 nghiệm của phương trình f(x) = 0

Do đó đồ thị hàm số $y = 3^x$ cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại 2 điểm phân biệt

Đáp án đúng là B.

Nhân xét : Với những loại bài toán hỏi về số nghiệm của phương trình thì bổ đề sau được áp dụng rất hiệu quả đó là : Nếu phương trình f'(x) = 0 có nghiệm thì phương trình f(x) = sẽ có không quá n+1 nghiệm.

Câu 18:

Điều kiện: $\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \Leftrightarrow 0<x<1 \\ 2x>0 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{cases} \log_2(x-1) \le 1 \\ \log_3\left(x+1\right) + \log_{\frac{1}{3}}(2x) < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \le 2 \\ \log_3\left(x+1\right) - \log_3(2x) < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ \log_3\left(\dfrac{x+1}{2x}\right) < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ \dfrac{x+1}{2x} < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x+1 < 18x \end{cases} \begin{cases} x \le 3 \\ x > \dfrac{1}{17}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{17} < x \le 3$$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là S= $\left(\frac{1}{17};3\right]$

Đáp án đúng là A

Câu 19:

Ta có: $\log_9 175 = \log_9 5^2.7 = 2\log_9 5 + \log_9 7$

Lại có:

$$\log_7 3 = \frac{1}{\log_3 7} = \frac{1}{c} \Rightarrow \log_7 9 = 2\log_7 3 = \frac{2}{c}$$

$$\Rightarrow \log_9 7 = \frac{1}{\log_7 9} = \frac{c}{2}$$

$$\log_5 2 = \frac{\log_5 4}{2} = \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow \log_5 3 = \log_5 2.\log_2 3 = \frac{ab}{2}$$

$$\Rightarrow \log_5 9 = 2\log_5 3 = ab$$

$$\Rightarrow \log_9 5 = \frac{1}{ab}$$

Do đó : $\log_9 175 = 2\log_9 5 + \log_9 7 = \frac{2}{ab} + \frac{c}{2}$

Đáp án đúng là A

Nhận xét: Bài toán này đòi hỏi chúng ta phải thuộc các công thức biến đổi cơ bản của hàm logarit và cần phải biến đổi các biểu thức đó thật linh hoạt.

Câu 20:

Gọi x (mét) là chiều cao của cây tre. Sau 1 năm chiều cao của cây tre là:

$$x + 0{,}05x \;=\; x(1+0{,}05)(m)$$

Sau 2 năm chiều cao của cây tre là: $x(1+0{,}05) + x(1+0{,}05).0{,}05 = x(1+0{,}05)^2 (m)$

Sau 3 năm chiều cao của cây tre là: $x(1+0{,}05)^2 + x(1+0{,}05)^2 .0{,}05 = x(1+0{,}05)^3 (m)$

Do sau 3 năm chiều cao của cây tre là: $x(1+0{,}05)^3 = 3{,}7$

=> Sau 5 năm chiều cao của cây tre là: $x(1+0{,}05)^5 = 3{,}7(1+0{,}05)^5 = 4{,}08(m)$

Đáp án đúng là D

Nhận xét: Nếu không đọc kỹ đề bài đó là kết quả làm tròn đến chữ thập phân thứ hai thì rất nhiều bạn sẽ chọn ngay đáp án C.

Câu 21:

Dễ thấy các khẳng định 1 và 4 là sai. Bây giờ ta sẽ kiểm tra các khẳng định 2 và 3

Khẳng định 2: Thay f(x) = x và g(x) = $\frac{1}{x^2}$

Khi đó $\int f\left(x\right)g\left(x\right)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln\left|x\right| + c$

Và

$$\int f\left(x\right)g\left(x\right)dx = \int xdx\int \frac{1}{x^2}dx = \left(\frac{x^2}{2} + \alpha\right)\left(\frac{-1}{x} + \beta\right) = -\frac{x}{2} + \frac{\beta x^2}{2} - \frac{\alpha}{x} + \alpha\beta$$

Rõ ràng $-\frac{x}{2} + \frac{\beta x^2}{2} - \frac{\alpha}{x} + \alpha\beta \neq \ln\left|x\right| + c$ nên khẳng định 2 là sai.

