Câu 1: Đáp án B.

Phân tích: Vì đây là bài toán xét tính đúng sai của mệnh đề nên ta cần đi xem xét từng mệnh đề một. Vì đây là bài toán về cực trị nên trước tiên ta đi tìm đạo hàm của hàm số sau đó xét phương trình $y'=0$ để tìm kết luận cho bài toán.

$y'=x^2+2mx+2m-1$.

Xét phương trình $y'=0$, ta cùng nhớ lại bảng các dạng đồ thị của hàm số bậc ba mà tôi vẫn thường nhắc các bạn ở trang 35 sách giáo khoa cơ bản. Nhận thấy ở tất cả các mệnh đề đều nói là hàm số có cực trị, nghĩa là trước tiên ta cần đi tìm điều kiện để hàm số có cực trị là điều kiện chung. Như ở bảng trang 35 SGK giải tích thì để đồ thị hàm số có cực thì phương trình $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt.

Khi đó: $\Delta'>0 \Leftrightarrow m^2-2m+1>0 \Leftrightarrow m\neq 1$. Từ đây ta thấy mệnh đề C đúng, cả A và D cũng đúng. Vậy mệnh đề sai là B. Nhiều quý độc giả lúc thấy $(m-1)^2$ luôn lớn hơn bằng 0 thì cho rằng với mọi m phương trình luôn có nghiệm là sai. Vậy nên hãy để ý thật kĩ và tránh mắc sai lầm.

Câu 2: Đáp án C

Phân tích: Ở bài toán này có hai điều kiện để hàm số xác định: Điều kiện thứ nhất là điều kiện để căn có nghĩa, điều kiện thứ hai là điều kiện để phân thức có nghĩa, do vậy ta có lời giải như sau:

$$\begin{cases} 2x+1\geq 0 \\ 3-x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\dfrac{1}{2} \\ x\neq 3 \end{cases}$$

Vậy ta chọn luôn đáp án C.

Câu 3: Đáp án D.

Phân tích: Đây là dạng bài tìm tiệm cận, ta cùng nhớ lại kiến thức sách giáo khoa như sau:

Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty;\ \lim_{x\to x_0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty;\ \lim_{x\to x_0^-}=+\infty$$

Vậy để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+2mx+3m+4}$ chỉ có đúng một tiệm cận đứng thì phải thỏa mãn một trong các điều kiện trên. Nhận thấy đây là hàm phân thức có bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu, khi đó tiệm cận đứng $x=x_0, x_0$ là giá trị làm cho đa thức dưới mẫu không xác định, do đó để đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận đứng thì phương trình $x^2+2mx+3m+4=0$ có duy nhất một nghiệm, hoặc phương trình $x^2+2mx+3m+4=0$ có một nghiệm $x=-1$ và một nghiệm khác -1.

TH1: phương trình có duy nhất một nghiệm khi và chỉ khi phương trình có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta'=0 \Leftrightarrow m^2-3m-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-1 \end{array}\right.$$

TH2: phương trình có một nghiệm bằng -1 một nghiệm khác -1, khi đó ta có

$$(-1)^2+2.(-1).m+3m+4=0$$

$$\Leftrightarrow m+5=0 \Leftrightarrow m=-5$$

Thử lại thấy với $m=-5$ phương trình có hai nghiệm phân biệt (thỏa mãn).

Vậy đáp án của chúng ta là D.

Phân tích sai lầm: ở đây nhiều quý độc giả quên TH2 và thiếu TH $m=-5$ và chọn đáp án. Hãy

xem xét một cách tổng quan để có đầy đủ các TH của bài toán.

Câu 4: Đáp án A.

Phân tích: Nhận thấy đây là đồ thị hàm số bậc ba có hai điểm cực trị, lại tiếp tục là một bài toán nữa cần quý độc giả nhớ lại các dạng đồ thị của hàm số bậc ba trang 35 sách giáo khoa giải tích 12 cơ bản. Do đồ thị hàm số có thể tịnh tiến theo chiều song song với trục Oy nhưng chiều theo trục Ox thì cố định nên đồ thị trên có hai điểm cực trị trong đó điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm về hai phía của trục Oy. Nhìn dạng đồ thị và so sánh với bảng thì ta nhận thấy, để thỏa mãn điều kiện như đồ thị trên ta có:

Để phương trình hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài thì phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt và hai nghiệm đó trái dấu và $a>0$

Xét phương trình $y=3ax^2+2bx+c=0$

$$\begin{cases} a>0 \\ \Delta'>0 \\ x_1x_2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b^2-3ac>0 \\ \dfrac{c}{3a}<0 \end{cases}$$ (do a, c trái dấu nên b^2-3ac luôn lớn hơn 0)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ c<0 \end{cases}$$

Câu 5: Đáp án D

Phân tích: Với bài toán này, đọc các mệnh đề ta thấy nói về giao điểm, vì thế, ta xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số

$$-x^3-x+1=-x+m^2$$

$$\Leftrightarrow x^3+m^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\left(1-m^2\right)}$$

Vậy phương trình hoành độ giao điểm luôn có duy nhất một nghiệm, vậy đáp án đúng của ta là

D.

Phân tích sai lầm: Nhiều bạn không để ý đây là căn bậc ba là bậc lẻ, do đó bị rối ở phần này, và

có thể chọn đáp án C là sai.

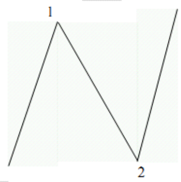
Câu 6: Đáp án B.

Phân tích: Xét phương trình

$$y'=0 \Leftrightarrow 6x^2-18x+12=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Nhận xét: Như ở đề số 5, tôi đã gợi ý một mẹo cho quý độc giả đó là: dạng của đồ thị. Do đây là đồ thị hàm bậc ba và có $a=2>0$, có hai điểm cực trị nên đồ thị hàm số sẽ có dạng chữ N (đây chỉ là mẹo quy ước) như sau:



Nhìn vào cách chúng ta vẽ nhanh nháp như vậy, ta nhận thấy rõ hàm số nghịch biến trên $(1;2)$ do đồ thị đi xuống.

