B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ VI PHÂN VÀ ĐẠO HÀM CẤP CAO.

Dạng 1. Vi phân hàm số.

Phương pháp:

- Tính vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0 cho trước: $df(x_0)=f'(x_0).\Delta x$.
- Tính vi phân của hàm số $f(x)$: $df(x)=f'(x).dx$.
- Dùng vi phân tính gần đúng.

Câu 1. Vi phân của hàm số $f(x)=3x^2-x$ tại điểm $x=2$ ứng với $\Delta x=0,1$ là:

A. $-0,07$. **B.** 10. **C.** $1,1$. **D.** $-0,4$.

Lời giải

Đáp án C.

Ta có: $f'(x)=6x-1\Rightarrow f'(2)=11\Rightarrow df(2)=f'(2).\Delta x=11.0,1=1,1$.

Câu 2. Vi phân của hàm số $f(x)=\sin 2x$ tại điểm $x=\frac{\pi}{3}$ ứng với $\Delta x=0,01$ là:

A. $-1,1$. **B.** 10. **C.** $0,1$. **D.** $-0,01$.

Lời giải

Đáp án D.

$f'(x)=2\cos 2x\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1\Rightarrow df\left(\frac{\pi}{3}\right)=f'\left(\frac{\pi}{3}\right).\Delta x=-0,01$.

STUDY TIP

Việc tính vi phân của hàm số tại một điểm x_0 chính là tích của đạo hàm tại một điểm x_0 và số gia Δx tương ứng.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x}$. Biểu thức $0,01.f'(0,01)$ là số nào?

A. 9. **B.** -9. **C.** 90. **D.** -90.

Lời giải

Đáp án D.

$f'(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(0,01)=-9000\Rightarrow 0,01f(0,01)=-90$.

Câu 4. Vi phân của hàm số $y=\sqrt{x\sqrt{x}}$ là:

A. $dy=\frac{3}{4\sqrt{\sqrt{x}}}dx$. **B.** $dy=\frac{3}{2\sqrt{\sqrt{x}}}dx$. **C.** $dy=\frac{5}{4\sqrt{x}}dx$. **D.** $dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$.

Lời giải

Đáp án A.

. $y' = \frac{\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x\sqrt{x}}} = \frac{3\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sqrt{x}}} = \frac{3}{4\sqrt{\sqrt{x}}} \Rightarrow dy = \frac{3}{4\sqrt{\sqrt{x}}}dx$

STUDY TIP

Việc tính vi phân của hàm số $f(x)$ chính là tích của đạo hàm với dx tương ứng.

Câu 5. Vi phân của hàm số $y = \frac{1}{(1+\tan x)^2}$ là:

A. $dy = \frac{2}{\cos^2 x(1+\tan x)^3}dx$.

B. $dy = \frac{-2}{\cos^2 x(1+\tan x)^3}dx$.

C. . $dy = \frac{1}{\cos x(1+\tan x)^3}dx$.

D. $dy = \frac{-1}{\cos^2 x(1+\tan x)^2}dx$.

Lời giải

Đáp án B.

Ta có: $dy = \frac{-2(1+\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}}{(1+\tan x)^4}dx = \frac{-2}{\cos^2 x(1+\tan x)^3}dx$

Câu 6. Cho hàm số $y = \sqrt{1+\cos^2 2x}$. Chọn kết quả đúng:

A. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$.

B. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$.

C. $df(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$.

D. $df(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$.

Lời giải

Đáp án B.

Ta có: $df(x) = \frac{(1+\cos^2 2x)'}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$

STUDY TIP

Có thể sử dụng MTCT để tìm đạo hàm của hàm số sau đó ta cũng được kết quả của tính vi phân.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+x & khi\ x \ge 0 \\ x & khi\ x < 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là sai:

A. $f'(0^+) = 1$.

B. $f'(0^-) = 1$.

C. $df(0) = dx$.

D. Hàm số không có vi phân tại $x = 0$.

Lời giải

Đáp án D.

Ta có: $f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x} = 1; f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{x} = 1$ và $df(0) = dx$.

STUDY TIP

Với hàm số có nhiều biểu thức việc tính đạo hàm của hàm ta dùng định nghĩa.

