Đáp án B.

Gọi M là trung điểm BB'.

Ta có: $A'M \parallel KC$ nên $d(CK;A'D) = d(CK;(A'MD)) = d(K;(A'MD))$.

Gọi $N = AK \cap A'D$, $P = AB \cap A'M$. Khi đó $\dfrac{d(K;(A'MD))}{d(A;(A'MD))} = \dfrac{NK}{NA} = \dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow d(CK;A'D) = \dfrac{1}{2}d(A;(A'MD)) = \dfrac{1}{2}d(A;(A'DP))$.

Tứ diện đều $AA'DP$ vuông tại A nên:

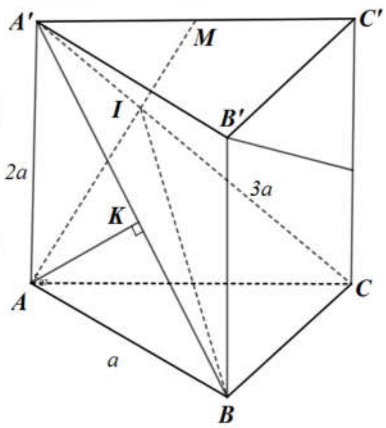
$$\frac{1}{d^2(A;(A'DP))} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AP^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{9}{4a^2}$$

$\Rightarrow d(A;(A'DP)) = \dfrac{2a}{3} \Rightarrow d(CK;A'D) = \dfrac{a}{3}$.

Ví dụ 6. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC).

A. $2a\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{3a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải



Đáp án B.

Ta có: $AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = a\sqrt{5}$

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$

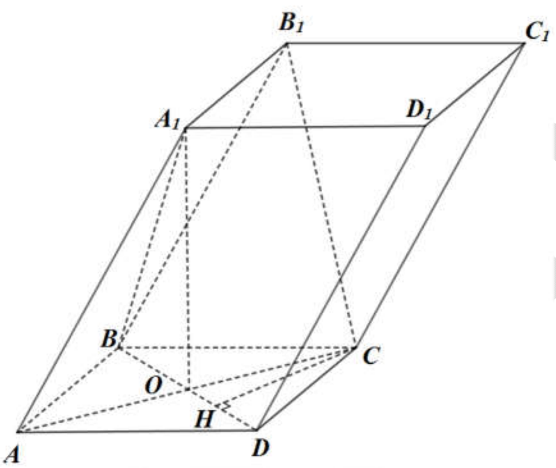
Hạ $AK \perp A'B$ $(K \in A'B)$ vì $BC \perp (ABB'A')$ nên $AK \perp BC \Rightarrow AK \perp (IBC)$.

$\Rightarrow d(A;(IBC)) = AK = \dfrac{2S_{AA'B}}{A'B} = \dfrac{AA'.AB}{\sqrt{AA'^2 + AB^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 7. Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó $A_1O \perp (ABCD)$.

Ta có: $B_1C \parallel A_1D \Rightarrow B_1C \parallel (A_1BD)$

$\Rightarrow d(B_1;(A_1BD)) = d(C;(A_1BD))$.

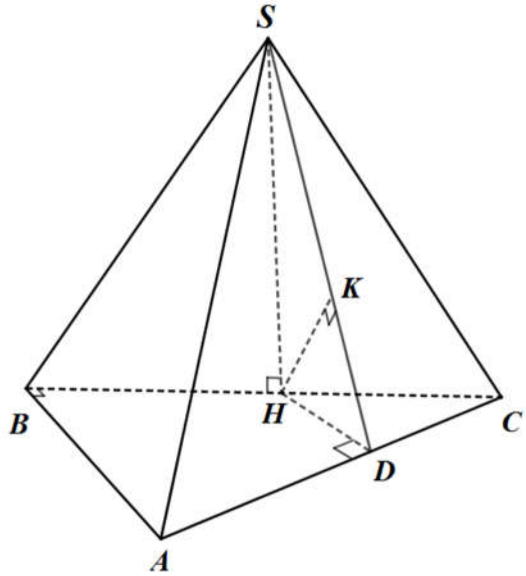
Kẻ $CH \perp BD$ thì $CH \perp (A_1BD)$

$\Rightarrow d(B_1;(A_1BD)) = CH = \dfrac{CD.CB}{\sqrt{CD^2 + CB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = 3a$, $BC = 4a$, mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30°$. Tính $d(B;(SAC))$.