Nếu quý độc rả vạch hình chữ N ra nháp sẽ rất nhanh hơn so với việc quý đọc giả vẽ BBT, xét dấu $f'(x)$.

Do vậy, việc nhớ bảng dạng đồ thị trong sách giáo khoa mà tôi hay nhắc đến sẽ có ích rất nhiều cho quý độc giả trong quá trình làm bài.

Câu 7: Đáp án A.

Phân tích: Đây là hàm số bậc ba, vậy để tìm được số điểm cực trị của đồ thị hàm số ta chỉ cần xét số nghiệm của phương trình $y'=0$

Ta có $y'=0 \Leftrightarrow -3x^2+12x-13=0\,(VN)$. Vậy đồ thị hàm số không có điểm cực trị.

Câu 8: Đáp án A

Phân tích: Trước tiên ta đi tìm tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số, từ đó tìm được trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị, thế vào phương trình đường thẳng đã cho, từ đó ta dễ

dàng tìm ra m.

Xét phương trình

$$\left(x^3-6x^2+9x\right)'=3x^2-12x+9=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow A(1;4) \\ x=3\Rightarrow B(3;0) \end{array}\right.$. Khi đó tọa độ trung điểm của AB là $M(2;2)$

Thế vào phương trình đường thẳng $y=x+m$ ta được $m=0$

Đáp án A.

Câu 9: Đáp án A.

Phân tích: Bài toán tìm Min- Max của hàm số trên một đoạn là bài toán lấy điểm, ta chỉ cần xét các điểm có hoành độ làm cho $y'=0$ cùng các điểm đầu mút, so sánh các giá trị của y và tìm Min Max, điều quan trọng là quý độc giả cần cẩn thận trong tính toán.

Xét phương trình $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Khi đó ta có

$$\max_{[-1;4]} y=\max\left\{y(-1);y(1);y(4)\right\}=y(4)=51$$

$$\min_{[-1;4]} y=\min\left\{y(-1);y(1);y(4)\right\}=y(1)=-3$$

Cách tìm các giá trị lớn nhất nhỏ nhất trong các giá trị ở trong tập hợp nhanh nhất, ta chỉ cần nhập biểu thức X^3-X-1 vào máy tính và ấn **CALC** rồi lần lượt thay các giá trị của X rồi tự so sánh là được.

Câu 10: Đáp án A

Phân tích: Ta cùng nhắc lại kiến thức về tiệm cận ngang như sau:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn. Đường thẳng $y=y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0$$

Lúc này ta xét

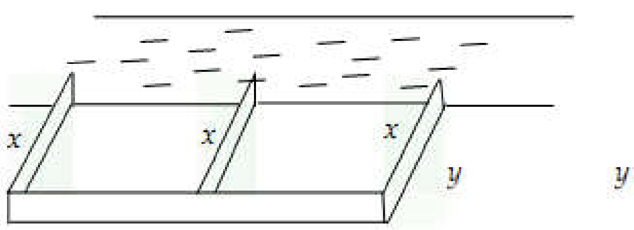
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{\sqrt{m}}$$

Lúc này ta thấy để đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang thì không tồn tại thì $\frac{1}{\sqrt{m}};-\frac{1}{\sqrt{m}}$ không xác định $\Leftrightarrow m\le 0$. Đáp án A.

Câu 11: Đáp án A.

Phân tích ta đặt các kích thước của hàng rào như hình vẽ



Từ đề bài ban đầu ta có được mối quan hệ sau:

Do bác nông dân trả 15 000 000 đồng để chi trả cho nguyên vật liệu và đã biết giá thành từng mặt nên ta có mối quan hệ:

$$3x.50000+2y.60000=15000000$$

$$\Leftrightarrow 15x+12y=1500$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{150-15x}{12}=\frac{500-5x}{4}$$

Diện tích của khu vườn sau khi đã rào được tính bằng công thức:

$$f\left(x\right)=2.x.y=2x.\frac{500-5x}{4}=\frac{1}{2}\left(-5x^2+500x\right)$$

Đến đây ta có hai cách để tìm giá trị lớn nhất của diện tích:

Cách 1: Xét hàm số trên một khoảng, vẽ BBT và kết luận GTLN:

Xét hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(-5x^2+500x\right)$ trên $\left(0;100\right)$

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(-10x+500\right), f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=50$$

Ta có BBT

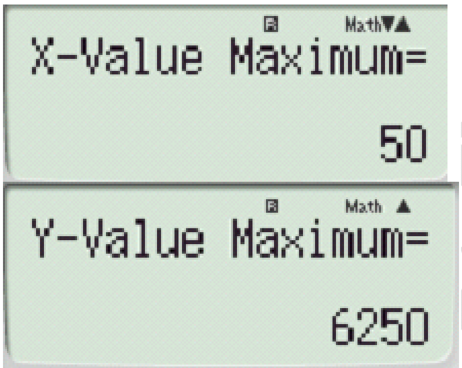
x	0		50		100
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	6250	↘	

Cách 2: Nhẩm nhanh như sau: Ta biết rằng $A-g^2\left(x\right)\le A$ với mọi x, nên ta có thể nhẩm nhanh được:

$$f\left(x\right)=\frac{5}{2}\left(-x^2+100x\right)=\frac{5}{2}\left(-x^2+2.50.x-2500+2500\right)$$

$$=\frac{5}{2}.\left[2500-\left(x-5\right)^2\right]\le 6250$$

Hoặc bấm máy tính phần giải phương trình bậc hai và ấn bằng nhiều lần máy sẽ hiện như sau:



Vậy ta đã có kết quả của bài toán.