Khẳng định 3: Giả sử F(x) là nguyên hàm của

$$f(x) \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int (f(x)\int f(x)dx)dx = \int f(x)F(x)dx = \int F(x)d\left(F(x)\right)$$

$$\Rightarrow F^2(x) - \int F(x)d(F(x)) + c = F^2(x) - \int f(x)F(x)dx + c$$

$$\Rightarrow 2\int (f(x)\int f(x)dx)dx = F^2(x) + c = \left(\int f(x)dx\right)^2 + c$$

$$\Rightarrow \int (f(x)\int f(x)dx)dx = \frac{1}{2}\left(\int f(x)dx\right)^2 + c$$

=>Khẳng định 3 đúng

Đáp án đúng là C

Nhận xét: Đây là một trong những câu khó đòi hỏi học sinh phải hiểu thật kỹ kiến thức về nguyên hàm của hàm số.

Câu 22:

Xét phương trình $3x^2 = mx$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{m}{3} \end{array}\right.$

Xét m>0 khi đó diện tích giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = 3x^2 \\ y = mx \end{cases}$ là:

$$S = \int_0^{\frac{m}{3}} \left|3x^2 - mx\right|dx = \int_0^{\frac{m}{3}} \left(mx - 3x^2\right)dx = \left.\left(\frac{mx^2}{2} - x^3\right)\right|_{\frac{m}{3}}^{0} = \frac{m^3}{54}$$

$$\Rightarrow S = 4 \Leftrightarrow \frac{m^3}{54} = 4 \Leftrightarrow m = 6$$

Xét m<0 khi đó diện tích giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} y = 3x^2 \\ y = mx \end{cases}$ là:

$$S = \int_{\frac{m}{3}}^{0} \left|3x^2 - mx\right| dx = \int_{0}^{\frac{m}{3}} \left(mx - 3x^2\right) dx = \left(\frac{mx^2}{2} - x^3\right)\Bigg|_{\frac{m}{3}}^{0} = -\frac{m^3}{54}$$

$$\Rightarrow S = 4 \Leftrightarrow \frac{-m^3}{54} = 4 \Leftrightarrow m = -6$$

Vậy $m = \pm 6$

Đáp án đúng là C.

Sai lầm thường gặp: Rất nhiều bạn không để ý sẽ chỉ xét 1 trường hợp m>0 hoặc m<0 nên sẽ bị thiếu nghiệm vè sẽ chọn đáp án A hoặc B.

Câu 23:

Học sinh đó sai ngay bước I. Sửa đúng phải là: $V = \pi \int_{1}^{4} \left(\frac{1}{y}\right)^2 dy$

Vậy đáp án đúng là B.

Câu 24:

Với F(x) = $A\sqrt{1-x^3} + \frac{B}{1+\sqrt{x}}$ thì

$$F'(x) = \frac{A.-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}} - \frac{B\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{-3A}{2}.\frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} + \frac{-B}{2}\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

Lại có:

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \frac{-3A}{2}.\frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} + \frac{-B}{2}.\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-3A}{2} = 1 \\ \frac{-B}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{-2}{3} \\ B = -2 \end{cases} \Rightarrow A + B = \frac{-8}{3}$$

Đáp án đúng là B

Câu 25: Ta có

$$\int_0^1 (mx+1)e^x dx = \int_0^1 (mx+1)dx(e^x) = (mx+1)e^x\Big|_0^1 - m\int_0^1 e^x d(mx+1) = (mx+1)e^x\Big|_0^1 - m\int_0^1 e^x dx$$

$$= \left[(mx+1)e^x\right]_0^1 - \left[me^x\right]_0^1 = (m+1)e - 1 - me + m = e + m - 1$$

Đáp án đúng là D.