Câu 8. Cho hàm số $y = x + \sqrt{x^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng:

A. $\sqrt{1+x^2}.dy - ydx = 0$.

B. $\sqrt{1+x^2}.dx - dy = 0$.

C. $xdx + \sqrt{1+x^2}.dy = 0$.

D. $\sqrt{1+x^2}.dy + xy = 0$.

Lời giải

Đáp án A.

Ta có: $dy = y'dx \Rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx}$ mà

$y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} \cdot dy - ydx = 0.$

Câu 9. Dùng vi phân tính gần đúng $\sqrt[3]{26,7}$ có giá trị là:

A. $2,999$.

B. $2,98$.

C. $2,97$.

D. $2,89$.

Lời giải

Đáp án A.

Xét $f(x) = \sqrt[3]{x}$ thì $f'(x) = \dfrac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}$. Cho $x_0 = 27,\ \Delta x = -0,3$.

Theo công thức gần đúng $f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0).\Delta x + f(x_0)$

$\Rightarrow \sqrt[3]{27,3} \approx \sqrt[3]{27} + \dfrac{1}{27}(-0,3) \approx 2,999.$

STUDY TIP

Sử dụng vi phân để tính gần đúng ta xét hàm số $f(x)$ và chọn $x_0,\ \Delta x$ sao cho phù hợp.

Câu 10. Dùng vi phân tính gần đúng $\sin 29°$ có giá trị là:

A. $0,4849$.

B. $0,5464$.

C. $0,4989$.

D. $0,4949$.

Đáp án A.

Lời giải

Xét $f(x) = \sin x$ với $29° = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{180}\ (rad)$.

Có $f'(x) = \cos x$.

Chọn $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$, $\Delta x = -\dfrac{\pi}{180} \Rightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{180}\right) \approx \sin\dfrac{\pi}{6} + \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right).\left(-\dfrac{\pi}{180}\right) \approx 0,4849$.

DẠNG 2. Tính đạo hàm cấp cao và ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai.

Phương pháp:

- Tính đạo hàm cấp cao: Áp dụng trực tiếp định nghĩa:

$y'' = (y')'$, $y''' = (y'')', \ldots, y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

- Tính đạo hàm cấp n: Trước tiên ta tính đạo hàm cấp 1, cấp 2, … sau đó dự đoán công thức tổng quát của $f^{(n)}(x)$.
- Chứng minh đẳng thức có chứa đạo hàm: Tính đến đạo hàm cấp cao nhất có trong đẳng thức rồi thay thế vào vị trí tương ứng và biến đổi cho ta được kết quả.
- Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai: Gia tốc tức thời (γ) tại thời điểm t là đạo hàm cấp 2 của hàm số $s = f(t)$.

Câu 11. Tính y'', biết $y = x\sqrt{1+x^2}$.

A. $y'' = \dfrac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

B. $y'' = \dfrac{2x(3+2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

C. $y'' = \dfrac{x(3-2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2}}$.

D. $y'' = \dfrac{x(1+x^2)}{2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Đáp án A

Lời giải

$$y' = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y'' = (y')' = \frac{4x(1+x^2) - x(1+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

STUDY TIP

Sau khi tính được đạo hàm bậc nhất y' ta có thể sử dụng MTCT với chức năng: $\left(\dfrac{d}{dx}(\ldots)\Big|_x\right)$ để kiểm tra và tính được kết quả.

Câu 12. Cho $f(x) = (2x-3)^5$. Tính $f'''(3)$.

A. 4230. **B.** 4320. **C.** 4204. **D.** 4132.

Đáp án B.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 10(2x-3)^4$, $f''(x) = 80(2x-3)^3$, $f'''(x) = 480(2x-3)^2$.