Câu 12: Đáp án D.

Phân tích: Đây là bài toán giải bất phương trình mũ

$$32.4^x-18.2^x+1<0$$

$$\Leftrightarrow 32.2^{2x}-18.2^x+1<0$$

$$\Leftrightarrow \left(2.2^x-1\right)\left(16.2^x-1\right)<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16}<2^x<\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2^{-4}<2^x<2^{-1}$$

$$\Leftrightarrow -4<x<-1$$

Đáp án D. Tuy nhiên đến đây nhiều bạn nhầm rằng số mũ < 0 thì đổi chiều bất đẳng thức và

chọn ý A là sai. Hãy nhớ rằng ta cần xét cơ số để tìm dấu của bất phương trình.

Ta nhắc lại các kiến thức sau:

Với $0<a<1$ thì $a^x<a^y \Leftrightarrow x>y$ và ngược lại.

Với $a>1$ thì $a^x<a^y \Leftrightarrow x<y$ và ngược lại

Câu 13: Đáp án D.

Phân tích: Tương tự như bài toán giải bất phương trình phía trên, ta có:

$$pt \Leftrightarrow 2^{2x^2} - 2.2^{x^2} + 6 = m$$

Đặt $2^{2x^2} = a$. Nhận thấy để phương trình có đúng ba nghiệm thì phương trình có một nghiệm $x^2 = 0$, một nghiệm $x^2 > 0$

Tức là một nghiệm $a = 1$ và một nghiệm $a > 2$

Khi đó $1 - 4.1 + 6 = m \Leftrightarrow m = 3$

Với $m = 3$ thì phương trình

$$\Leftrightarrow 2^{2x^2} - 4.2^{x^2} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{2x^2} - 1\right)\left(2^{x^2} - 3\right) = 0\,(TM)$$

Câu 14: Đáp án C.

Phân tích: Ta có để hàm số xác định thì cần hai điều kiện: Điều kiện thứ nhất là điều kiện để

logarit xác định, điều kiện thứ hai là điều kiện để căn thức xác định.

Nên ta có: $\begin{cases} \dfrac{3-2x-x^2}{x+1} > 0 \\ \log_2 \dfrac{3-2x-x^2}{x+1} \ge 0 \\ x \ne -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-3) \cup (-1;1) \\ \log_2 \dfrac{3-2x-x^2}{x+1} \ge \log_2 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-3) \cup (-1;1) \\ \dfrac{3-2x-x^2}{x+1} \ge 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-3) \cup (-1;1) \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left(-1; \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left(-1; \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right]$$

Câu 15: Đáp án A.

Phân tích: Ta có thể nhận thấy luôn đáp án A đúng, đáp án B và C sai do thiếu điều kiện của cơ số a nên so sánh như vậy là sai. Còn đáp án D, rõ ràng A đúng không sai, do vậy đáp án D cũng sai.

Câu 16: Đáp án C.

Phân tích: Ta có $a = \log_{15} 3$. Do vậy ta cần biến đổi $\log_{25} 15$ về $\log_{15} 3$

Ta có $\log_{25} 15 = \dfrac{\log_{15} 15}{\log_{15} 25} = \dfrac{1}{\log_{15} 25}$

$$= \frac{1}{\log_{15} 5^2} = \frac{1}{2(\log_{15} 5)} = \frac{1}{2(\log_{15} 15 - \log_{15} 3)}$$

$= \dfrac{1}{2(1-a)}$. Đáp án C.

Một cách khác nếu quý độc giả nhẩm chậm, quý độc giả có thể bấm máy tính để thử đáp án. Trong lúc làm bài thi, hãy tìm phương án làm bài tối ưu thời gian nhất nhé!

Câu 17: Đáp án A.

Phân tích: Ta xét đạo hàm của hàm số:

$f'(x) = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)$. Ta áp dụng công thức đạo hàm như sau:

$$\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Khi đó

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)'=\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)-\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)}{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}$$

$$=\frac{-2e^x.e^{-x}-2e^x.e^{-x}}{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}=\frac{-4}{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}$$

Câu 18: Đáp án A.

Phân tích: Để so sánh được hai số, ta cần xét xem cơ số $a=\sqrt{3}-1$ nằm trong khoảng nào?

Ta có thể thấy $\sqrt{3}<\sqrt{4}\Leftrightarrow\sqrt{3}-1<1$
$\Rightarrow 0<\sqrt{3}-1<1$

Hoặc ta có thể bấm máy tính để xét khoảng của a. Như ở câu 12 của đề này, tôi đã nhắc lại kiến thức, ta có thể suy ra được $m>n$.

Câu 19: Đáp án A.

Phân tích: Đây là bài toán gỡ điểm, do đó, ta cần cẩn thận trong từng chi tiết.

$$f'(x)=\left(\sin 2x.\ln^2(1-x)\right)$$

$$=(\sin 2x)'.\ln^2(1-x)+\sin 2x.\left(\ln^2(1-x)\right)$$

(áp dụng công thức $(u.v)'=u'v+v'u$)

$$=2\cos 2x.\ln^2(1-x)+\sin 2x.2.\left(\ln(1-x)\right)'.\ln(1-x)$$

$$=2\cos 2x.\ln^2(1-x)+2\sin 2x.\frac{-1}{1-x}.\ln(1-x)$$

(chú ý rằng $\left(u^2\right)'=2u'.u$)

$$=2\cos 2x.\ln^2(1-x)-\frac{2\sin 2x.\ln(1-x)}{1-x}$$

Phân tích sai lầm:

1. Nhiều quý độc giả nhầm công thức đạo hàm của một tích như sau: $(u.v)'=u'.v-u.v'$

2. Nhiều quý độc giả quên công thức đạo hàm hàm hợp $\left(u^2\right)'=2.u'.u$ dẫn đến sai lầm như sau:

$\ln^2(1-x)=2.\ln(1-x)$ chọn luôn phương án D.