A. $\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$. **B.** $6a\sqrt{7}$. **C.** $\dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $a\sqrt{7}$.

Lời giải



Đáp án C.

Kẻ $SH \perp BC\left(H \in BC\right)$ do $\left(SBC\right) \perp \left(ABC\right)$ nên $SH \perp \left(ABC\right)$.

Ta có: $SH = SB.\sin 30° = a\sqrt{3}$

Kẻ $HD \perp AC\left(D \in AC\right)$, kẻ $HK \perp SD\left(K \in SD\right)$.

Khi đó $HK = d\left(H;\left(SAC\right)\right)$

Vì $BH = SB.\cos 30° = 3a$ nên $BC = 4HC \Rightarrow d\left(B;\left(SAC\right)\right) = 4d\left(H;\left(SAC\right)\right)$

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a$

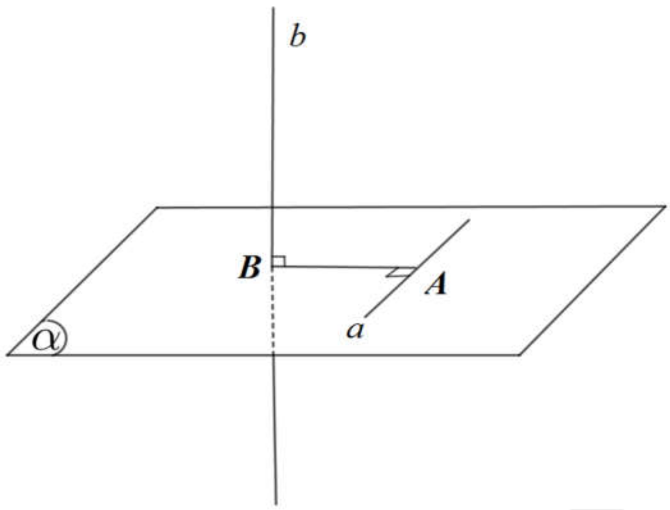
$$HC = BC - BH = a \Rightarrow HD = AB.\frac{HC}{AC} = \frac{3a}{5} \Rightarrow HK = \frac{SH.HD}{\sqrt{SH^2 + HD^2}} = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$$

Vậy $d\left(B;\left(SAC\right)\right) = 4HK = \dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$.

*** Chú ý 1:**

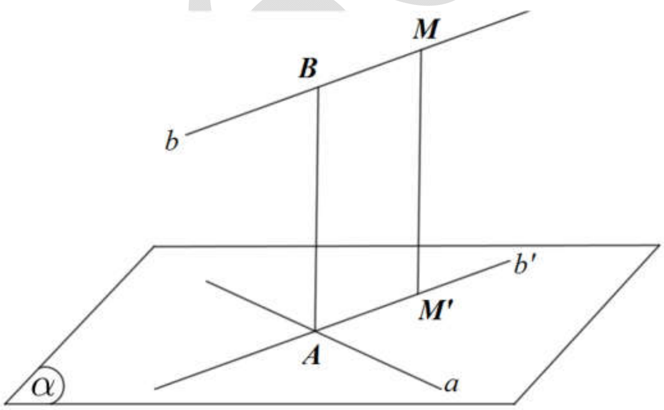
Xác định đoạn vuông góc chung, tính khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau.

TH1: Giả sử hai đường thẳng a và b chéo nhau và vuông góc với nhau. Ta dựng mp $\left(\alpha\right)$ chứa a và vuông góc với b tại B. Trong mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ dựng $BA \perp a$ tại A.Khi đó độ dài đoạn thẳng BA là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.



TH2: Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau.

- Ta dựng mp (α) chứa a và song song với b.
- Lấy một điểm M tùy ý trên b dựng $MM' \perp (\alpha)$ tại M'.
- Từ M' dựng đường thẳng $b' \| b$ cắt a tại A.
- Từ A dựng $AB \| MM'$ cắt b tại B khi đó đoạn thẳng AB gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.