$\Rightarrow f'''(3) = 4320$

STUDY TIP

$$f''(x) = [f'(x)]'; \; f'''(x) = [f''(x)]'$$

$$f'''(x) = 480(2x-3)^2 \Rightarrow f'''(3) = 4320$$

Cách khác sử dụng chức năng $\frac{dy}{dx}\left(\square\right)\Big|_{x=\square}$ nhập biểu thức đạo hàm của $f''(x)$ tại điểm $x=2$ rồi so sánh kết quả ta được đáp án B

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=\frac{1}{x}$.Tính $y^{(4)}$

A. $y^{(4)}=\frac{-4}{x^5}$. **B.** $y^{(4)}=\frac{1.2.3.4}{x^5}$. **C.** $y^{(4)}=\frac{-4!}{x^5}$. **D.** $y^{(4)}=\frac{-1.2.3.4}{x^6}$.

Đáp án B

Lời giải:

$$y'=-\frac{1}{x^2},y''=\frac{1.2}{x^3},y^{(3)}=\frac{1.2.3}{x^4}\Rightarrow y^{(4)}=\frac{(-1)^4.4!}{x^{4+1}}=\frac{4!}{x^5}$$

STUDY TIP

Tổng quát: $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}$

Ví dụ 4. Đạo hàm cấp n của hàm số $y=\frac{1}{ax+b},a\neq 0$ là:

A. $y^{(n)}=\frac{2^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$. **B.** $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.a^n.n!}{(x+1)^{n+1}}$. **C.** $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$. **D.** $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

Đáp án D

Lời giải:

$$y'=-\frac{a}{(ax+b)^2},y''=\frac{2a^2}{(ax+b)^3},y'''=\frac{-a^3.2.3}{(ax+b)^4}$$

Dự đoán công thức $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$

Nhận xét: Việc dự đoán công thức ta đã được ngay kết quả của bài toán. Tuy nhiên để hiểu rõ và chính xác hơn ta có thể chứng minh công thức tổng quát bằng phương phức quy nạp toán học (bạn đọc tự làm)

STUDY TIP

Phương pháp quy nạp: ta cần chứng minh mệnh đề $P(n),n\in N^*$

+ Kiểm tra với $n=1,2\ldots$

+ Giả sử mệnh đề đúng với $n=k\geq 1$, ta chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n=k+1$.

Ví dụ 5. Đạo hàm cấp ba của hàm số $y=\frac{x^2+x+1}{x+1}$ là:

A. $\frac{-6}{(x+1)^4}$. **B.** $\frac{-4}{(x+1)^3}$. **C.** $\frac{6}{(x+1)^3}$. **D.** $\frac{-12}{(x+1)^4}$.

Đáp án A

Lời giải :

Ta phân tích $y=x+\frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow y'=1-\frac{1}{(x+1)^2}, y''=\frac{2}{(x+1)^3}, y'''=\frac{-6}{(x+1)^4}$.

Nhận xét: Với hàm phân thức bậc của tử cao hơn hoặc bằng bậc của mẫu thì ta chia tách phân số và đưa về các phân số dạng $\frac{A}{ax+b}$

Ví dụ 6. Đạo hàm cấp 4 của hàm số $y=\frac{2x+1}{x^2-5x+6}$ là :

A. $y^{(4)}=\frac{7.4!}{(x-3)^5}-\frac{5.4!}{(x-2)^5}$. **B.** $y^{(4)}=\frac{5.4!}{(x-3)^5}-\frac{2.4!}{(x-2)^5}$.

C. $y^{(4)}=\frac{5.4!}{(x-2)^5}-\frac{7.4!}{(x-3)^5}$. **D.** $y^{(4)}=\frac{7}{(x-3)^5}-\frac{5}{(x-2)^5}$.

Đáp án A

Lời giải :

$y=\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{7}{x-3}-\frac{5}{x-2}$. Mà $\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(4)}=\frac{(-1)^4.4!}{(x-2)^5}=\frac{4!}{(x-2)^5}$

$\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(4)}=\frac{(-1)^4.4!}{(x-3)^5}=\frac{4!}{(x-3)^5}$

$\Rightarrow y^{(4)}=\frac{7.4!}{(x-3)^5}-\frac{5.4!}{(x-2)^5}$

Nhận xét: Với các hàm phân thức có bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì ta cố gắng đưa mẫu số về dạng tích và phân tích phân số thành tổng, hiệu các phân số dạng $\frac{A}{ax+b}$

STUDY TIP

$\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$

Các hằng số A,B tìm được bằng cách quy đồng và đồng nhất hệ số 2 vế

Ví dụ 7. Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y=\sin x$ là:

A. $y^{(3)}=\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)$. **B.** $y^{(3)}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. **C.** $y^{(3)}=\sin\left(x+\pi\right)$. **D.** $y^{(3)}=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$.