Sai lầm tiếp theo đó là có nhớ công thức $\left(u^2\right)'=2.u'.u$ nhưng lại sai trong biến đổi như sau:

$$\left(\ln^2(1-x)\right)'=2.\left(\ln(1-x)\right)'.\ln(1-x)$$

$=2.\frac{1}{1-x}.\ln(1-x)$ (sai do $\left(\ln(1-x)\right)'=\frac{-1}{1-x}$) vì thế chọn luôn phương án B.

Nhận thấy rõ ràng chỉ là một bài toán đạo hàm nhưng có thể bị sai ở rất nhiều chỗ, hãy cẩn thận trong tính toán và đạt được kết quả đúng đắn!

Một cách khác là quý độc giả có thể dùng máy tính, sử dụng nút SHIFT $\rightarrow\frac{d}{dx}$ để thử từng đáp án bằng cách thay giá trị bất kì.

Câu 20: Đáp án C.

Phân tích: Bài toán tìm tính đúng sai, do đó ta cần đi xét từng mệnh đề một.

Với mệnh đề A: Ta thấy trong khoảng $(0;1)$ cả hai hàm số đều nghịch biến. Do vậy phương án A đúng.

Với mệnh đề B: Đây là một ví dụ trong sách giáo khoa Giải tích 12 cơ bản trang 76/77. Từ đó đã có nhận xét. Vì thế đây là mệnh đề đúng.

Với mệnh đề C: Với $a>0;a\neq 1$ thì tập giá trị của hàm số $y=\log_a x$ là $Y=(-\infty;+\infty)$. Còn hàm số $y=a^x$ thì tập giá trị là $Y=(0;+\infty)$. Vậy đây là mệnh đề sai. Ta không cần phải xét đến mệnh đề D nữa.

Câu 21: Đáp án A.

Phân tích: Đây là bài toán đơn giản sử dụng ứng dụng của số mũ.

Do ban đầu có một tế bào duy nhất nên:

Sau phút sao chép thứ nhất số tế bào là: $N_1 = 2$

Sau phút sao chép thứ hai số tế bào là: $N_2 = 2^2$

...

Sau phút sao chép thứ t số tế bào là:
$N_t = 2^t = 100000$

$\Rightarrow t = \log_2 100000 \approx 16,61$ phút.

Câu 22: Đáp án C.

Phân tích: Thực chất đây là bài toán tìm nguyên hàm. Ta có thể dễ dàng nhận thấy: bài toán cho

đạo hàm của một hàm số, công việc của chúng ta là đi tìm nguyên hàm:

$$\int 90(t+6)\sqrt{t^2+12tdt} = 45\int \sqrt{t^2+12td\left(t^2+12t\right)}$$

$$= 45\int \left(t^2+12t\right)^{\frac{1}{2}} d\left(t^2+2t\right)$$

$$= 45.\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\left(t^2+12t\right)^{1+\frac{1}{2}}$$

$$= 30.\sqrt{\left(t^2+12t\right)^3}$$

Vì đến năm thứ tư công ty đã chịu 1610640 tiền nợ nần nên số tiền mà công ty vay năm đầu sẽ được tính

$$1610640 - 30\sqrt{\left(4^2+12.4\right)^3} = 1595280$$

Vậy công thức tính tiền nợ nần sẽ như sau:

$$D(t) = 30\sqrt{\left(t^2+12t\right)^3} + 1595280$$

Phân tích sai lầm: Nhiều quý độc giả khi tìm ra được nguyên hàm của hàm số sẽ cộng thêm C luôn như bài toán tìm nguyên hàm bình thường. Tuy nhiên ở đây khoản nợ vay ban đầu đã cố

định, tức là hằng số C đã cố định. Ta cần tìm hằng số để cộng thêm vào công thức.

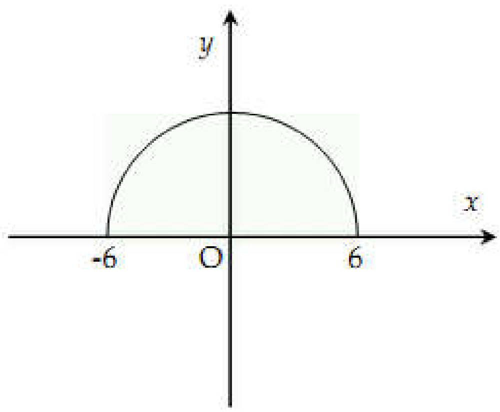
Sai lầm thứ hai: Nhiều quý độc giả cộng luôn với 1610640 luôn nên dẫn đến sai lầm.

Sai lầm thứ ba: Không nhớ công thức $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Câu 23: Đáp án A.

Phân tích: Đầu tiên khi đọc đề bài chắc hẳn quý độc giả sẽ thấy đề bài có vẻ thiếu dữ kiện về các phương trình giới hạn. Tuy nhiên nếu nhìn kĩ ta ta sẽ nhận ra phương trình $y = \sqrt{36-x^2} \Leftrightarrow y^2 + x^2 = 36$.

Đây là đồ thị phương trình đường tròn có tâm $O(0;0)$ bán kính bằng 6. Khi đó khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số với trục hoành quanh trục hoành chính là khối cầu tâm $O(0;0)$ bán kính bằng 6.



Thể tích khối cầu sẽ được tính bằng công thức

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}.\pi.6^3 = 288\pi$$

Câu 24: Đáp án A

Phân tích: Đây là dạng tính tích phân từng phần, tuy nhiên có hai cách làm dạng bài này, cách làm thứ nhất là tính bình thường. Cách làm thứ hai là bấm máy tính và thử (cách làm này khá đơn giản, quý độc giả chỉ cần ấn máy tính và xem nó là kết quả nào và chọn, rất đơn giản nên tôi xin phép không giới thiệu ở đây nữa.)