Câu 26: Ta có

$$I = \int_1^4 \left(|f(x)+g(x)| + |f(x)-g(x)|\right)dx = \int_1^4 \left(|x^2+2x-3| + |-x^2+2x+3|\right)dx$$

Do $x^2+2x-3 \ge 0 \forall x \in [1;4]$

$-x^2+2x+3 \ge 0 \forall x \in [1;3]$

$-x^2+2x-3 < 0 \forall x \in [3;4]$

$$\Rightarrow I = \int_1^4 (x^2+2x-3)dx + \int_1^3 (-x^2+2x+3)dx + \int_3^4 (x^2-2x-3)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right)\Bigg|_1^4 + \left(\frac{-x^3}{3}+x^2+3x\right)\Bigg|_1^3 + \left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Bigg|_3^4 = 27 + \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{104}{3}$$

Đáp án đúng là D

Sai lầm thường gặp: Ở bài toán tích phân biểu thức trong dấu trị tuyệt đối này ta cần phải xét khoảng để biểu thức trong dấu trị tuyệt dối lớn hơn 0 hay nhỏ hơn – để phá dấu trị tuyết đối ra. Vì thế có rất nhiều bạn sai ở bước xét khoảng này nên sẽ dễ ra kết quả sai như các phương án A,B,C

Câu 27: Ta có

$$I = \int_{1/2}^{1} \frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \int_{1/2}^{1} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$\xrightarrow{t=x+\frac{1}{x}} I = \int_{5/2}^{2} \frac{du}{u^2-2} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2}+u}\right|\right)\Bigg|_2^{5/2}$$

$$I = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-5/2}{\sqrt{2}+5/2}.\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{6-\sqrt{2}}{6+\sqrt{2}}\right)$$

Đáp án đúng là câu A

Câu 28:

$$I=\int_{-2017}^{2017}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$$
$$=\int_{-2017}^{0}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx+\int_{0}^{2017}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$$
$$=\int_{2017}^{0}\ln\left((-x)+\sqrt{1+(-x)^2}\right)d(-x)+\int_{0}^{2017}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$$
$$=-\int_{-2017}^{0}\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)dx+\int_{0}^{2017}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$$
$$=\int_{0}^{2017}\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)dx+\int_{0}^{2017}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$$
$$=\int_{0}^{2017}\ln\left[\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]dx=0$$

Vậy đáp án đúng là B

Câu 29: Đặt z=a+bi; $\left(a;b\in\mathbb{R}\right)$

Ta có: $\left|z-2i\right|=\left|(1+i)z\right|$

$\Leftrightarrow\left|a+(b-2)i\right|=\left|(1+i)(a+bi)\right|$

$\Leftrightarrow\left|a+(b-2)i\right|=\left|a-b+(a+b)i\right|$

$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+(b-2)^2}=\sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-4ab+4=2a^2+2b^2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+4b=4$

$\Leftrightarrow a^2+(b+2)^2=8$

=>Tập biểu diễn các điểm M thỏa mãn đề bài là đường tròn tâm I(0;-2) bán kính $2\sqrt{2}$

Đáp án đúng là C

Sai lầm thường gặp: Nếu không để ý kỹ sẽ rất nhiều bạn bị nhầm lẫn giữa đáp án A và đáp án C

Câu 30: Đặt z=a+bi; $\left(a;b\in\mathbb{R}\right)$

Ta có: $\left(z-3i\right)\left(1+2i\right)+1\ =\ 3i$

$\Leftrightarrow\left(a+bi-3i\right)\left(1+2i\right)+1=3i\Leftrightarrow\left(a-2b+7\right)+\left(2a+b-3\right)i=3i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2b+7=0 \\ 2a+b-3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$$

Vậy $z=1+4i$

Đáp án đúng là C

Câu 31: Đặt z=a+bi; $\left(a;b\in\mathbb{R}\right)$

Ta có:

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{a-1+bi}{a+1+bi}=\frac{[a-1+bi][a+1-bi]}{(a+1)^2+b^2}$$

Do $\frac{z-1}{z+1}$ là số thực nên $\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}=0\Leftrightarrow b=0$

Đáp án đúng là B

Câu 32: Sử dụng công thức $\overline{a+b}=\overline{a}+\overline{b}$ ta thấy ngay các cặp ($x+\overline{y}+1;\overline{x}+y+1$)và liên hợp với nhau