Đáp án D

Lời giải:

Ta có: $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\pi\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$

$y'''=\cos\left(x+\pi\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$

STUDY TIP

Tổng quát:

$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$; $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$ (với $n\ge 1,\ n\in N^*$)

$\left[\sin(ax+b)\right]^{(n)}=a^n.\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

$\left[\cos(ax+b)\right]^{(n)}=a^n.cos\left[ax+b+\frac{n\pi}{2}\right]$

Ví dụ 8. Đạo hàm cấp 4 của hàm số $y=\sin^4 x$ là :

A. $-8\cos 2x+32\cos 4x$. **B.** $4\cos 2x+16\cos 4x$. **C.** $8\cos 2x-12\cos 2x$. **D.** $6\cos 2x-32\cos 4x$.

Đáp án A

Lời giải :

Ta có: $y=\sin^4 x=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$

$\Rightarrow y'=\sin 2x-\frac{1}{2}\sin 4x$,

$y''=2\cos 2x-2\cos 4x$,

$y'''=-4\sin 2x+8\sin 4x$,

$y^{(4)}=-8\cos 2x+32\cos 4x$.

STUDY TIP

Đối với hàm lượng giác, khi tính đạo hàm bậc cao thì ta biến đổi hạ bậc hoặc biến đổi từ tích thành tổng để đưa về bậc nhất, $\sin(ax+b),\cos(ax+b)$.

Ví dụ 9. Đạo hàm cấp 4 của hàm số $y=\sin 5x.\sin 3x$ là:

A. $y^{(4)}=-2048\cos 8x+8\cos 2x$. **B.** $y^{(4)}=2048\cos 8x-8\cos 2x$.

C. $y^{(4)}=1024\cos 16x+4\cos 4x$. **D.** $y^{(4)}=2048\cos 8x-4\cos 4x$.

Đáp án. **A.**

Lời giải :

Ta có $y=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 8x)\Rightarrow y^{(4)}=-2048\cos 8x+8\cos 2x$.

STUDY TIP

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin x.\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]$

Ví dụ 10. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-12x-1$. Tập hợp các giá trị x để đạo hàm cấp 2 của $f(x)$ không âm là :

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$. **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Đáp án. **D.**

Lời giải:

$f'(x)=x^2+x-12, f''(x)=2x+1$ Do đó: $f''(x)\ge 0\Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 11. Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình : $s=t^3-3t^2+5t+2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t=3$ là:

A. $24m/s^2$. **B.** $17m/s^2$. **C.** $14m/s^2$. **D.** $12m/s^2$.

Đáp án D

Lời giải:

Gia tốc chuyển động tại $t=3s$ là $s''(3)$

Ta có: $s'(t)=3t^2-6t+5$

$s''(t)=6t-6\Rightarrow s''(3)=12m/s^2$.

STUDY TIP

Bài toán vận dụng ý nghĩa cơ học của đạo hàm bậc 2. Gia tốc tức thời (γ) tại thời điểm $t_0 : \gamma(t_0) = s''(t_0)$

Ví dụ 12. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $y^3.y'' + 1 = 0$. **B.** $y^2.y'' - 1 = 0$. **C.** $3y^2.y'' + 1 = 0.$. **D.** $2y^3.y'' + 3 = 0.$

Đáp án A

Lời giải :

Ta có: $y' = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $y'' = -\dfrac{1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$

Thay vào: $y^3.y'' + 1 = \sqrt{(2x-x^2)^3}.\dfrac{(-1)}{\sqrt{(2x-x^2)^3}} + 1 = -1 + 1 = 0.$

Ví dụ 13. Cho hàm số $y = \dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $2y'' + y = 0.$ **B.** $y'' + y = 0.$ **C.** $y'' - y = 0.$ **D.** $2y'' - 3y = 0.$

Lời giải :

Ta có : $y = \dfrac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)}{1 - \sin x \cos x} = \sin x + \cos x$

$\Rightarrow y' = \cos x - \sin x, y'' = -\sin x - \cos x$

$\Rightarrow y'' + y = 0.$

STUDY TIP

Với các biểu thức lượng giác phức tạp ta cần biến đổi rút gọn rồi sau đó tính đạo hàm cấp cao

Ví dụ 14. Phương trình chuyển động của một chất điểm $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây). Tìm gia tốc tức thời tại thời điểm vận tốc bằng 0.