Sau đây tôi xin giới thiệu cách làm theo toán học thông thường:

$I=\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$ Đặt $\begin{cases} \ln x = u \to du = \frac{1}{x}dx \\ \frac{dx}{x^2} = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

Khi đó $I = -\frac{1}{x}.\ln x\Big|_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x}.\frac{1}{x}dx$

$$=\left(-\frac{1}{e}.\ln e\right)-\left(-\frac{1}{1}.\ln 1\right)+\int_1^e \frac{1}{x^2}dx$$

$$=\frac{-1}{e}+\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^e = \frac{-1}{e}-\frac{1}{e}+\frac{1}{1}=1-\frac{2}{e}$$

Câu 25: Đáp án A

Phân tích: Tương tự như bài 22, chúng ta sẽ đi tìm nguyên hàm và thay vào công thức:

Nhận thấy: $\int\left(12x^5+3x^2+2x+12\right)dx$

$$=\frac{12}{5+1}x^6+3.\frac{1}{2+1}x^3+2.\frac{1}{1+1}x^2+12x+C$$

$=2x^6+x^3+x^2+12x+C$. Nhận thấy đây là "Tốc độ thay đổi doanh thu (bằng đô la trên một máy tính) cho việc bán x máy tính" nên C = 0. Do vậy ta chỉ cần thay x = 12 vào sẽ được:

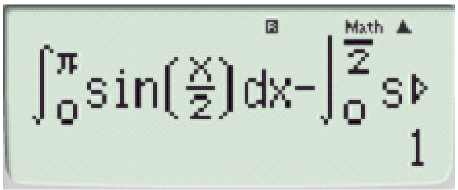
$$f(12)=2.12^6+12^3+12.12=5973984$$

Câu 26: Đáp án C.

Phân tích: Đây là bài toán tìm khẳng định sai, do vậy, ta cần xem xét từng phương án một.

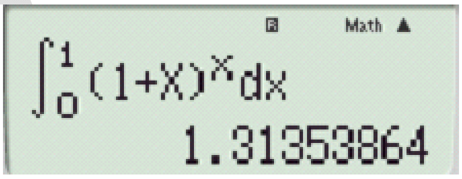
* Với phương án $\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$

Cách làm của chúng ta nếu không tự nhận ra được bằng suy luận thì quý độc giả có thể lấy hiệu của hai tích phân này bằng máy tính như sau:



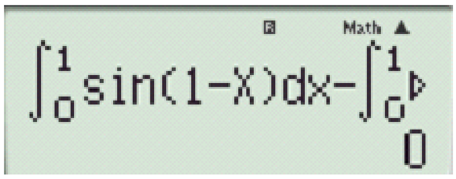
Vậy đây là mệnh đề sai.

* Với phương án B: Tiếp tục đây là một tích phân khá phức tạp, nên việc suy luận sẽ tốn thời gian hơn nhiều so với bấm máy tính, vì vậy ta bấm máy tính như sau:



Vậy đây cũng là mệnh đề sai.

* Với phương án C: Tiếp tục ta lại bấm máy tính, xét hiệu hai tích phân, nếu như không bằng 0 có nghĩa hai tích phân không bằng nhau:



Vậy đây là mệnh đề đúng, ta chọn C và không cần xét đến phương án D nữa.

Nhận xét, với bài toán này, bấm máy tính là phương pháp nhanh nhất để tiết kiệm thời gian.

Câu 27: Đáp án C

Phân tích: Nhận xét $(\cos x)' = -\sin x$. Do vậy ta có thể biến đổi như sau:

$$I = -\int_0^{\pi} \cos^3 x d(\cos x) = -\frac{1}{4}\cos^4 x \Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\cos^4 \pi - \cos^4 0\right) = -\frac{1}{4}\left((-1)^4 - 1^4\right) = 0$$

Chú ý: hãy để ý đặc điểm của tích phân đề bài, và đưa về dạng đơn giản. Ở bài toán này quý độc

giả có thể bấm máy tính cho nhanh, tôi không giới thiệu ở đây vì nó khá đơn giản.

Câu 28: Đáp án A

Phân tích: Ta cùng nhắc lại kiến thức sách giáo khoa như sau:

Điểm biểu diễn số phức $z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$ trong mặt phẳng vuông góc là điểm $M(x; y)$.

Vậy $M(5; -3)$ chính là điểm biểu diễn số phức $z = 5 - 3i$. Đây là bài toán đơn giản, vì thế quý độc giả cần cẩn thận trong tính toán, trong nhẩm.

Câu 29: Đáp án D.

Phân tích: Đề bài cho rằng tìm mệnh đề không đúng, do vậy ta sẽ đi xem xét từng phương án một,

* Với phương án A: Nhận thấy $z \pm z' = (x + iy) \pm (x' + iy')$

$= (x \pm x') + (y \pm y')i$. Vậy đây là phương án đúng.

* Với phương án B. Ta có: $\begin{aligned} z.z' &= (x + iy).(x' + iy') \\ &= xx' + ixy' + ix'y + i^2 yy' \end{aligned}$

$= xx' - yy' + i(xy' + x'y)$. Vậy đây là phương án đúng.

* Với phương án C: Nhận thấy ở phần phương án mẫu số có dạng $x'^2 + y'^2$ nên ta sẽ nhân thêm số phức liên hợp vào để tạo ra $x'^2 + y'^2$

$$\frac{z}{z'} = \frac{x + iy}{x' + iy'} = \frac{(x + iy)(x' - iy')}{(x' + iy')(x' - iy')}$$

$$= \frac{xx' - ixy' + iyx' - i^2 yy'}{x'^2 + y'^2} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i.\frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}$$

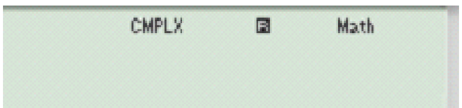
Đây là phương án đúng

Vậy theo phương pháp loại trừ ta chỉ còn phương án D. Rõ ràng B và C đúng nhưng ở phương án D lại nói B và C sai, do đó rõ ràng D là phương án không đúng, do vậy ta chọn D.

