A. Tứ giác lồi có các cặp cạnh đối cắt nhau. **B.** Hình thoi.
C. Hình thang cân. **D.** Hình bình hành.

b) Đặt $AM = x\ (0 \le x \le a)$. Tìm x theo a để diện tích tứ giác $HKNM$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 0. **B.** a. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có cạnh đáy AB và CD. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD,BC. G là trọng tâm của tam giác SAB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (IJG) là một tứ giác. Tìm điều kiện của AB,CD để thiết diện đó là hình bình hành?

A. $AB = 3CD$. **B.** $AB = 2CD$. **C.** $CD = 2AB$. **D.** $CD = 3AB$.

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,BD. E là một điểm trên cạnh AD (E khác A,D). Tìm điều kiện của tứ diện $ABCD$ và điểm E sao cho thiết diện của hình chóp cắt bởi (IJE) là hình thoi?

A. $AB = CD, \overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{ED}$. **B.** $AD = BC, \overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{ED}$.

C. $AB = CD, \overrightarrow{EA} = -2\overrightarrow{ED}$. **D.** $AD = BC, \overrightarrow{EA} = -2\overrightarrow{ED}$.

Câu 25. Số đo góc giữa hai đường thẳng bằng $0°$ thì hai đường thẳng đó:

A. Song song. **B.** Chéo nhau.
C. Trùng nhau. **D.** Song song hoặc trùng nhau.

Câu 26. Bạn Tùng Chi xác định góc giữa hai đường thẳng a,b trong không gian như sau:

Bước 1: Lấy điểm O bất kì. Qua O dựng đường thẳng m song song với a. Trên đường thẳng m lấy điểm A khác O.

Bước 2: Dựng đường thẳng n song song với song song với b. Trên đường thẳng m lấy điểm B khác O.

Bước 3: Góc giữa hai đường thẳng a và b chính là góc $\widehat{AOB}$.

Hỏi bạn Tùng Chi có làm đúng không, nếu sai thì sai ở bước nào?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bạn làm đúng.

Câu 27. Cho ba đường thẳng a,b,c sao cho $a // b, b \perp c$. Khi đó góc giữa hai đường thẳng a và c bằng:

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Câu 28. Cho hình chóp $A.BCD$ có các tam giác ABC, ABD đều cạnh a, E là trung điểm của CD. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AD và BC biết rằng $\widehat{AEB} = 90°$.

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a, \widehat{ASB} = \widehat{SAD} = 90°$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của các đoạn AB,BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SE và DF.

A. $\frac{7}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 3a, SA = a\sqrt{3}$. Các tam giác SAB,SAC,SAD vuông tại A. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SC và BD.

A. $\frac{8}{\sqrt{130}}$. **B.** $\frac{4}{\sqrt{130}}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 5, AC = 7, BD = \sqrt{57}, CD = 9$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng BC và AD?

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = a, \widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60°, \widehat{CAD} = 90°$. Gọi E là trung điểm của đoạn BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và ED.

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{10}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Đáp án D.

• Đáp án A sai. Giả sử c cắt a,b lần lượt tại A,B, d cắt a,b lần lượt tại C,D. Suy ra A,B,C,D đồng phẳng, hay a,b đồng phẳng, vô lí.

• Đáp án B, C sai, chúng ta có thể dễ dàng thấy một ví dụ là tứ diện $ABCD$ có AB và CD đều cắt hai đường thẳng chéo nhau AD và BC.

Câu 2. Đáp án C.
Câu 3. Đáp án B.
Câu 4. Đáp án D.
Câu 5. Đáp án D.
Câu 6. Đáp án B.
Câu 7. Đáp án C.
Câu 8. Đáp án D.

• Đáp án A sai vì nếu (a,b) và (a,c) không trùng nhau thì a,b,c đôi một phân biệt. theo tính chất bắc cầu suy ra $b // c$.

• Đáp án B, C sai, vì ta có thể lấy ví dụ $b \equiv c$.

Câu 9. Đáp án B.

• Trường hợp (1) có thể xảy ra giữa hai đường thẳng a,b là chéo nhau, song song, cắt nhau.

• Trường hợp (2) có thể là song song, cắt nhau.

• Trường hợp (3) có thể là song song, cắt nhau hoặc trùng nhau.

Như vậy, tương ứng với mối trường hợp, số các khả năng có thể xảy ra giữa a,b là $3,2,3$.

Câu 10. Đáp án C.

Nhìn vào hình vẽ, ta thấy a,b chéo nhau, nên không có mặt phẳng nào chứa cả a,b. Do đó (1) sai. Vậy đáp án A, B, C sai.