A. $10\ m/s^2$. **B.** $12\ m/s^2$. **C.** $8\ m/s^2$. **D.** $16\ m/s^2$.

Đáp án. **B.**

Lời giải:

$$v(t) = s'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 (1) \\ t = 3 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \gamma(3) = 12 m/s^2$.

Dạng 3 :Dùng đạo hàm để giải toán tổ hợp C_n^k

Phương pháp:

Cách 1: Từ khai triển $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x^1 + C_n^2x^2 + ... + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n$

Lấy đạo hàm cấp 1, cấp 2 ở hai vế khai triển của nhị thức

-Chọn $x = x_0$ và chọn n thích hợp.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính thay với một vài giá trị $n = 1,2,...$ và kiểm tra tính đúng sai ta đi đến việc lựa chọn đáp án

Ví dụ 15. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n.2^{n-1}, n \in N.$

B. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = (n+1).2^n, n \in N.$

C. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = (n-1).2^{n-1}, n \in N.$

D. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = (n+1).2^{n+1}, n \in N.$

Đáp án A

Lời giải:

Cách 1: Xét $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x^1 + ... + C_n^nx^{n-1} + C_n^nx^n \ \forall x \in R$

$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + ... + (n-1)x^{n-2}.C_n^{n-1} + n.x^{n-1}.C_n^n$

$f'^{(1)} = C_n^1 + 2C_n^2 + ... + (n-1).C_n^{n-1} + n.C_n^n = n.2^{n-1}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT

-Chọn với $n = 1$: $C_1^1 = 2^0 = 1$ (đúng)

-Chọn với $n = 2: C_2^1 + 2C_2^2 = 2.2 = 4$ (đúng)

....

Từ việc thử đáp án ta được kết quả

Ví dụ 16. Tính tổng với $n \in N, n \geq 2$:

$S = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + ... + (n-2).(n-1).C_n^{n-1} + (n-1).n.C_n^n$

A. $(n-1).(n-2).2^{n-2}$. **B.** $n.(n-1).2^{n-2}$. **C.** $n.(n-1).2^{n-1}$. **D.** $(n-1).(n-2).2^n$.

Đáp án B

Lời giải:

Cách 1: Xét hàm số $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x^1 + C_n^2x^2 + ... + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n$

Suy ra:

$f'(x)=n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2xC_n^2+\ldots+(n-1)x^{n-2}.C_n^{n-1}+n.x^{n-1}.C_n^n$

$f''(x)=(n-1).n.(1+x)^{n-2}$

$=1.2.C_n^2+2.3.x.C_n^3+\ldots+(n-2).(n-1)x^{n-3}.C_n^{n-1}+(n-1).n.x^{n-2}.C_n^n$

$f''(1)=1.2.C_n^2+2.3.C_n^3+\ldots+(n-2).(n-1).C_n^{n-1}+(n-1).n.C_n^n=n(n-1)2^{n-2}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT ta thử với một vài giá trị $n\geq 2$.

-Với $n=2 \Rightarrow S=1.2.C_2^2=2.1.2^1=2$ (đúng)

-Với $n=3 \Rightarrow S=1.2.C_3^2+2.3.C_3^3=3.2.2=12$ (đúng)

…

So sánh, đối chiếu các đáp án ta được kết quả.

STUDY TIP

Nếu trong biểu thức thiếu 2 số hạng đầu tiên hoặc 2 số hạng cuối cùng của khai triển nhị thức đồng thời các hệ số là tích của 2 số tự nhiên lien tiếp ta dung đạo hàm cấp 2.

