Cách 2: Áp dụng tính chất phép quay $Q_{(O,\alpha)}$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' có góc $(\Delta,\Delta')=\alpha$ hoặc $\pi-\alpha$ (đơn vị radian)

Cách 3: Sử dụng quỹ tích

- Với mọi điểm $M(x;y)\in\Delta: Q_{(O,\alpha)}(M)=M'(x';y')$ thì $M'\in\Delta'$

- Từ biểu thức tọa độ rút x,y thế vào phương trình đường thẳng Δ ta được phương trình ảnh Δ'

3. Xác định ảnh của một hình $\mathcal{H}$ (đường tròn, elip, parabol…)

- Sử dụng quỹ tích: Với mọi điểm $M(x;y)$ thuộc hình $\mathcal{H}$, $Q_{(O,\alpha)}(M)=M'(x';y')$ thì $M'(x';y')$ thuộc ảnh $\mathcal{H}'$ của hình $\mathcal{H}$.

- Với đường tròn áp dụng tính chất phép quay biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính hoặc sử dụng quỹ tích.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, Qua phép quay tâm O, góc quay 90^0 biến điểm $M(-3;5)$ thành điểm nào?

A. $(3;4)$ **B.** $(-5;-3)$. **C.** $(5;-3)$. **D.** $(-3;-5)$.

Lời giải:

Đáp án B

$$Q_{(O,90^0)}: M(x;y)\to M'(x';y')\Rightarrow\begin{cases}x'=-y\\y'=x\end{cases}$$

Cách 1: Dùng biểu thức tọa độ $\Rightarrow M':\begin{cases}x'=-5\\y'=-3\end{cases}$

Cách 2: Vẽ biểu diễn tọa độ của điểm trên hệ trục $Oxy\Rightarrow M'(-5;3)$.

Cách 3: Ta có $Q_{(O;90^0)}(M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}OM=OM'\\\overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{OM'}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{34}=\sqrt{x'^2+y'^2}\\-3x'+5y'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=-5\\y'=-3\end{cases}$

Nhận xét: Độc giả vận dụng cách 1 nhanh hơn, các cách 2 và cách 3 khá dễ hiểu nhưng dài hơn.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(1;1)$. Hỏi điểm nào sau đây là ảnh của điểm M qua phép quay tâm $O(0;0)$, góc quay 45^0 ?

A. $M'(0;\sqrt{2})$. **B.** $M'(\sqrt{2};0)$. **C.** $M'(0;1)$. **D.** $M'(1;-1)$.

Lời giải:

Đáp án A

$Q_{(O,90^0)}: M(x;y) \to M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$

Cách 1: Theo biểu thức tọa độ: $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow M'(0;\sqrt{2})$

Góc giữa 2 vecto: $\cos\varphi = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$

Cách 2: $Q_{(O;45^0)} M(x;y) \to M'(x';y') \Leftrightarrow = \begin{cases} OM = OM' \\ (OM, OM') = 45^0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{x'^2+y'^2} \\ \cos 45^0 = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}\sqrt{x'^2+y'^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'^2+y'^2 = 2 \\ x'+y' = \sqrt{2} \end{cases}$$

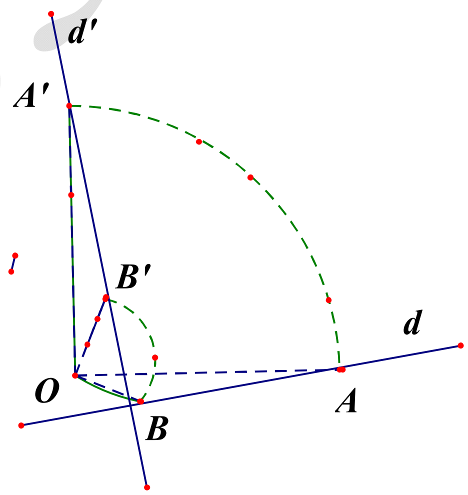
Giải hệ trên $\Rightarrow M'(0;\sqrt{2})$

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $5x-3y+15-0$. Tìm ảnh d' của d qua phép quay $Q_{(O,90^0)}$ với O là gốc tọa độ. ?

A. $5x-3y+6=0$. **B.** $3x+5y+15=0$. **C.** $5x+y-7=0$. **D.** $-3x+5y+7=0$.

Lời giải:

Đáp án B



Cách 1: Chọn $A(0;5) \in d$, $B(-3;0) \in d'$

$Q_{(O,90^0)}(A) = A'(-5;0) \in d'$

$Q_{(O,90^0)}(B)=B'(0;-3)\in d'$

Đường thẳng d' là đường thẳng $A'B':3x+5y+15=0$

Cách 2: Vì góc quay là $90^0 \Rightarrow d\perp d' \Rightarrow d'$ có dạng $3x+5y+c=0$

Chọn $A(0;5)\in d$ qua phép quay $Q_{(O,90^0)}$ ta được $A'(-5;0)\in d' \Rightarrow c=15$

Cách 3: Sử dụng quỹ tích

Với mọi điểm $M(x;y)\in d$ ta có $Q_{(O,90^0)}(M)=M'(x';y')\in d'$

Từ biểu thức tọa độ $\begin{cases} x'=-y \\ y'=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y' \\ y=-x' \end{cases}$ .Thế x,y vào phương trình đường thẳng d ta được d':

$d':3x+5y+15=0$

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của $(C):x^2+y^2-2x+4y-4=0$ qua phép quay $Q_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}$.