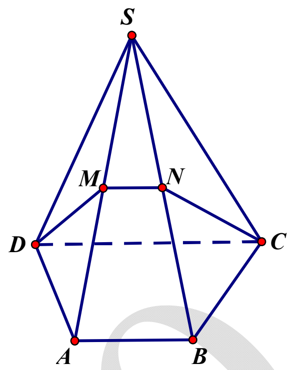
Đường thẳng a,c cắt nhau, xác định duy nhất một mặt phẳng chứa cả hai đường. Đáp án (2) đúng.

Đường thẳng b,c cắt nhau, xác định duy nhất một mặt phẳng chứa cả hai đường. Đáp án (3) đúng.

Câu 11. Đáp án D.

Ta có: $\begin{cases} AB // CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (MCD) \Rightarrow MN // CD \\ MN = (SAB) \cap (MCD) \end{cases}$.

Câu 12. Đáp án A.



Do M,N lần lượt là trung điểm của AB, AD nên $MN // BD, MN = \frac{1}{2}BD$.

Do P,Q lần lượt là trung điểm của CD, CB nên $PQ // BD, PQ = \frac{1}{2}BD$.

Suy ra $MN // PQ$, do đó M,N,P,Q đồng phẳng. Do đó MP, NQ không thể chéo nhau.

Câu 13. Đáp án D.

Do MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN // AB$.

Tương tự, do PQ là đường trung bình của tam giác SCD nên $PQ // CD$.

$ABCD$ là hình bình hành nên $AB // CD$. Do đó: $PQ // MN$ và $MN // CD$.

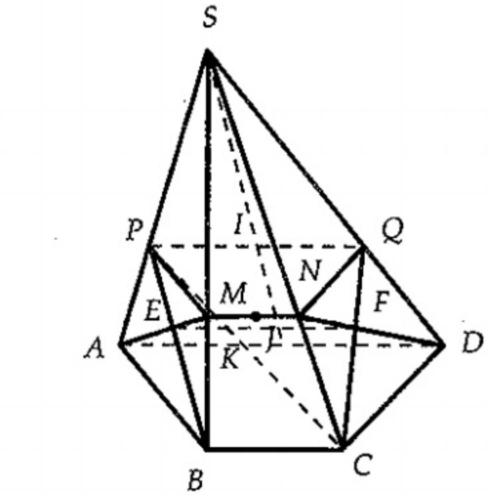
MN không song song với SC vì giả sử ngược lại thì SC và CD trùng nhau (vô lí).

Câu 14. Đáp án A.

Do M,N,P,Q,R,S lần lượt là trung điểm của AC, BD, AB, CD, AD, BC nên $MR // CD // SN$, $PS // AC // RQ$, $MP // BC // NQ$. Do đó M,R,S,N đồng phẳng; P,Q,R,S đồng phẳng; M,P,Q,N đồng phẳng.

M,P,R,Q không đồng phẳng vì giả sử ngược lại thì P sẽ thuộc mặt phẳng (ACD), suy ra B thuộc mặt phẳng (ACD) (vô lí).

Câu 15. Đáp án B.



Ta có $I \in (SAD)$, suy ra $I \in (SAD) \cap (BCI)$.

Do $\begin{cases} (SAD) \cap (BCI) = PQ \\ AD \subset (SAD), BC \subset (BCI) \\ AD \,//\, BC \end{cases} \Rightarrow PQ \,//\, AD \,//\, BC$.

Ta có: $J \in (SBC)$, suy ra $J \in (SBC) \cap (ADJ)$.

Do $\begin{cases} (SBC) \cap (ADJ) = MN \\ BC \subset (SBC), AD \subset (ADJ) \\ AD \,//\, BC \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, AD \,//\, BC$.

Từ đó suy ra MN và PQ song song với nhau.

Ta có: $\begin{cases} EF = (ADNM) \cap (BCQP) \\ AD = (ADNM) \cap (ABCD) \\ BC = (ABCD) \cap (BCQP) \\ AD \,//\, BC \end{cases} \Rightarrow EF \,//\, AD$.

Suy ra $EF \,//\, MN$. Gọi K là giao điểm của CP với EF $EF = EK + KF$.

Do $\frac{SP}{SA} = \frac{2}{3} = \frac{SM}{SB} \Rightarrow PM \,//\, AB$.

Theo định lý Thalet ta có: $\frac{PE}{EB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{PE}{PB} = \frac{2}{5}$. Do EK song song với BC nên theo định lý Thalet ta có : $\frac{PE}{PB} = \frac{EK}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow EK = \frac{2}{5}b$.

Tương tự ta cũng có: $\frac{QF}{FC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{QC}{FC} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{PQ}{FK} = \frac{5}{3} \Rightarrow FK = \frac{3}{5}PQ = \frac{3}{5}.\frac{2}{3}AD = \frac{2}{5}a$.