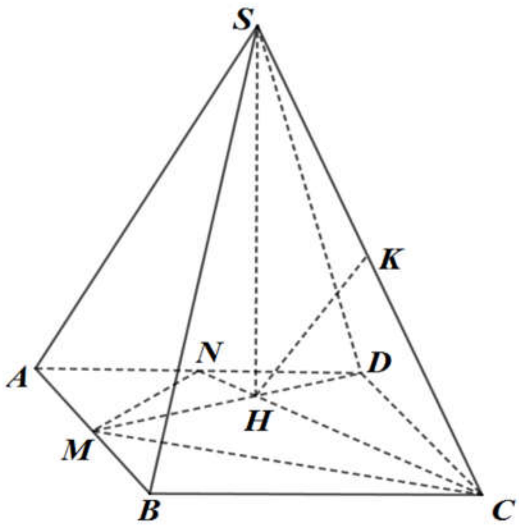
*** Chú ý 2:**

Thông thường bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau quy về tính khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng. Như TH2 nói trên thì $d(a;b) = d(b;(\alpha)) = d(M;\alpha)$.

Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với $ABCD$ mặt phẳng và $SH = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

A. $\dfrac{2\sqrt{3}a}{19}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải



Đáp án B.

Ta có: $\Delta ADM = \Delta DCN$ nên $\widehat{ADM} = \widehat{DCN} \Rightarrow DM \perp CN$

Có $DM \perp SH \Rightarrow DM \perp (SHC)$

Hạ $HK \perp SC$ tại $K \Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của DM và SC

Do đó $d(DM;SC) = HK$

Trong tam giác vuông CND ta có:

$$CH.CN = CD^2 \Rightarrow CH = \frac{CD^2}{CN} = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

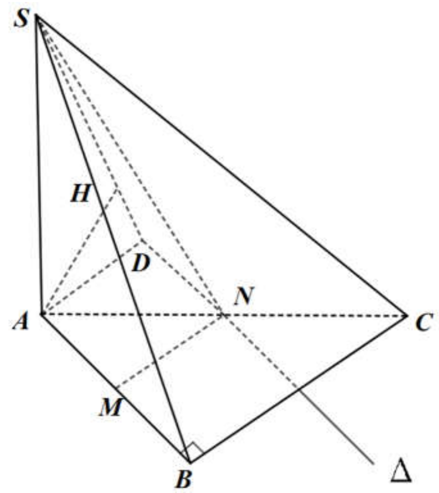
Mặt khác $HK.SC = SH.HC$

$$\Rightarrow HK = \frac{SH.HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \frac{a\sqrt{3}.\frac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{3a^2 + \frac{4a^2}{5}}} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{\sqrt{5}.\sqrt{\frac{19a^2}{5}}} = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

Ví dụ 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB, mặt phẳng (ABC) đi qua SM và song song với BC cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

A. $\frac{2a\sqrt{39}}{\sqrt{13}}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{11}}{13}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{11}}{\sqrt{13}}$.

Lời giải



Đáp án B.

Ta có: (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên $SA \perp (ABC)$. Từ $AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC$ nên $\widehat{SBA}$ là góc giữa (SBC) và (ABC).

Từ đó $\widehat{SBA} = 60°$; $SA = AB.\tan\widehat{SBA} = 2a\sqrt{3}$

Kẻ đường thẳng Δ đi qua N, song song với AB.

Hạ $AD \perp \Delta\ (D \in \Delta) \Rightarrow AB \parallel (SND) \Rightarrow d(AB;SN) = d(AB;(SND)) = d(A;(SND))$

Dựng $AH \perp SD$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SND) \Rightarrow d(A;(SND)) = AH$.