Bây giờ ta sẽ kiểm tra đáp án B và D

Ta thấy nếu z_1 và z_2 là 2 số phức liên hợp thì $|z_1|=|z_2|$

Ta có: $\left|\frac{x}{\overline{y}+1}\right|=\frac{|x|}{|\overline{y}+i|};\left|\frac{\overline{x}}{y+1}\right|=\frac{|\overline{x}|}{|y+i|}=\frac{|x|}{|y+1|}$

Rõ ràng:

$$|\overline{y}+i|\neq|y+i|\Rightarrow\left|\frac{x}{\overline{y}+1}\right|\neq\left|\frac{\overline{x}}{y+i}\right|$$

$\Rightarrow\frac{x}{\overline{y}+i};\frac{\overline{x}}{y+i}$ Không liên hợp

Đáp án đúng là D

Nhận xét: Có nhiều cách để kiểm tra 2 số phức liên hợp. Tùy từng biểu thức khác nhau để làm cho hiệu quả. Ví dụ ở cặp $\overline{x}y;x\overline{y}$ ta hoàn toàn có thể đặt phần thực phần ảo của các số phức x, y sau đó nhân ra. Tuy nhiên nếu áp dụng cách này vào cặp $\frac{x}{\overline{y}+i};\frac{\overline{x}}{y+i}$ thì rất mất nhiều thời gian tính toán.

Câu 33: Ta có:

$$\left(|z|+1\right)\bar{z}=\frac{(2a+4b)(2b-4a)i}{(a+2b)+(b-2a)i}$$

$$\Rightarrow\left|\left(|z|+1\right)\bar{z}\right|=\left|\frac{(2a+4b)(2b-4a)i}{(a+2b)+(b-2a)i}\right|=\frac{|(2a+4b)(2b-4a)i|}{|(a+2b)+(b-2a)i|}$$

$$\Rightarrow\left||z|+1\right|\left|\bar{z}\right|=\frac{\sqrt{(2a+4b)^2+(2b-4a)^2}}{\sqrt{(a+2b)^2+(b-2a)^2}}$$

$$\Rightarrow\left(|z|+1\right)|z|=\frac{\sqrt{20a^2+20b^2}}{\sqrt{5a^2+5b^2}}=2$$

$$\Rightarrow\left(|z|\right)^2+|z|-2=0$$

$$\Rightarrow\left(|z|-1\right)\left(|z|+2\right)=0$$

$$\Rightarrow|z|-1=0\Leftrightarrow|z|=1$$

Đáp án đúng là B

Câu 34: Đặt z=a+bi; $(a;b\in\mathbb{R})$

Ta có $(2+3i)(z+2i-1)=(2i+1)z$

$$\Leftrightarrow(2+3i)\left[a-1+(b+2)i\right]=(2i+1)(a+bi)$$

$$\Leftrightarrow(2a-3b-7)+(3a+2b+1)i=a-2b+(2a+b)i$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a-3b-7=a-2b\\3a+2b+1=2a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=7\\a+b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-4\end{cases}$$

Vậy z=3-4i

Đáp án đúng là B

Câu 35: Đặt z=a+bi; $(a;b\in\mathbb{R})$

Ta có

Tập biểu diễn số phức z thõa mãn là hình tròn tâm I(0;2) bán kính (0;2) trừ đi phần trong của hình tròn tâm I(0;2) bán kính 1

Đáp án đúng là D

Sai lầm thường gặp: Nhiều bạn sẽ dễ bị nhầm giữa đáp án C và D

Câu 36: Ta có $z^4+z^2+1=0$

$$\Leftrightarrow (z^2+z+1)(z^2-z+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2+z+1=0 \\ z^2-z+1=0 \end{array}\right.$$

Xét phương trình: $z^2+z+1=0 \quad (1)$

Ta có $\Delta = 1-4=-3=3i^2$

=>Phương trình (1) có 2 nghiệm là: $z_1=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}; z_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

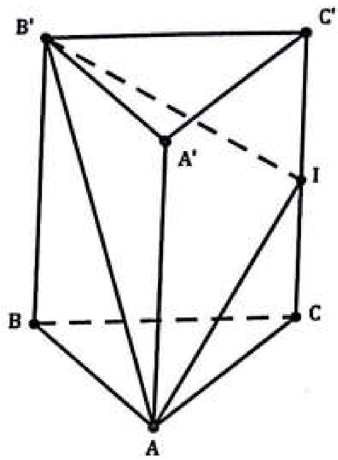
Xét phương trình $z^2-z+1=0$ (2)