Từ đây suy ra $EF = \frac{2}{5}(a+b)$.

Câu 16. Đáp án C.

Ta có: $\begin{cases} (SAD)\cap(IJK)=FK \\ AD\subset(SAD), IJ\subset(IJK) \\ AD // IJ \end{cases} \Rightarrow FK // IJ$.

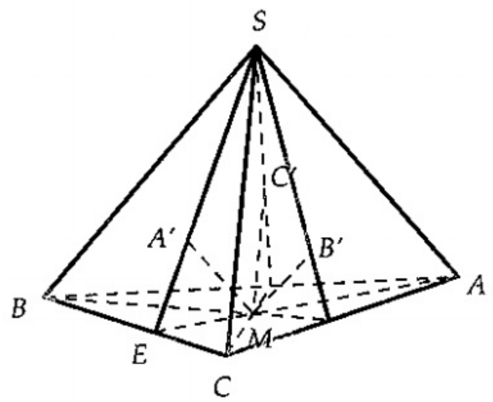
Dễ dàng chứng minh được các đường thẳng còn lại không song song với FK.

Câu 17. Đáp án C.

Do I, J lần lượt là trung điểm của BC, BD nên IJ là đường trung bình của tam giác BCD. Suy ra $IJ // CD$.

Ta có: $\begin{cases} IJ // CD, IJ\subset(AIJ), CD\subset(ACD) \\ A\in(AIJ)\cap(ACD) \end{cases} \Rightarrow (AIJ)\cap(ACD)=At // CD$.

Câu 18. Đáp án C, B.



a) Do $MA' // SA$ nên bốn điểm này nằm trong cùng mặt phẳng. Giả sử E là giao điểm của mặt phẳng này với BC. Khi đó A, M, E thẳng hàng và ta có: $\frac{MA'}{SA}=\frac{ME}{EA}=\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$.

Tương tự ta có: $\frac{MB'}{SB}=\frac{S_{MAC}}{S_{ABC}}, \frac{MC'}{SC}=\frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$. Vậy $\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}=1$. Vậy đáp án đúng là .

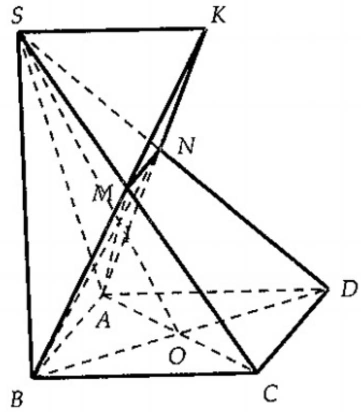
b) Ap dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

$\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}\ge 3\sqrt[3]{\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}} \Rightarrow \frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}\le\frac{1}{27}$.

Dầu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{MA'}{SA}=\frac{MB'}{SB}=\frac{MC'}{SC}\Rightarrow S_{MAC}=S_{MAB}=S_{MBC}$.

Điều này chỉ xảy ra khi M là trọng tâm tam giác ABC. Vậy đáp án đúng là B.

Câu 19. Đáp án B, A, D, A.



a) Ta có : $\begin{cases} MN = (ABM) \cap (SCD) \\ AB = (ABM) \cap (ABCD) \\ CD = (ABCD) \cap (SCD) \\ CD \parallel AB \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AB$. Do đó $ABMN$ là hình thang. Do $MN < AB$ nên $ABMN$ không thể là hình bình hành, hình thoi. Vậy đáp án đúng là B.

b) Gọi $I = AM \cap BN \Rightarrow \begin{cases} I \in (SAC) \\ I \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in SO = (SAC) \cap (SBD)$. Vậy đáp án đúng là A.

c) Gọi $K = AN \cap BM \Rightarrow \begin{cases} I \in (SAD) \\ I \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC)$.

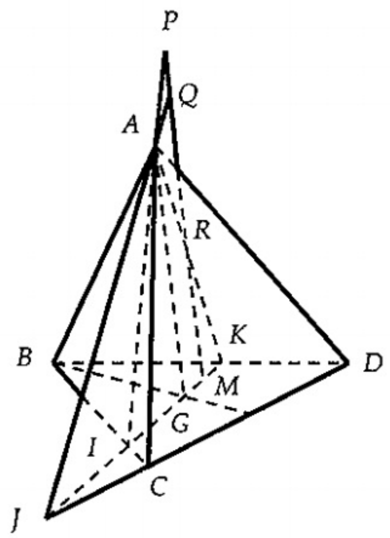
Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng qua S và song song với AD. Vậy đáp án đúng là D.

d) Do $MN \parallel AB$ nên $\frac{AB}{MN} = \frac{BM}{MK}$ (1).