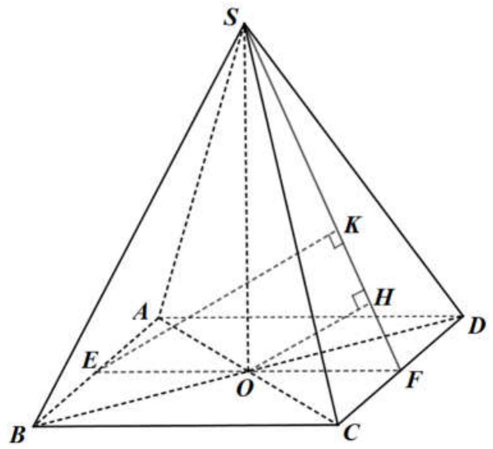
Tam giác SAD vuông tại A, có $AH \perp SD$ và $AD = \dfrac{BC}{2} = a$

$d(AB;SN) = AH = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Ví dụ 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$. Tam giác SAC cân tại S có đường cao $SO = a\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $2a\sqrt{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** a.

Lời giải



Đáp án C.

Tam giác SAC cân tại S có $SO \perp AC$ và $(SAC) \perp (ABC)$ nên $SO \perp (ABC)$.

Gọi D là điểm đối xứng với B qua O, khi đó $ABCD$ là hình vuông nên $AB \parallel CD$

$\Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(AB;SC) = d(AB;(SCD))$

Gọi E là trung điểm của $AB \Rightarrow d(AB;(SCD)) = d(E;(SCD))$

Gọi F là trung điểm của CD.

Kẻ $OH \perp SF \, (H \in SF)$ thì $OH \perp (SCD) \Rightarrow d(O,(SCD)) = OH$.

Dựng $EK \parallel OH \, (K \in SF) \Rightarrow EK \perp (SCD)$

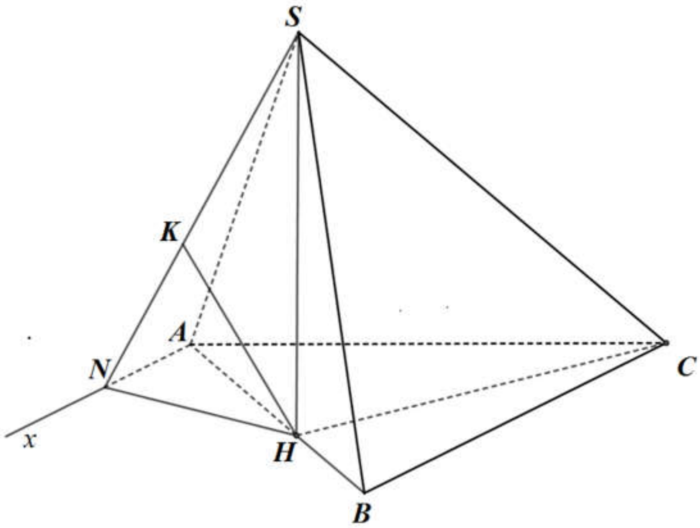
$\Rightarrow d(E;(SCD)) = EK$ và $EK = 2OH$ mà $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OF^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{4}{3a^2}$

$\Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow EK = d(AB;SC) = 2OH = a\sqrt{3}$

Ví dụ 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

A. $\dfrac{a\sqrt{42}}{8}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{12}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{42}}{10}$.

Lời giải



Đáp án A.

Ta có: $\widehat{SCH}=\left(\widehat{SC;(ABC)}\right)=60°$

Kẻ $Ax \parallel BC$.

Gọi N và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên Ax và SN.

Ta có $BC \parallel (SAN)$ và $BA=\frac{3}{2}$ nên $d(SA;BC)=d(B,(SAN))=\frac{3}{2}d(H,(SAN))$.

Ta cũng có $Ax \perp (SHN)$ nên $Ax \perp HK$.