Câu 30: Đáp án B.

Phân tích: Bài toán khá đơn giản, ta chỉ cần bấm máy tính là được. Ở đây bước đầu tiên ta cần chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức 2: CMPLX bằng cách chọn:

MODE $\rightarrow$ **2: CMPLX** máy hiện như sau là quý độc giả có thể tính toán được với số phức trên máy tính.



Tiếp theo nhập biểu thức cần tính vào, chú ý, nút i nằm ở nút **ENG** trên máy và nhập vào máy tính sẽ được kết quả như sau:

Ta sẽ nhanh chóng chọn được đáp án B.

Câu 31: Đáp án A

Phân tích: Số phức z có dạng $z = x + yi$ theo đề bài ta có $\begin{cases} x = 2y \\ 2x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$. Đáp án A.

Câu 32: Đáp án B

Phân tích: Tương tự như bài toán Câu 31 ta có thể đặt $z = x + iy\ (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó từ đề bài ta có:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2y-5)^2 + y^2 = 25 \\ x = 2y - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y^2 - 20y = 0 \\ x = 2y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ x = -5 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 4 \\ x = 3 \end{cases} \end{array} \right.$$

Vậy ta chọn đáp án B.

Câu 33: Đáp án A

Phân tích: Đây là bài toán tìm nghiệm phương trình đơn giản, quý độc giả chỉ cần bấm máy tính là có đáp án: phương trình có hai nghiệm $z_1 = \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i$ và $z_2 = \frac{13}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i$

Hai nghiệm này là số phức liên hợp của nhau, do đó $z_0 + \overline{z}_0 = z_1 + z_2 = 13$.

Câu 34: Đáp án B.

Phân tích: Bài toán yêu cầu tìm tập hợp các điểm biểu diễn của z , tức là liên quan đến x, y. Do vậy ta sẽ đặt $z = x + iy$, khi đó $\overline{z} = x - iy$. Vậy $z.\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$

Theo đề bài thì $x^2 + y^2 = 4$. Nhận thấy đây là phương trình đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R = 2$. Vậy ta sẽ chọn phương án B.

Ở đây có nhiều bạn sẽ nhầm sang bất phương trình nên đinh ninh chọn C là sai.

Câu 35: Đáp án A.

Phân tích: Với bài toán này quý độc giả chỉ việc áp dụng công thức $i^2 = -1$. Khi đó

$i^2 + i^3 + i^4 + i^5 = -1 - 1.i + 1 + i = 0$. Vậy đáp án của ta là A. Quý độc giả có thể chuyển máy tính sang dạng tính toán bằng số phức để bấm cũng được. Tuy nhiên bài toán này nhẩm khá là nhanh mà quý độc giả không cần tốn nhiều thời gian bấm máy tính.

Câu 36: Đáp án A.

Phân tích: Đây là một dạng bài toán ứng dụng thực thế kết hợp cả phần tính thể tích khối đa diện ở hình học và phần tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một đa thức đã học ở chương I phần giải tích.

Trước tiên ta nhận thấy

$V = (6-x)(12-2x)x = 2x(x-6)^2$

$= 2x(x^2 - 12x + 36) = 2x^3 - 24x^2 + 72x$

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 24x^2 + 72x$ trên $(0;6)$

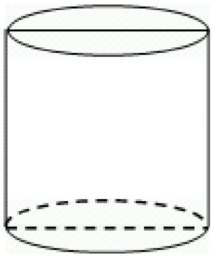
$f'(x) = 6x^2 - 48x + 72; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 2 \end{array} \right.$

Khi đó ta có $\max\limits_{(0;6)} f(x) = f(2) = 64$ đvtt. Đến đây nhiều quý độc giả vội vã khoanh C mà không đắn đo gì. Tuy nhiên, nếu vội vã như vậy là bạn đã sai, bởi đề bài yêu cầu tìm thể tích chocolate

nguyên chất mà không phải là thể tích hộp do đó ta cần. Tức là $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ thể tích hộp. Tức là $\frac{3}{4}.64 = 48$ đvtt.

Câu 37: Đáp án C.

Phân tích: Nhận xét, thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông sẽ được biểu thị dưới hình vẽ sau để bạn đọc có thể dễ tưởng tượng.



Từ đây ta có thể nhận thấy đường kính của hình tròn đáy = chiều cao của hình trụ = cạnh của hình vuông thiết diện. Do đó có thể suy ra $\begin{cases} r = 2cm \\ h = 2.2 = 4\,\text{cm} \end{cases}$

Khi đó $V = B.h = 4.\pi.2^2 = 16\pi\ cm^3$

Câu 38: Đáp án B.

Phân tích: Đây là bài toán quen thuộc trong hình học không gian. Có rất nhiều cách để tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện.

Dưới đây tôi xin hướng dẫn cách tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp như sau:

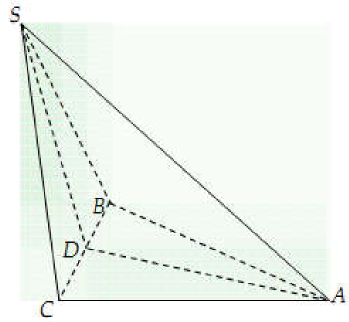
1. Xác định trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy bằng cách xác định tâm đa giác đáy, và từ

tâm kẻ đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.

