Câu 20. **[NB-TH]**Cho hàm số $y=\cos 2x+\sin 2x.\tan x,\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số không đổi trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

B. Hàm số luôn tăng trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số luôn giảm trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số đơn điệu trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ (vừa tăng, vừa giảm trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$).

Hướng dẫn giải

+) Xét trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$$y=\cos 2x+\sin 2x.\tan x=\frac{\cos 2x.\cos x+\sin 2x.\sin x}{\cos x}=1\Rightarrow y'=0$$

+) Hàm số không đổi trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

1.1.2 Tìm tham số, để hàm số đơn điệu.

Câu 21. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định ?

A. $m<1$. B. $m\le -3$. C. $m\le 1$. D. $m<-3$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

+) $y'=\frac{m-1}{(x+1)^2}$

+) Để hàm số giảm trên các khoảng mà nó xác định $\Leftrightarrow y'<0,\forall x\ne -1\Leftrightarrow m<1$

Câu 22. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-3)x-m+2$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-3\le m\le 1$. B. $m\le 1$. C. $-3<m<1$. D. $m\le -3;m\ge 1$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

+) $y' = -x^2 - 2mx + 2m - 3$

+) Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y' \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \ \ (hn) \\ m^2 + 2m - 3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le m \le 1$$

Câu 23. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - (m+1) + 2m - 1}{x - m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó?

A. $m \le 1$. B. $m > 1$. C. $m < 1$. D. $m \ge 1$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

+) $y' = \dfrac{x^2 - 2mx + m^2 - m + 1}{(x-m)^2}$

+) Để hàm số tăng trên từng khoảng xác định của nó

$\Leftrightarrow y' \ge 0,\ \forall x \in D \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 \ge 0, \forall x \in D$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \ge 0\,(hn) \\ m - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 1$

Câu 24. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = x + m\cos x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $|m| \le 1$. B. $m > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. C. $|m| \ge 1$. D. $m < \dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = 1 - m\sin x$

+) Đặt $t = \sin x, t \in [-1;1] \Rightarrow y' = 1 - mt = g(t)$

+) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow g(t) = 1 - mt \ge 0, \forall t \in [-1;1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(-1) \ge 0 \\ g(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -1 \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 1$$

Câu 25. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m \in \left[-4;\frac{2}{3}\right]$. B. $m \geq 2$. C. $\begin{cases} m > 3 \\ m \neq 1 \end{cases}$. D. $m \in \left(-\infty;2\right]$.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

+) $y' = m-3+(2m+1)\sin x$

+) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow (2m+1)\sin x \leq 3-m$

Trường hợp 1: $m = -\frac{1}{2}$ ta có $0 \leq \frac{7}{2}$ (hn). Vậy hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $m < -\frac{1}{2}$ ta có $\sin x \geq \frac{3-m}{2m+1}, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1} \leq -1$

$\Leftrightarrow 3-m \geq -2m-1 \Leftrightarrow m \geq -4$

Trường hợp 3: $m > -\frac{1}{2}$ ta có $\sin x \leq \frac{3-m}{2m+1}, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1} \geq 1$

$\Leftrightarrow 3-m \geq 2m+1 \Leftrightarrow m \leq \frac{2}{3}$

+) Vậy $m \in \left[-4;\frac{2}{3}\right]$

Cách 2:

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

+) $y' = m-3+(2m+1)\sin x$

+) Đặt $t = \cos x, t \in \left[-1;1\right] \Rightarrow y' = m-3+(2m+1)t = g(t)$

+) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow g(t) = m-3+(2m+1)t \leq 0, \forall t \in \left[-1;1\right]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(-1) \leq 0 \\ g(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -4 \\ m \leq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq \frac{2}{3}$$

Câu 26. **[NB-TH]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 6(m+1)x - 3m + 5 = 0$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 0. B. -1. C. 2. D. 1.

Hướng dẫn giải

+) Tính nhanh, ta có $f^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = m+1 \end{array}\right.$

+) Phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm kép khi $m=0$, nghĩa là hàm số luôn đồng biến.

+) Trường hợp $m\neq 0$, phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt (không thỏa yên cầu bài toán).

Câu 27. **[VD]**Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}+mx^2-mx-m$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m=-1$. B. $m=0$. C. $m=-5$. D. $m=-6$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

+) $y'=x^2+2mx-m$

+) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}1>0 (hn)\\ m^2+m\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow -1\leq m\leq 0$

+) Vậy giá trị nhỏ nhất của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $m=-1$

Câu 28. **[VD]**Tìm số nguyên m nhỏ nhất sao cho hàm số $y=\dfrac{(m+3)x-2}{x+m}$ luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó?

A. Không có m. B. $m=-2$. C. $m=0$. D. $m=-1$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

+) $y'=\dfrac{m^2+3m+2}{(x+m)^2}$

+) Yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow y'<0,\forall x\in D \Leftrightarrow m^2+3m+2<0 \Leftrightarrow -2<m<-1$

+) Vậy không có số nguyên m nào thuộc khoảng $(-2;-1)$.

Câu 29. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty;1)$?