Do đó $HK \perp (SAN) \Rightarrow d(H,(SAN))=HK$

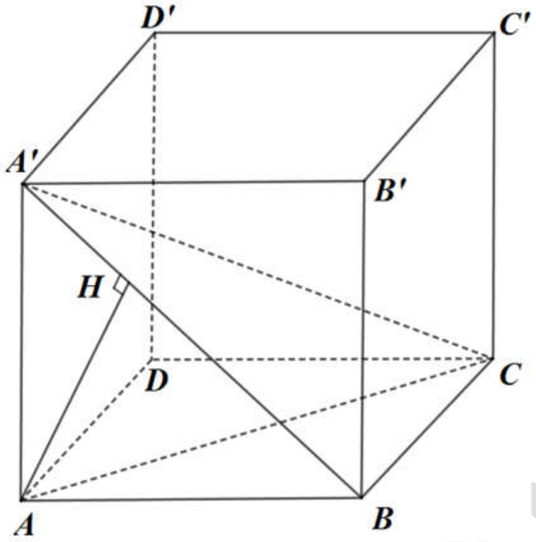
$$AH=\frac{2a}{3},\ HN=AH.\sin 60°=\frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow HK=\frac{SH.HN}{\sqrt{SH^2+HN^2}}=\frac{a\sqrt{42}}{12}$$

Vậy $d(SA;BC)=\frac{a\sqrt{42}}{8}$.

Ví dụ 13. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác vuông cân $A'AC$, $A'C=a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD') theo a.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Đáp án C.

$\Delta A'AC$ vuông cân tại A và $A'C = a$ nên $AA' = AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AB = B'C' = \dfrac{a}{2}$.

Gọi H là chân đường cao kẻ A từ của $\Delta A'AB$.

Do đó $d\left(DM;SC\right) = HK$

Ta có $AH \perp A'B$ và $AH \perp BC$ nên $AH \perp \left(A'BC\right)$ hay $AH \perp \left(BCD'\right)$

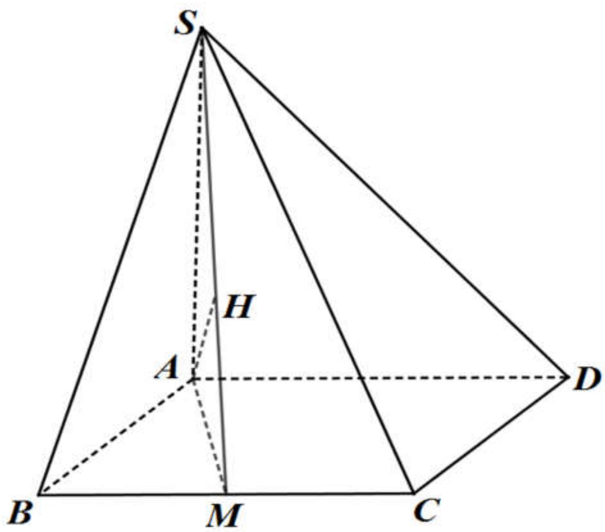
Do đó $AH = d\left(A;\left(BCD'\right)\right)$.

Ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{6}{a^2} \Rightarrow d\left(A,\left(BCD'\right)\right) = AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Ví dụ 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $\widehat{BAD} = 120°$, M là trung điểm của cạnh BC và $\widehat{SMA} = 45°$. Tính theo a khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$.

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Đáp án B.

Ta có: $\widehat{BAD}=120°$, $\widehat{ABC}=60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Do $AD \parallel BC$ nên $d\left(D;\left(SBC\right)\right)=d\left(A;\left(SBC\right)\right)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SM .

Ta có: $AM \perp BC$ và $SA \perp BC \Rightarrow BC \perp \left(SAM\right)$

$\Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp \left(SBC\right) \Rightarrow d\left(A;\left(SBC\right)\right)=AH$

Ta có: $AH=\dfrac{AM.\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow d\left(D,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

STUDY TIP

Nếu ta công nhận công thức tính thể tích của khối chóp mà sau này ta học ở lớp 12 thì ta còn có một cách khác để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng vì:

$V=\dfrac{1}{3}B.h \Rightarrow h=\dfrac{3V}{B}$

Với B là diện tích đáy

h Là chiều cao

V Là thể tích khối chóp.

Ví dụ 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC}=30°$, SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $\left(SAB\right)$.

A. $\dfrac{a\sqrt{13}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{39}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

Lời giải

Đáp án D.

Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow SH \perp BC$.

Mà $\left(SBC\right) \perp \left(ABC\right)$ theo giao tuyến BC nên $SH \perp \left(ABC\right)$.