2. Vẽ một đường trung trực của một cạnh bên.

3. Giao điểm của đường trung trực cạnh bên của hình chóp với trục đường tròn sẽ là tâm của mặt

cầu ngoại tiếp hình chóp.



Với bài toán này, ta sẽ làm theo các bước trên như sau:

Bước 1: Tìm đường cao hình chóp để biết phương của trục đường tròn. Do đề cho $(SBC) \perp (ABC)$. Do đó kẻ $SD \perp BC \Rightarrow SD \perp (ABC)$. Khi đó SD chính là đường cao của hình chóp.

Bước 2: Tìm trục đường tròn của hình chóp. Nhận thấy do tam giác ABC vuông cân tại A do

đó D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó đường thẳng qua D vuông góc với mặt

phẳng (ABC) chính là trục đường tròn của mặt phẳng đáy. Suy ra SD chính là trục đường tròn của mặt phẳng đáy.

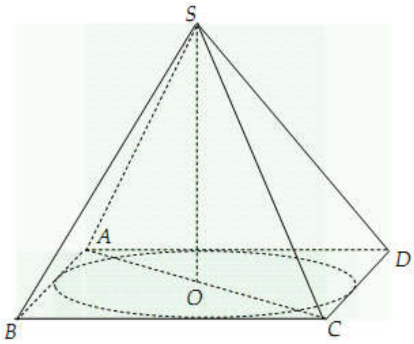
Rồi đến Bước 3: …

Tuy nhiên đến đây ta nếu làm theo các bước như trên tôi đã đề cập, có thể quý độc giả sẽ cũng làm ra. Tuy nhiên sẽ tốn thời gian hơn nếu quý độc iả để ý một chút và có thể nhận ra rằng: Hai tam giác SBC và ABC là hai tam giác vuông cân tại S và A. Khi đó ta có thể nhận ra $DS = DB = DC = DA = \frac{a}{2}$. Vậy ta đã tìm được tâm và bán kính $R = \frac{a}{2}$

Nhận xét: Đôi khi để ý sẽ khiến quá trình giải toán của quý độc giả nhanh hơn nhiều lần. Nếu vẽ hình khó nhìn sẽ khiến quý độc giả khó có thể nhận ra được các đặc điểm và làm cho quá trình giải toán trở nên rối hơn, chậm hơn.

Câu 39: Đáp án B

Phân tích: Nhận thấy đường tròn đáy nội tiếp hình vuông ABCD, thì đường kính đáy bằng cạnh của hình vuông ABCD. Khi đó $a = 2.1 = 2cm$.



Kí hiệu như hình vẽ, khi đó $OA = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{11-2} = 3$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.3.2.2 = 4cm^3$$

Câu 40: Đáp án B

Phân tích: Do chu vi của hình quạt tròn là P = độ dài cung + 2R. Do đó độ dài cung tròn là $l = 8\pi$

Theo cách thứ nhất: 8π chính là chu vi đường tròn đáy của cái phễu. Tức là $2\pi r = 8\pi \Rightarrow r = 4$

Khi đó $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}.3\pi.4^2$$

Theo cách thứ hai: Thì tổng chu vi của hai đường tròn đáy của hai cái phễu là $8\pi \Leftrightarrow$ chu vi của một đường tròn đáy là $4\pi \Rightarrow 4\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 2$

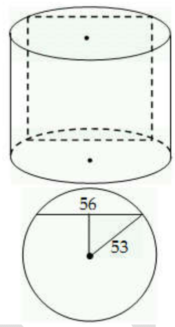
Khi đó $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

$$\Rightarrow V_2 = 2.\frac{1}{3}\sqrt{21}.2^2.\pi$$

Khi đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4^2}{\frac{8\sqrt{21}}{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$

Câu 41: Đáp án B

Phân tích: Hình dạng của bài toán được miêu tả dưới hình vẽ. Tuy nhiên để tìm được khoảng cách, ta chỉ cần vẽ mặt cắt của một mặt phẳng đáy

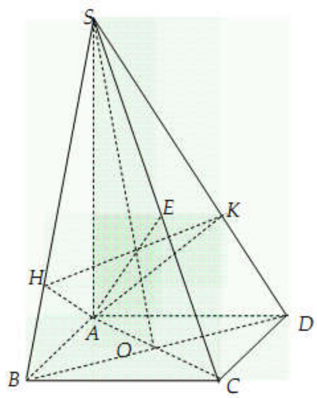


Nhận thấy: Để mặt phẳng thiết diện là hình vuông thì hình vuông đó có độ dài cạnh là 56 (bằng độ dài chiều cao của hình trụ). Khi đó ta có mặt phẳng được vẽ như hình dưới. Muốn tìm được khoảng các từ trục đến mặt phẳng cắt ta dựa vào định lý Pytago.

$$d = \sqrt{53^2 - \left(\frac{56}{2}\right)^2} = 45$$

Câu 42: Đáp án B.

Phân tích:



Đây là bài toán quen thuộc trong giải hình không gian 12, nếu đã luyện tập nhiều thì khi vẽ xong

hình bài này có thể nhận ra luôn AC là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp khối ABCDEHK. Tuy nhiên tôi sẽ trình bày dưới đây để quý độc giả có thể hiểu rõ hơn.

Ngoài phương pháp tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp mà tôi đã giới thiệu cho quý độc giả ở Câu 38, thì tôi xin giới thiệu thêm một phương pháp nữa như sau:

Để xác định khối cầu ngoại tiếp một đa giác, ta tìm đường thẳng mà các đỉnh của đa diện nhìn

đường thẳng đó dưới một góc vuông.

Ở đây ta đã xác định đường đó là AC, nên tôi xin chỉ cách chứng minh như sau:

Ta có thể nhận thấy được B,D nhìn AC dưới một góc 90^0

Dễ tính được $SD = a\sqrt{5}; KD = \dfrac{AD^2}{SD} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$;

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$

Do đề bài cho độ dài các cạnh khá rõ ràng nên ta sẽ dùng định lý Pytago để chứng minh $AKC = 90^0$.