Do $SK \parallel BC$ nên $\frac{CB}{SK} = \frac{MB}{MK}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AB}{MN} - \frac{BC}{SK} = 0$. Vậy đáp án đúng là A.

Câu 20. Đáp án C, C.



a) Trong mặt phẳng (BCD), gọi $I = MG \cap BC, J = MG \cap CD, K = MG \cap BD$.

Qua M kẻ $Mx \,//\, GA$. Trong $(AIJ): Mx \cap AI = P$ (đây chính là giao điểm của Mx với (ABC))

Tương tự $Mx \cap AK = R, Mx \cap AJ = Q$.

Ta có : $\dfrac{IM}{IG} = \dfrac{S_{MIC}}{S_{GIC}} = \dfrac{S_{MIB}}{S_{GIB}} = \dfrac{S_{MIC} + S_{MIB}}{S_{GIC} + S_{GIB}} = \dfrac{S_{MBC}}{S_{GBC}} = \dfrac{3S_{MBC}}{S_{BCD}}$.

Theo định lý Thalet ta có : $\dfrac{IM}{IG} = \dfrac{MP}{GA}$. Do đó : $\dfrac{MP}{GA} = \dfrac{3S_{MBC}}{S_{BCD}}$.

Chứng minh tương tự ta có : $\dfrac{MQ}{GA} = \dfrac{3S_{MCD}}{S_{BCD}}, \dfrac{MR}{GA} = \dfrac{3S_{MBD}}{S_{BCD}} \Rightarrow \dfrac{MP + MQ + MR}{GA} = 3$.

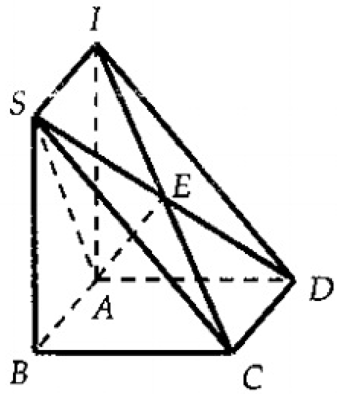
Vậy đáp án đúng là C.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có : $MP.MQ.MR \le \left(\dfrac{MP + MQ + MR}{3}\right)^3 = GA^3$.

Vậy giá trị lớn nhất của $MP.MQ.MR$ bằng GA^3. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $MP = MQ = MR$.

Điều này xảy ra khi M là trọng tâm tam giác BCD. Vậy đáp án đúng là C.

Câu 21. Đáp án A, A.



a) Do $Dx // SC$ nên hai đường thẳng này cùng nằm trong mặt phẳng (SCD).

Lại có, hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có D là điểm chung, $AB // CD$ nên giao tuyến là đường thẳng đi qua S và song song với AB. Vậy I thuộc giao tuyến này.

Vậy đáp án đúng là A.

b) Gọi E là giao điểm của SD và IC. Suy ra thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AIC) là tam giác ACE.

Ta có $SIDC$ là hình thang nên $SI = CD$ và $SI // CD$. Suy ra $SI = AB$ và $SI // AB$. Điều này suy ra $SIDC$ là hình bình hành. Khi đó $AI = SB = a$.

Mặt khác, $AC = SD = a\sqrt{2} \Rightarrow AE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

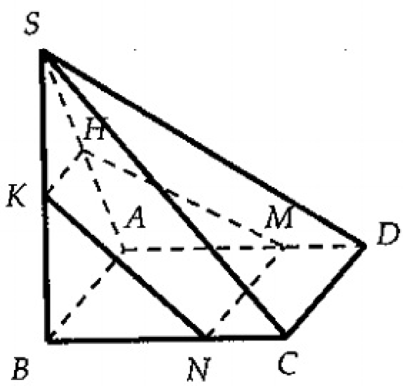
Xét tam giác IAC có : $CI^2 = 2\left(AC^2 + AI^2\right) - 4AE^2 = 4a^2 \Rightarrow CI = 2a$.

Ta có : $\cos\widehat{CAE} = \dfrac{AE^2 + AC^2 - CE^2}{2AC.AE} = \dfrac{\frac{a^2}{2} + 2a^2 - a^2}{2a^2} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \sin\widehat{CAE} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Diện tích thiết diện là : $S = \dfrac{1}{2}AC.AE.\sin\widehat{CAE} = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{7}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{8}$.

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 22. Đáp án C, A.



a) Ta có :

$\begin{cases} KH // AB, KH \subset (HKM), AB \subset (ABCD) \\ M \in (HKM) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (HKM) \cap (ABCD) = MN // AB // HK \ (1)$.

Ta lại có: $\Delta SAD = \Delta SBC \, (c.c.c) \Rightarrow \widehat{SAD} = \widehat{SBC}$.