B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ CẤP SỐ NHÂN

Câu 1. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

A. Dãy **số** (a_n), với $a_n=(-1)^n.3^{n+1}+1, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

B. Dãy số (b_n), với $b_1=1, b_{n+1}=b_n+\frac{2017}{2018}b_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

C. Dãy số (c_n), với $c_n=n.5^{2n-1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

D. Dãy số (d_n), với $d_1=3, d_{n+1}=d_n^2, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải

Đáp án B

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

- *Phương án A*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số là $-8, 28, -80$.

Ba số này không lập thành cấp số nhân vì $\frac{28}{-8}\neq\frac{-80}{28}$.

- *Phương án B*: Ta có $b_{n+1}=\frac{4035}{2018}b_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$ nên (b_n) là cấp số nhân

- *Phương án C*: Ta có $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{25(n+1)}{n}$ (phụ thuộc vào *n*, không phải là không đổi)

Do đó (c_n) không phải là cấp số nhân.

- *Phương án D*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số (d_n) là $3,9,81$. Nhận thấy ba số này không lập thành cấp số nhân nên dãy số (d_n) không là cấp số nhân.

Câu 2. Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1=3$ và $a_2=-6$. Tìm số hạng thứ năm của cấp số nhân đã cho.

A. $a_5=-24$. **B.** $a_5=48$. **C.** $a_5=-48$. **D.** $a_5=24$.

Lời giải

Đáp án B

Ta có công bội của cấp số nhân là $q=\frac{a_2}{a_1}=-2$.

Suy ra $a_5=a_1.q^4=3.(-2)^4=48$.

Vậy phương án đúng là **B**.

Nhận xét: *Với dữ kiện của ví dụ này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau đây:*

Câu 1. Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1=3$ và $a_2=-6$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đã cho.

A. $u_n=3.(-2)^n$. **B.** $u_n=3.(-2)^{n-1}$. **C.** $u_n=3.(2)^{n-1}$. **D.** $u_n=3.(2)^n$.

Câu 2. Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1=3$ và $a_2=-6$. Tìm tổng *S* của 50 số hạng đầu tiên cấp số nhân đã cho.

A. $S=2^{50}-1$. **B.** $S=2^{51}-1$. **C.** $S=1-2^{50}$. **D.** $S=1-2^{51}$.

Câu 3. Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1 = 3$ và $a_2 = -6$. Biết rằng $S_k = -16383$, tính a_k.

A. $a_k = -24576$. **B.** $a_k = 24576$. **C.** $a_k = -49152$. **D.** $a_k = 49152$.

Câu 3. Cho cấp số nhân (x_n) có $\begin{cases} x_2 - x_4 + x_5 = 10 \\ x_3 - x_5 + x_6 = 20 \end{cases}$. Tìm x_1 và công bội q.

A. $x_1 = 1, q = 2$. **B.** $x_1 = -1, q = 2$. **C.** $x_1 = -1, q = -2$. **D.** $x_1 = 1, q = -2$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} x_2 - x_4 + x_5 = 10 \\ x_3 - x_5 + x_6 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2\left(1 - q^2 + q^3\right) = 10 \\ x_2 q\left(1 - q^2 + q^3\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ q = 2 \end{cases}$.

Suy ra $x_1 = \dfrac{x_2}{q} = 1$. Vậy phương án đúng là A.

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đó.

A. $u_1 = 6, q = 5$. **B.** $u_1 = 5, q = 4$. **C.** $u_1 = 4, q = 5$. **D.** $u_1 = 5, q = 6$.

Lời giải

Ta có $u_1 = S_1 = 5 - 1 = 4$ và $u_2 = S_2 - S_1 = \left(5^2 - 1\right) - \left(5 - 1\right) = 20$.

STUDY TIP

1) Định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba:

Nếu phương trình bậc ba $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}.$$

2) Trong thực hành giải toán, chúng ta sử dụng kết quả này kết hợp với giả thiết của bài toán để tìm ra nghiệm của phương trình hoặc xác định được mối liên hệ giữa các hệ số của phương trình.

Trường hợp nếu $-\dfrac{d}{a}$ là hằng số thì điều kiện cần để phương trình bậc ba nói trên có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân là $x = \sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$ là nghiệm của phương trình bậc ba đó.