Ta có $\dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{AK^2} \Rightarrow AK = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} (1)$

Ta có $SC^2 = SD^2 + CD^2 \Rightarrow$ tam giác SCD vuông tại D. Khi đó tam giác 2KDC vuông tại

$\Rightarrow KC = \sqrt{CD^2 + KD^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$. Ta có

$AK^2 + KC^2 = AC^2$. Vậy $AKC = 90^0$. Chứng minh tương tự thì $AHC = 90^0$.

Đến đây ta có thể kết luận được AC chính là đường kính mặt cầu ngoại tiếp khối ABCDEHK.

Mà $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OA = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$$V = \frac{4}{3}\pi.\text{OA}^3 = \frac{4}{3}.\pi.a^3.\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi.a^3$$

Câu 43: Đáp án A

Phân tích: Thực chất đây là bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:

$d\left(S;(P)\right) = \dfrac{|3.1 + 4.1 + 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$. Khi đó khoảng cách này chính là độ dài đường cao của khối chóp.

$$V = \frac{1}{3}.3.10 = 10\,cm^3$$

Câu 44: Đáp án C

Phân tích: Để biết xác định được m, n thì ta cần tìm phương trình đường thẳng AB và sau đó thay tọa độ điểm M vào tìm m, n. Ta có AB có vtcp $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-5;0;8)$

Đường thẳng AB qua $A(1;2;-3)$ và có vtcp $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-5;0;8)$

$$\Rightarrow AB: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 \\ z = -3 + 8t \end{cases}$$

Khi đó thay tọa độ M vào thì ta được hệ:

$$\begin{cases} 1 - 5t = m + 2 \\ 2n - 1 = 2 \\ -3 + 8t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{7}{2} \\ n = \dfrac{3}{2} \\ t = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 45: Đáp án A.

Phân tích: Sau đây tôi xin đưa ra cách làm tổng quát của bài toán tìm phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và chứa một đường thẳng :

Bước 1: Tìm một điểm A thuộc đường thẳng đã cho. Tìm $\overrightarrow{AM}$

Bước 2: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AM};\vec{u}\right]$

Bước 3: Viết phương trình mặt phẳng qua điểm M có vtpt $\vec{n}$

Đề bài yêu cầu viết phương trình mặt phẳng chứa một điểm và một đường thẳng. Khi đó ta sẽ tìm hai điểm bất kì nằm trên đường thẳng d. Khi đó bài toán trở về viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm. Lấy $A(1;-1;1)$ thuộc đường thẳng d. Khi đó $\overrightarrow{AM} = (0;3;2)$

Ta có vtcp $\vec{n} = \left[\vec{u};\overrightarrow{AM}\right] = (-5;-2;3)$ (Phần này quý độc giả có thể áp dụng cách bấm máy tính mà tôi đã giới thiệu ở các đề trước).

Mặt phẳng (P): Qua $M(1;2;3)$ có vtpt $\vec{n} = (-5;-2;3)$

$\Rightarrow (P): -5(x-1) - 2(y-2) + 3(z-3) = 0$

$\Leftrightarrow (P): 5x + 2y - 3z = 0$

Câu 46: Đáp án A.

Phân tích: Ta đi nhận xét từng mệnh đề một.

Xét mệnh đề A ta thấy khi thay $A(-1;2;1)$ vào (β) ta được: $-1+2.2-3.1=0$ thỏa mãn. Và nhận thấy vtpt của hai mặt phẳng này trùng nhau và (α) không trùng với (β), do đó 2 mặt phẳng này $(\alpha) \parallel (\beta)$. Vậy mệnh đề này đúng. Ta không cần xét đến các mệnh đề còn lại nữa.

Câu 47: Đáp án A

Phân tích: Mặt cầu đã cho biết tâm I, ta chỉ cần đi tìm bán kính của mặt cầu. Mà đề cho mặt cầu đó tiếp xúc với (α). Tức là

$$d(I;(\alpha)) = R = \frac{|4.0 - 3.1 + 2.2 + 28|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \sqrt{29}$$

Khi đó mặt cầu cần tìm có phương trình:

$x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 29$

Câu 48: Đáp án B.

Phân tích: Để bốn điểm tạo thành tứ diện tức là C không thuộc mặt phẳng (ABD). Ta viết phương trình mặt phẳng (ABD). Bài toán quay về viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm

đã cho quen thuộc.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;-2;-1); \overrightarrow{AD} = (2;0;1)$. Khi đó vtpt $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right] = (-2;-6;4)$

Mặt phẳng $(P): -2(x-1) - 6(y-1) + 4(z-4) = 0$

$\Leftrightarrow (P): -2x - 6y + 4z - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (P): x + 3y - 2z + 4 = 0$

Để $C(2;2m)$ không thuộc mặt phẳng (P) thì $2 + 3.2 - 2m + 4 \neq 0$

$m \neq 6$

Câu 49: Đáp án A.

Phân tích: Ta cùng nhớ về điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc mà ta đã học ở sách giáo khoa hình học 12 như sau:

Hai mặt phẳng (α_1) có vtpt $\overrightarrow{n_1}$, (α_2) có vtpt $\overrightarrow{n_2}$. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc là:

$\left(\alpha_1\right) \perp \left(\alpha_2\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$

Vậy để $\left(P\right) \perp \left(Q\right)$ thì

$3.\left(m-1\right)+3.1-1.\left(-\left(m+2\right)\right)=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$

Câu 50: Đáp án A.

Phân tích: (S) có tâm $I\left(1;-2;3\right)$, bán kính $R=2$.

Để (P) và (S) tiếp xúc nhau thì $d\left(I;\left(P\right)\right)=R$