A. $(x+2)^2+(y+1)^2=9$. **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2=9$.

C. $(x-2)3^2+(y+1)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2=9$.

Lời giải:

Đáp án A

Cách 1: Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$.

$Q_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}(I)=I' \Rightarrow I'(-2;-1)$

Đường tròn (C') có tâm $I'(-2;-1)$, bán kính $R'=R=3$ có phương trình: $(x+2)^2+(y+1)^2=9$

Cách 2: Phương pháp quỹ tích

Ta có $Q_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}:M(x;y)\to M'(x';y')$ với $\forall M\in(C)\Rightarrow M'\in(C')$

Từ biểu thức tọa độ $\begin{cases} x'=y \\ y'=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y' \\ y=x' \end{cases}$

Thế vào $(C):(-y')^2+(x')^2+2y'+4x'-4=0$

$\Leftrightarrow (x')^2 + (y')^2 + 4x' + 2y' - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x'+2)^2 + (y'+1)^2 = 9$

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(-2;3), A'(1;5)$ và $B(5;-3), B'(7;-2)$. Phép quay tâm $I(x;y)$ biến A thành A' và B thành B', ta có $x+y$ bằng:

A. -1. **B.** 2 **C.** 1 **D.** -3

Lời giải:

Đáp án D

$Q_{(O,\alpha)}(A) = A' \Rightarrow IA = IA'\ (1)$

$Q_{(O,\alpha)}(B) = B' \Rightarrow IB = IB'\ (2)$

Từ $(1)\, và\, (2) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(-2-x)^2 + (3-y)^2} = \sqrt{(1-x)^2 + (5-y)^2} \\ \sqrt{(5-x)^2 + (-3-y)^2} = \sqrt{(7-x)^2 + (-2-y)^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 13 \\ 4x + 12y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{25}{2} \\ y = -\dfrac{31}{2} \end{cases} \Rightarrow x + y = -3$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

DẠNG 1: KHAI THÁC ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ ỨNG DỤNG CỦA PHÉP QUAY

Câu 1: Cho 2 đường thẳng bất kì d và d'. Có bao nhiêu phép quay biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. không có phép nào. **B.** có 1 phép duy nhất.

C. chỉ có 2 phép. **D.** có vô phép số.

Câu 2: Cho hình vuông tâm O. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α, $0 \le \alpha < 2\pi$ biến hình vuông thành chính nó ?

A. 1 . **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 4.

Câu 3: Gọi d' là hình ảnh của d qua tâm I góc quay φ (biết I không nằm trên d), đường thẳng d' song với d khi:

A. $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. **C.** $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. **D.** $\varphi = -\pi$.

Câu 4: Cho hai đường tròn cùng bán kính (O) và (O') tiếp xúc ngoài nhau. Có bao nhiêu phép quay góc 90° biến hình tròn (O) thành (O')?

A. 0 . **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** Vô số.

Câu 5: Cho hình lục giác đều $ABCDE$ tâm O . Tìm ảnh của tam giác AOF qua phép quay tâm O góc quay 120^0.

A. ΔOAB. **B.** ΔBOC. **C.** ΔDOC. **D.** ΔEOD.

Câu 6: Chọn 12 giờ làm mốc, khi đồng hồ chỉ năm giờ đúng thì kim giờ đã quay được một góc bao nhiêu độ ?

A. 270^0. **B.** -360^0. **C.** -150^0. **D.** 135^0.

Câu 7: Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 biết $Q_{(O;-120^0)}(\Delta_1)=\Delta_2$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A $(\Delta_1,\Delta_2)=120^0$. **B.** $\Delta_1 // \Delta_2$. **C.** $(\Delta_1,\Delta_2)=-120^0$. **D.** $(\Delta_1,\Delta_2)=60^0$.

Câu 8: Cho hai điểm phân biệt A,B và $Q_{(A;30^0)}(B)=C$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $ABC=30^0$. **B.** $ABC=90^0$. **C.** $ABC=45^0$. **D.** $ABC=75^0$.

Câu 9: Cho hai điểm phân biệt I,M và $Q_{(I;-32\pi)}(M)=N$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. M là trung điểm của đoạn IN.
B. N là trung điểm của đoạn IM .
C. I là trung điểm của đoạn MN.
D. $M\equiv N$.