=>Phương trình (2) có 2 nghiệm là: $z_3=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}; z_4=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm là: $z_1=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}; z_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}; z_3=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}; z_4=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

Đáp án đúng là A

Câu 37: Ta có: BC = $a\sqrt{3}$. Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ACI, ABB′, B′C′I:



Suy ra AI = $\frac{\sqrt{5}}{2}a$, AB′ = $\sqrt{2}a$, B′I = $\frac{\sqrt{13}}{2}a$

Do đó $AI^2 + AB'^2 = B'I^2$

Vậy tam giác AB′I vuông tại A

$$S_{AB'I}=\frac{1}{2}AI.AB'=\frac{\sqrt{10}}{4}a^2, S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB′I). Tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác AB′I.

Suy ra : $S_{AB'I}.\cos\alpha = S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{4}.\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos\alpha=\sqrt{\frac{3}{10}}$

Đáp án đúng là B

Câu 38: Giả sử: A,B $\in$(O) và C,D $\in$(O′)

Gọi H,K,J lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, CD, OO′

Vì $IO=\sqrt{7}\neq 4=IH$ nên $O\neq H$

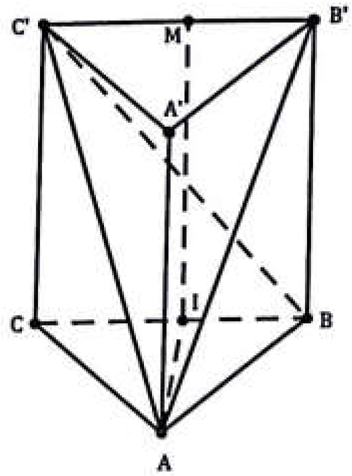
Theo tính chất của hình trụ ta có ngay: OIH và OHA là các tam giác vuông lần lượt tạo O và H.

Tam giác vuông OIH có : $OH = \sqrt{IH^2 - OI^2} = 3$

Tam giác vuông OHA có : $r = OA = \sqrt{OH^2 + HA^2} = 5$

Vậy thể tích hình trụ là: $V = B.h = \pi.r^2.h = \pi.5^2.2\sqrt{7} = 50\sqrt{7}$ (đvtt)

Vậy đáp án đúng là B



Câu 39: Từ A kẻ $AI \perp BC \Rightarrow I$ là trung điểm BC

$\Rightarrow AI \perp (BCC'B') \Rightarrow AI \perp B'C$ (1)

Từ I kẻ $IM \perp B'C$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow B'C \perp (IAM) \Rightarrow B'C \perp AM$ (3)

Từ (2), (3) => góc giữa (AB'C) và (B'CB) bằng góc giữa IM và AM=AMI=60^0(do tam giác AMI vuông tại I)

Ta có $AI = \frac{1}{2}BC = a; IM = \frac{AI}{\tan 60^0} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$$\Delta IMC \sim \Delta B'BC \Rightarrow \frac{IM}{BB'} = \frac{IC}{B'C} \Leftrightarrow BB' = \frac{IM.B'C}{IC}$$

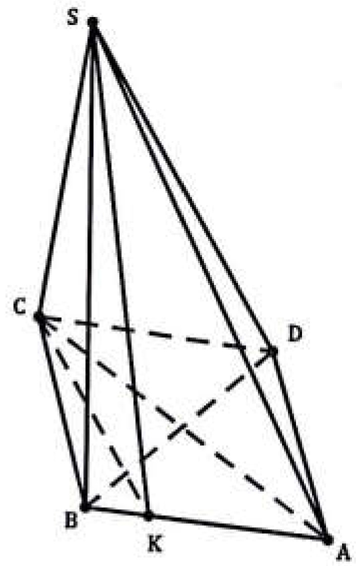
$$\Leftrightarrow BB' = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{a}.B'C = \frac{1}{\sqrt{3}}B'C \Leftrightarrow BB' = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{B'B^2 + 4a}$$

$$\Leftrightarrow 3B'B^2 = B'B^2 + 4a^2 \Leftrightarrow B'B = a\sqrt{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AI.BC = \frac{1}{2}a.2a = a^2$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = a\sqrt{2}.a = a^3\sqrt{2}$$