Ví dụ 17. Tính tổng $S=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+(n+1)C_n^n$ bằng

A. $n.2^{n-1}$. **B.** $(n+1).2^{n-1}$. **C.** $(n+2).2^{n-1}$. **D.** $(n+1).2^n$.

Đáp án C

Lời giải:

Cách 1: Ta có: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+\ldots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n \quad \forall x\in R$

Nhân 2 vế với x ta được: $x(1+x)^n=x.C_n^0+x^2.C_n^1+x^3.C_n^2+\ldots+x^n.C_n^{n-1}+x^{n+1}.C_n^n$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được : $(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1}=C_n^0+2x.C_n^1+3x^2.C_n^2+\ldots+(n+1)x^n.C_n^n$

Thay $x=1$ ta được: $S=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+(n+1)C_n^n=2^n+n.2^{n-1}=(n+2).2^{n-1}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT (bạn đọc tự thử lại)

STUDY TIP

Nếu trong khai triển nhị thức vẫn có số hạng đầu hoặc số hạng cuối và hệ số tăng thêm 1 đơn vị thì ta nhân 2 vế với x và sau đó dùng đạo hàm cấp 1.

Ví dụ 18. Tìm số nguyên dương n sao cho:

$C_{2n+1}^1-2.2.C_{2n+1}^2+3.2^2.C_{2n+1}^3-4.2^3.C_{2n+1}^4+\ldots+(2n+1).2^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1}=2017$

A. $n=1005$. **B.** $n=1006$. **C.** $n=1007$. **D.** $n=1008$.

Đáp án D

Lời giải:

Với $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có: $(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1.x^1 + C_{2n+1}^2.x^2 + C_{2n+1}^3.x^3 + ... + C_{2n+1}^{2n+1}.x^{2n+1}$

Lấy đạo hàm hai vế theo x ta được:

$(2n+1)(1+x)^{2n} = C_{2n+1}^1 + 2x.C_{2n+1}^2 + 3x^2.C_{2n+1}^3 + ... + (2n+1).x^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1} \qquad (1)$

Thay $x=-2$ vào (1) ta được:

$2n+1 = C_{2n+1}^1 - 2.2.C_{2n+1}^2 + 3.2^2.C_{2n+1}^3 - 4.2.C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1).x^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1}$

Từ yêu cầu bài toán ta có : $2n+1 = 2017 \Leftrightarrow n = 2018$.

STUDY TIP : *Nhận biết được cần sử dụng đạo hàm cấp 1 và chọn giá trị $x = x_0$ dựa vào cơ số a^n với chỉ số n tăng dần.*

Ví dụ 5: Tính tổng: $S = 100.C_{100}^0\left(\frac{1}{2}\right)^{99} - 101.C_{100}^1\left(\frac{1}{2}\right)^{100} + ... + 199.C_{100}^0\left(\frac{1}{2}\right)^{198} + 200.C_{100}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{199}$

A. 10. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 100.

Đáp án B.

Lời giải:

Xét $f(x) = (x^2+x)^{100} = x^{100}(1+x)^{100}$

$= x^{100}\left(C_{100}^0 + C_{100}^1 x + C_{100}^2 x^2 + C_{100}^{100} x^{100}\right)$

$= C_{100}^0.x^{100} + C_{100}^1.x^{101} + C_{100}^2 x^{102} + ... + C_{100}^{100} x^{200}$

$\Rightarrow f'(x) = 100(2x+1).(x^2+x)^{99}$

$= 100x^{99}.C_{100}^0 + 101x^{100}.C_{100}^1 + 102x^{101}.C_{100}^2 + ... + 200x^{199}C_{100}^{100}$

Lấy $x = -\frac{1}{2}$ ta được:

$0 = -100\left(\frac{1}{2}\right)^{99} C_{100}^0 + 101\left(\frac{1}{2}\right)^{100} C_{100}^1 - ... - 200\left(\frac{1}{2}\right)^{199} C_{100}^{100} \Leftrightarrow S = 0$.

STUDY TYP : *Xuất phát từ nhị thức $(x^2+x)^{100}$, sau khi dùng đạo hàm cấp 1, chọn $x_0 = -\frac{1}{2}$*

.