Câu 5. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_{13} = 24567$. **B.** $u_{13} = 12288$. **C.** $u_{13} = 49152$. **D.** $u_{13} = 3072$.

Lời giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n).

Ta có $15u_1 - 4u_2 + u_3 = 45 - 12q + 3q^2 = 3(q-2)^2 + 33 \geq 33 \forall q$.

Suy ra $u_{13} = u_1 q^{12} = 12288$. Phương án đúng là B.

Nhận xét: *Từ kết quả của ví dụ này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau:*

Câu 1. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số hạng tổng quát của cấp số nhân đó là

A. $u_n = 3.2^{n-1}$. **B.** $u_n = 3.2^n - 1$.

C. $u_n = 3.(-2)^{n-1}$. **D.** $u_n = 3.4^{n-1}$.

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số 12288 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân đó?

A. 13. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 15.

Câu 3. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng S_{15} của 15 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

A. $S_{15} = 737235$. **B.** $S_{15} = -2949075$. **C.** $S_{15} = 1474515$. **D.** $S_{15} = 2949075$.

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết $S_k = -5898195$, tìm k.

A. $k = 16$. **B.** $k = 18$. **C.** $k = 19$. **D.** $k = 17$.

Câu 6. Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là $125cm^3$ và diện tích toàn phần là $175cm^2$. Tính tổng số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

A. $30cm$. **B.** $28cm$. **C.** $31cm$. **D.** $17,5cm$.

Lời giải

Vì ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân nên ta có thể gọi ba kích thước đó là $\frac{a}{q}, q, aq$.

Thể tích của khối hình hộp chữ nhật là $V = \frac{a}{q}.a.qa = a^3 = 125 \Rightarrow a = 5$.

Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là

$$S_{tp} = 2\left(\frac{a}{q}.a + a.aq + aq.\frac{a}{q}\right) = 2a^2\left(1 + q + \frac{1}{q}\right) = 50\left(1 + q + \frac{1}{q}\right).$$

Theo giả thiết, ta có $50\left(1 + q + \frac{1}{q}\right) = 175 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Với $q = 2$ hoặc $q = \frac{1}{2}$ thì kích thước của hình hộp chữ nhật là $2,5cm; 5cm; 10cm$.

Suy ra tổng của ba kích thước này là $2,5 + 5 + 10 = 17,5$ cm.

Vậy phương án đúng là D.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3-7x^2+2\left(m^2+6m\right)x-8=0.$

A. $m=-7.$ **B.** $m=1.$

C. $m=-1$ hoặc $m=7.$ **D.** $m=1$ hoặc $m=-7.$

Lời giải

+ *Điều kiện cần:* Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 lập thành một cấp số nhân.

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1x_2x_3=8.$

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $x_1x_3=x_2^2$. Suy ra ta có $x_2^3=8\Leftrightarrow x_2=2.$

+ *Điều kiện đủ:* Với $m=1$ và $m=7$ thì $m^2+6m=7$ nên ta có phương trình

$$x^3-7x^2+14x-8=0.$$

Giải phương trình này, ta được các nghiệm là $1,2,4.$ Hiển nhiên ba nghiệm này lập thành một cấp số nhân với công bội $q=2.$

Vậy, $m=1$ và $m=-7$ là các giá trị cần tìm. Do đó phương án $D.$

STUDY TIP

Ta có thể chỉ ra nghiệm x_2 bằng cách khác:

Theo định lý Vi-ét thì $x_1+x_2+x_3=7;x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=2\left(m^2+6m\right);x_1x_2x_3=8.$

Theo tính chất của cấp số nhân thì $x_1x_3=x_2^2.$ Suy ra

$2\left(m^2+6m\right)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=x_2\left(x_1+x_2+x_3\right).$

Thay $x_1+x_2+x_3=7;$ được $x_2=\dfrac{2\left(m^2+6m\right)}{7}.$ Thay vào $x_1x_2x_3=8$ ta được

$$\frac{8\left(m^2+6m\right)^3}{7^3}=8$$

$\Leftrightarrow m^2+6m-7=0.$

Nhận xét: Từ kết quả của ví dụ này, ta có thể đề xuất các câu hỏi sau đây:

Câu 1. Biết rằng tồn tại đúng hai giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3-7x^2+2\left(m^2+6m\right)x-8=0.$ Tính tổng bình phương của hai giá trị đó.