Vậy đáp án đúng là C



Câu 40: Kẻ $SK \perp AB$ thì:

$$CK \perp AB \Rightarrow \left((SAB);(ABCD)\right) = (SK;CK) = \angle SKC = 45^0$$

$$\angle ABC = 120^0 \Rightarrow \angle CBK = 60^0 \Rightarrow CB\sin 60^0 = \frac{3a}{2}$$

$$\Rightarrow SC = CK.\tan 45^0 = \frac{3a}{2}(1)$$

$$S_{\square ABCD} = AB.BC.\sin 120^0 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}(2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SC.S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$

Vậy đáp án đúng là D

Câu 41: Gọi H,I lần lượt là trung điểm AB và CD.

Do tam giác SAB cân tại S nên: $SH \perp AB$ mà $(SAB) \perp (ABCD)$ do đó:

$$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD, IH \perp CD$$

Do đó: $CD \perp (SHI)$, kẻ $HK \perp SI, CD \perp HK$

Do đó ta có: $HK \perp (SCD) \Rightarrow HK = d(h,(SCD)) = d(AB,(SCD)) = a$

$$CD \perp (SHI) \Rightarrow \begin{cases} IH \perp CD \\ SI \perp CD \\ CD = (SCD) \cap (ABCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left((SCD),(ABCD)\right) = \left(HI, SI\right) = SHI = 60^0$$

Trong tam giác HKI có $HI = \frac{HK}{\sin 60^0} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = BC$

Trong tam giác HIS có $SH = HI.\tan 60^0 = 2a$

Diện tích ABCD là: $S_{ABCD} = BC^2 = \frac{4a^2}{3}$

Thể tích của S.ABCD là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{8a^3}{9}$

Vậy đáp án đúng là A

Câu 42: Do SAB vuông cân tại S có SI là trung tuyến nên $SI \perp AB$:

$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\ AB=(SAB)\cap(ABC)\Rightarrow SI\perp(ABC)\\ AB\perp SI\subset(SAB)\end{cases}$$

Gọi K là trung điểm đoạn AC thì IK||BC nên $IK\perp AB$

Ta còn có, $AC\perp SI$ do đó $AC\perp SK$

Suy ra, góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) là SKI=60^0

Ta có $SI=IK.\tan SKI=\frac{1}{2}.BC.\tan 60^0=a\sqrt{3}$

Và $AB=2SI=2a\sqrt{3}\Rightarrow AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=2a\sqrt{2}$

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.SI=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AC.BC.SI$$
$$=\frac{1}{6}.2a.\sqrt{2}.2a.a\sqrt{3}=\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$$

Vậy đáp án đúng là C

Câu 43: Gọi giao điểm của AC và BD là O thì: $SO\perp(ABCD)\Rightarrow\angle SAO=\varphi$

Gọi trung điểm của AB là M thì: $\begin{cases}OM\perp AB\\ SM\perp AB\end{cases}\Rightarrow\angle\left((SAB),(ABCD)\right)=\angle SMO$

Tam giác OAB vuông cân tại O nên: $OM=\frac{a}{2};AO=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow SO=\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi$

Do đó: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.SO=\frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\tan\varphi=\frac{\sqrt{2}}{6}.a^3.\tan\varphi$

Vậy đáp án đúng là C

Câu 44:

Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 có dạng:

$$\alpha\left(x-2y+z-4\right)+\beta\left(x+2y-2z+4\right)=0\left(\alpha^2+\beta^2\neq0\right)$$
$$a\left(x-2y+z-4\right)+b\left(x+2y-2z+4\right)=0\left(a^2+b^2\neq0\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(a+b\right)x-\left(2a-2b\right)y+\left(a-2b\right)z-4a+4b=0$$

Vậy $\overrightarrow{n_p} = (a+b;-2a+2b;a-2b)$ Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{u_2} = (1;1;2) \parallel \Delta_1 \\ M_2(1;2;1) \in \Delta_2 \end{cases}$