Câu 10: Cho ΔABC đều (thứ tự các đỉnh theo chiều dương lượng giác). Kết luận nào sau đây sai ?

A. $Q_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(B)=C$. **B.** $Q_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)}(C)=B$. **C.** $Q_{\left(A,\frac{7\pi}{3}\right)}(C)=B$. **D.** $Q_{\left(A,-\frac{7\pi}{3}\right)}(A)=C$.

Câu 11: Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$ (thứ tự các đỉnh theo chiều dương lượng giác). Kết luận nào sau đây sai ?

A. $Q_{(I,90^0)}(\Delta IBC)=\Delta ICD$.
B. $Q_{(I,-90^0)}(\Delta IBC)=\Delta IAB$.
C. $Q_{(I,180^0)}(\Delta IBC)=\Delta IDA$.
D. $Q_{(I,360^0)}(\Delta IBC)=\Delta IDA$.

Câu 12: Gọi I là tâm ngũ giác đều $ABCDE$ (thứ tự các đỉnh theo chiều dương lượng giác). Kết luận nào sau đây là sai ?

A. $Q_{(I,144^0)}(CD)=EA$. **B.** $Q_{(I,72^0)}(AB)=BC$. **C.** $Q_{(I,144^0)}(AB)=DE$. **D.** $Q_{(I,72^0)}(CD)=BC$.

Câu 13: Gọi I là tâm lục giác đều $ABCDEF$ (thứ tự các đỉnh theo chiều dương lượng giác). Kết luận nào sau đây là sai ?

A. $Q_{(I,-120^0)}(\Delta IED)=\Delta IBA$.
B. $Q_{(I,-60^0)}(\Delta IAB)=\Delta IBC$.
C. $Q_{(I,60^0)}(AB)=BC$.
D. $Q_{(I,180^0)}(\Delta ICD)=\Delta IFA$.

Câu 14: Cho hai tam giác vuông cân OAB và $OA'B'$ có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn AB' và nằm ngoài đoạn thẳng $A'B$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác OAA' và OBB'. Xác định dạng của tam giác GOG'

A. cân. **B.** vuông. **C.** vuông cân. **D.** đều.

Câu 15: Cho 3 điểm A, B, C, điểm B nằm giữa A và C . Dựng về phía đường thẳng AC các tam giác đều ABE và BCF . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và EC . Xác định dạng của ΔBMN.

A. cân. **B.** vuông. **C.** vuông cân. **D.** đều.

Câu 16: Cho đường thẳng d và điểm O cố định không thuộc d. M là điểm di động trên d. Xác định quỹ tích điểm N sao cho ΔOMN đều.

A. $N \in d'$ với $d' = Q_{(O,60^\circ)}(d)$.
B. $N \in d'$ với $d' = Q_{(O,180^\circ)}(d)$.
C. $N \in d'$ với $d' = Q_{(O,120^\circ)}(d)$.
D. $N \in d'$ với $d' = Q_{(O,-120^\circ)}(d)$.

Câu 17: Cho hình vuông $ABCD$, $M \in BC$, $K \in DC$ sao cho $\widehat{BAM} = \widehat{MAK}$. Khi đó mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $AD = AK - KD$. **B.** $AB = AM + DK$. **C.** $AK = BM + KD$. **D.** $AM = BM + AB$.

Câu 18: Cho ΔABC. Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông $BCIJ$, $ACMN$. Gọi O, P lần lượt là tâm đối xứng của chúng, D là trung điểm của AB. Xác định dạng của ΔDOP.

A. cân. **B.** vuông. **C.** vuông cân. **D.** đều.

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH ẢNH CỦA ĐIỂM, ĐƯỜNG QUA PHÉP QUAY BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(x;y)$. Biểu thức tọa độ của điểm $A' = Q_{(O,90^0)}(A)$ là:

A. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(x;y)$. Biểu thức tọa độ của điểm $A' = Q_{(O,-90^0)}(A)$ là:

A. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(x;y)$. Biểu thức tọa độ của điểm $A' = Q_{(O,\varphi)}(A)$ là:

A. $\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x' = x\sin\varphi - y\cos\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \end{cases}$.

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(4;1)$. Biểu thức tọa độ của điểm $A' = Q_{(O,-90^0)}(A)$ là:

A. $A(-1;4)$. **B.** $A(1;-4)$. **C.** $A(4;-1)$. **D.** $A(-4;-1)$.

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(x;y)$. Biểu thức tọa độ của điểm $A' = Q_{(O,60^0)}(A)$ là:

A. $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$.

Câu 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ tâm $I(1;2)$, biết điểm $A(4;5)$. Khi đó với $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$, $D(x_D;y_D)$ thì $x_B.x_C.x_D$ bằng:

A. 12. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 32.