A. 48. **B.** 64. **C.** 36. **D.** 50.

Câu 2. Biết rằng tồn tại đúng hai giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3-7x^2+2\left(m^2+6m\right)x-8=0$. Tính tổng bình phương của ba số hạng của cấp số nhân đó.

A. 49. **B.** 21. **C.** 14. **D.** 13.

Câu 8. Một khu rừng có trữ lượng gỗ là 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ

A. $4.10^5.(0,05)^5$. **B.** $4.10^5.(1,4)^5$. **C.** $4.10^5.(1,04)^5$. **D.** $4.(10,4)^5$.

Lời giải

Đặt $u_0 = 4.10^5$ và $r = 4\% = 0,04$.

Gọi u_n là trữ lượng gỗ của khu rừng sau năm thứ n.

Khi đó ta có $u_{n+1} = u_n + u_n(1+r), n \in \mathbb{N}$.

Suy ra (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu u_0 và công bội $q = 1+r$.

Do đó số hạng tổng quát của cấp số nhân (u_n) là $u_n = u_0(1+r)^n$.

Sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có:

$u_n = u_1.q^4 = 4.10^5.(1+0,04)^5 = 4.(10,4)^5$ mét khối gỗ.

Vậy phương án đúng là D.

Câu 9. Bài toán ***"Lãi kép"***

Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% /năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Giả sử trong khoảng thời gian gửi người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, hỏi sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được gần với số tiền nào trong các số tiền dưới đây?

A. 196715000 đồng. **B.** 196716000 đồng. **C.** 183845000 đồng. **D.** 183846000 đồng.

Lời giải

Đặt $M_0 = 10^8$ (đồng) và $r = 7\% = 0,07$.

Gọi M_n là số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được sau n năm.

Theo giả thiết, ta có $M_{n+1} = M_n + M_n.r = M_n(1+r), \forall n \geq 1$.

Do đó dãy số (M_n) là cấp số nhân với số hạng đầu M_0 và công bội $q = 1+r$. Suy ra $M_n = M_0(1+r)^n$.

Vì vậy, sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được là

$$M_{10} = M_0(1+r)^{10} = 10^8.(1,07)^{10} \approx 196715000.$$

Vậy phương án đúng là A.

Câu 10. Một người gửi ngân hàng 150 triệu đồng theo thể thức lãi kép, lãi suất $0,58\%$ một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền lãi tháng trước đó và tiền gốc của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có 180 triệu đồng?

A. 34 tháng. **B.** 32 tháng. **C.** 31 tháng. **D.** 30 tháng.

Lời giải

Theo ví dụ 9, thì sau n tháng gửi tiết kiệm, ta có

$M_n = M_0(1+r)^n$, trong đó $M_0 = 15.10^7, r = 0,0058$.

Do đó $M_n = 15.10^7.(1,0058)^n$.

Cách 1: Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

+ *Phương án A:* $M_{34} = 15.10^7.(1,0058)^{34} \approx 182594000$ (đồng).

+ *Phương án B:* $M_{32} = 15.10^7.(1,0058)^{32} \approx 180494000$ (đồng).

+ *Phương án C:* $M_{31} = 15.10^7.(1,0058)^{31} \approx 179453000$ (đồng).

Vậy, phương án đúng là B. (Không cần kiểm tra phương án D vì ở phương án D, số tháng ít hơn ở phương án C nên số tiền sẽ ít hơn nữa).

Cách 2: Theo giả thiết, ta có $M_n = 18.10^7$ (đồng).

Do đó, ta có $18.10^7 = 15.10^7.(1,0058)^n \Leftrightarrow (1,0058)^n = \frac{6}{5}$.

Sử dụng máy tính cầm tay, ta tính được $n \approx \log\left(\frac{6}{5}\right) : \log(1,0058)$ hay $n \approx 31,526$.

Do đó $n = 32$. Vậy phương án đúng là B.

hoc360.net