$(P) \parallel \Delta_2 \begin{cases} \overrightarrow{n_p}.\overrightarrow{u_2} = 0 \\ M_2(1;2;1) \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ M_2 \notin (P) \end{cases}$

Vậy (P): $2x - z = 0$

Vậy đáp án đúng là A

Câu 45: Ta có cặp vecto pháp tuyến của hai mặt phẳng xác định d_k là: $\begin{cases} \overrightarrow{n_1} = (1;3k;-1) \\ \overrightarrow{n_2} = (k;-1;1) \end{cases}$

Vecto pháp tuyến của (P) là: $\vec{n} = (1;-1;-2)$

Đường thẳng d_k có vecto chỉ phương là: $\vec{u} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = (3k-1;-k-1;-1-3k^2) \neq \vec{0} \forall k$

Nên ta có: $d_k \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \dfrac{3k-1}{1} = \dfrac{-k-1}{-1} = \dfrac{-1-3k^2}{-2} \Leftrightarrow k = 1$

Vậy giá trị k cần tìm là k=1. Vậy đáp án đúng là B.

Câu 46: Vì $A \in d \Leftrightarrow A(1-t;-3+2t;3+t)$

Lại có:

$$A \in (P) \Leftrightarrow 2(1-t) + (-3+2t) - 2(3+t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

VậyA(0;-1;4)

Mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\vec{n} = (2;1;-2)$

Đường thẳng d có vecto chỉ phương $\vec{u} = (-1;2;1)$

Vì $\begin{cases} \Delta \subset (P) \\ \Delta \perp d \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = [\vec{n}, \vec{u_d}] = (5;0;5)$

Phương trình tham số của $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 4 + t \end{cases}$

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 47: Đường thẳng d có vecto chỉ phương $\vec{u} = (2;-1;4)$

$B \in d \Leftrightarrow B(-3+2t;1-t;-1+4t) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1+2t;3-t;-5+4t)$

$AB \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(1+2t)-(3-t)+4(-5+4t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (3;2;-1) \Rightarrow (\Delta): \dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-4}{-1}$

Vậy đáp án đúng là B

Câu 48:

Xét ba điểm A;B;S lần lượt nằm trên ba đường thẳng $d_1;d_2;d_3$. Ta có:

$A(t;\ 4-t;\ -1+2t);\ B(u;\ 2-3u;\ -3u\ );\ C(-1+5v;\ 1+2v;\ -1+v)$

A,B,C thẳng hàng và AB=BC$\Leftrightarrow$ B là trung điểm của AC: $\Leftrightarrow \begin{cases} t+(-1+5v) = 2u \\ 4-t+(1+2v) = 2.(2-3u) \\ -1+2t+(-1+v) = 2(-3u) \end{cases}$

Giả hệ trên ta được: $t = 1;\ u = 0;\ v = 0$

Suy ra $A(1;3;1);\ B(0;2;0);\ C(-1;1;-1)$

Đường thẳng Δ đi qua A;B;C có phương trình: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$

Vậy đáp án đúng là C.

Câu 49:

I(x;y;z) là tâm mặt cầu cần tìm $\Leftrightarrow \begin{cases} I \in (P) \\ IA = IB = IC \end{cases}$

Ta có:

$IA^2 = (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2$
$IB^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2$
$IC^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$

Suy ra hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z-2 = 0 \\ IA^2 = IB^2 \\ IB^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 2 \\ x+y = 2 \\ y+z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1; z = 0$

R=IA=1$\Rightarrow$ Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$

Vậy đáp án là A

Câu 50:

+ Tọa độ giao điểm A của (d) và (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-1} = 2 \\ x + 2y - 2z + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A(-4;1;-1)$$

+ Đường thẳng (d) có vecto chỉ phương $\vec{u} = (1;3;-1)$

+ Mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\vec{n} = (1;2;-2)$

+ Mặt phẳng (Q) qua A có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q = \left[\vec{u};\vec{n}\right] = (-4;1;-1)$

+ Mặt phẳng (Q) qua A có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q = (-4;1;-1)$ là:

$(Q): 4x - y + z = 0$

Vậy đáp án đúng là A.