A. $-2<m\leq -1$. B. $-2\leq m\leq -1$. C. $-2<m<2$. D. $-2\leq m\leq 2$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

+) $y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$

+) Để hàm số giảm trên khoảng $\left(-\infty;1\right) \Leftrightarrow y'<0, \forall x \in \left(-\infty;1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ 1 \le -m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow -2<m\le -1$$

Câu 30. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $m\ge 12$. B. $m\le 12$. C. $m\ge 0$. D. $m\le 0$.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

+) $y'=3x^2-12x+m$

Trường hợp 1: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y'\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3>0\ (hn) \\ 36-3m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\ge 12$$

Trường hợp 2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa $x_1<x_2\le 0\,(*)$

Trường hợp 2.1: $y'=0$ có nghiệm $x=0$ suy ra $m=0$. Nghiệm còn lại của $y'=0$ là $x=4$ (không thỏa (*))

Trường hợp 2.2: $y'=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa

$$x_1<x_2<0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ S<0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36-3m>0 \\ 4<0 (vl) \\ \dfrac{m}{3}>0 \end{cases} \Rightarrow \text{không có } m$$

+) Vậy $m\ge 12$

Cách 2:

+) Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow m\ge 12x-3x^2=g(x), \forall x\in(0;+\infty)$.

+) Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty)$.

x	0		2		$+\infty$
g'		+	0	-	
g		$\nearrow$	12	$\searrow$	

	0	$-\infty$

+) Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \ge \max g(x) \Leftrightarrow m \ge 12$

Câu 31. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. $m \in \left(-\infty;2\right]$. B. $m \in \left[-5;2\right)$. C. $m \in \left(2,+\infty\right)$. D. $m \in \left(-\infty;-5\right)$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

+) $y' = 4x^3 - 4(m-1)x$.

+) Hàm số đồng biến trên $(1;3)$

$\Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in (1;3) \Leftrightarrow g(x) = x^2 + 1 \ge m, \forall x \in (1;3)$.

+) Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;3)$.

x	1		3
g'		+	0
g	2	$\nearrow$	10

+) Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \le \min g(x) \Leftrightarrow m \le 2$.

Câu 32. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

A. $m = -1; m = 9$. B. $m = -1$. C. $m = 9$. D. $m = 1; m = -9$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = x^2 - mx + 2m$

+) Ta không xét trường hợp $y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$ vì $a = 1 > 0$

+) Hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3 $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 8 \text{ hay } m < 0 \\ m^2 - 8m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1 \text{ hay } m = 9$$

Câu 33. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{1 - \sin x}{\sin x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{6}\right)$?

A. $m \le 0; \dfrac{1}{2} \le m < 1$. B. $m \le 0; \dfrac{1}{2} \le m \le 1$. C. $m < 1$. D. $m \le 1$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sin x, t \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow f(t) = \dfrac{1 - t}{t - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

+) Hàm số nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f'(t) = \dfrac{m - 1}{(t - m)^2} < 0, \forall t \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0 \text{ hoặc } \dfrac{1}{2} \le m < 1$$

Câu 34. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$?

A. $m \le 0; 1 \le m < 2$. B. $1 \le m < 2$. C. $m \ge 2$. D. $m \le 0$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \tan x, t \in (0;1) \Rightarrow f(t) = \dfrac{t - 2}{t - m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

+) Hàm số đồng biến trên $(0;1) \Leftrightarrow f'(t) = \dfrac{-m + 2}{(t - m)^2} > 0, \forall t \in (0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m + 2 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0 \text{ hoặc } 1 \le m < 2$$

Câu 35. **[VD]**Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ giảm trên nửa khoảng $[1; +\infty)$?

A. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right]$. B. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right)$. C. $\left[-2; -\frac{14}{15}\right]$. D. $\left[-\frac{14}{15}; +\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D=\mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$mx^2+14mx+14\le 0,\forall x\ge 1$, tương đương với $g(x)=\dfrac{-14}{x^2+14x}\ge m$ (1)

+) Dễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x\in\left[1;+\infty\right)$

suy ra $\min\limits_{x\ge 1} g(x)=g(1)=-\dfrac{14}{15}$

+) Kết luận: $(1)\Leftrightarrow \min\limits_{x\ge 1} g(x)\ge m\Leftrightarrow -\dfrac{14}{15}\ge m$

Câu 36. **[VD]**Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty;\frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\dfrac{p}{q}$ tối giản và $q>0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 7. B. 9. C. 5. D. 3.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D=$ □ .

+) $y'=-4x^3+2(2m-3)x$.

+) Hàm số nghịch biến trên $(1;2)$

$\Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in(1;2)\Leftrightarrow m\le x^2+\dfrac{3}{2}=g(x),\forall x\in(1;2)$.

+) Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;2)$.

+) $g'(x)=2x=0\Leftrightarrow x=0$

+) BBT

x	1		2
g'		$+$	0
g			$\dfrac{11}{2}$
		$\nearrow$	
	$\dfrac{5}{2}$		

+) Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \le \min g(x) \Leftrightarrow m \le \frac{5}{2}$

+) Vậy $p+q=5+2=7$.

Câu 37. **[VD]**Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{x^2-2mx+m+2}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. Vô số. B. Bốn. C. Hai. D. Không có.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

+) $y'=\frac{x^2-2mx+2m^2-m-2}{(x-m)^2}=\frac{g(x)}{(x-m)^2}$.

+) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $g(x)\ge 0, \forall x\in D$.

+) Điều kiện tương đương là $\Delta_{g(x)}=-m^2+m+2\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$

+) Kết luận: Có vô số giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 38. **[VD]**Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

+) $y'=\frac{2x^2-4mx+m^2-2m-1}{(x-m)^2}=\frac{g(x)}{(x-m)^2}$

+) Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x)\ge 0, \forall x>1$ và $m\le 1$ (1)

Vì $\Delta'_g=2(m+1)^2\ge 0, \forall m$ nên (1)

$\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm thỏa $x_1\le x_2\le 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases} 2g(1)=2(m^2-6m+1)\ge 0 \\ \frac{S}{2}=m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\le 3-2\sqrt{2}\approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.