BÀI 1. ĐƠN ĐIỆU

PHIẾU SỐ 4. MỨC ĐỘ VẬN DỤNG CAO

Xác định tham số để hàm số y = f(x) đơn điệu trên khoảng xác định.

Phương pháp .

Tìm điều kiện để hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ *đơn điệu trên khoảng* $(\alpha;\beta)$.

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

1. Hàm số *f* đồng biến trên $(\alpha;\beta)$ $\Leftrightarrow$ $y'\ge 0, \forall x\in(\alpha;\beta)$ và $y'=0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc $(\alpha;\beta)$.

Trường hợp **1**:

• Nếu bất phương trình $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow h(m)\ge g(x)$ (*)

thì *f* đồng biến trên $(\alpha;\beta)$ $\Leftrightarrow$ $h(m)\ge \max\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$

• Nếu bất phương trình $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow h(m)\le g(x)$ (**)

thì *f* đồng biến trên $(\alpha;\beta)$ $\Leftrightarrow$ $h(m)\le \min\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$

Trường hợp **2**: Nếu bất phương trình $f'(x)\ge 0$ không đưa được về dạng (*) thì đặt $t=x-\alpha$. Khi đó ta có:

$y'=g(t)=3at^2+2(3a\alpha+b)t+3a\alpha^2+2b\alpha+c$.

– Hàm số *f* đồng biến trên khoảng $(-\infty;a)$ $\Leftrightarrow$ $g(t)\ge 0, \forall t<0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a>0 \\ \Delta>0 \\ S>0 \\ P\ge 0 \end{cases}$

– Hàm số *f* đồng biến trên khoảng $(a;+\infty)$ $\Leftrightarrow$ $g(t)\ge 0, \forall t>0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a>0 \\ \Delta>0 \\ S<0 \\ P\ge 0 \end{cases}$

2.Hàm số *f* nghịch biến trên $(\alpha;\beta)$ $\Leftrightarrow$ $y'\ge 0, \forall x\in(\alpha;\beta)$ và $y'=0$ chỉ xảy ra tại một

số hữu hạn điểm thuộc $(\alpha;\beta)$.

***Trường hợp* 1:**

• Nếu bất phương trình $f'(x) \le 0 \Leftrightarrow h(m) \ge g(x)$ (*)

thì f nghịch biến trên $(\alpha;\beta) \Leftrightarrow h(m) \ge \max\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$

• Nếu bất phương trình $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow h(m) \le g(x)$ (**)

thì f nghịch biến trên $(\alpha;\beta) \Leftrightarrow h(m) \le \min\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$

***Trường hợp* 2:** Nếu bất phương trình $f'(x) \le 0$ không đưa được về dạng (*) thì đặt $t = x - \alpha$. Khi đó ta có:

$y' = g(t) = 3at^2 + 2(3a\alpha + b)t + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$.

– Hàm số f nghịch biến trên khoảng $(-\infty;a) \Leftrightarrow g(t) \le 0, \forall t < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P \ge 0 \end{cases}$

– Hàm số f nghịch biến trên khoảng $(a;+\infty) \Leftrightarrow g(t) \le 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P \ge 0 \end{cases}$

Chú ý:

1. Phương trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ $(a \ne 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa

$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$.

$x_1 \le 0 \le x_2 \Leftrightarrow P \le 0$.

$0 \le x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P \ge 0 \\ S > 0 \end{cases}$

$x_1 < x_2 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P \ge 0 \\ S < 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} 0 < x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

Trong đó : $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$.

2. Nếu hàm số f(x) có giá trị nhỏ nhất trên tập D ,thế thì:

$$\forall x \in D, f(x) \ge 0 \Leftrightarrow \min\limits_{x \in D} f(x) \ge 0.$$

3. Nếu hàm số f(x) có giá trị lớn nhất trên tập D, thế thì

$$\forall x \in D, f(x) \le 0 \Leftrightarrow \max\limits_{x \in D} f(x) \le 0.$$

4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D

* $f(x) \ge k \ \forall x \in D \Leftrightarrow \min\limits_{D} f(x) \ge k$ (nếu tồn tại $\min\limits_{D} f(x)$)

* $f(x) \le k \ \forall x \in D \Leftrightarrow \max\limits_{D} f(x) \le k$ (nếu tồn tại $\max\limits_{D} f(x)$).

Bài toán 01: TÌM m ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN KHOẢNG $K = (-\infty;\alpha)$, $(\beta;+\infty)$, $(-\infty;\alpha]$, $[\beta;+\infty)$.

Phương pháp .

Chú ý 1:

* Hàm số $y = f(x,m)$ tăng trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \min\limits_{x\in\mathbb{R}} y' \ge 0$.

* Hàm số $y = f(x,m)$ giảm trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \le 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \max\limits_{x\in\mathbb{R}} y' \le 0$.

Chú ý 2: Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \ne 0)$.

• $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn : $x_1 < \alpha < x_2$. Đặt $t = x - \alpha$, khi đó $g(t) = f(t+\alpha)$. Bài toán trở thành $g(t) = 0$ có hai nghiệm trái dấu tức $t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow P < 0$.

• $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn : $x_1 \le x_2 < \alpha$. Đặt $t = x - \alpha$, khi đó $g(t) = f(t+\alpha)$. Bài toán trở thành $g(t) = 0$ có hai nghiệm cùng âm nghĩa là $t_1 \le t_2 < 0 \Leftrightarrow \Delta \ge 0,\ S < 0,\ P > 0$.

• $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\beta < x_1 \le x_2$. Đặt $t = x - \beta$, khi đó $g(t) = f(t+\beta)$. Bài toán trở thành $g(t) = 0$ có hai nghiệm cùng dương nghĩa là $0 < t_1 \le t_2 \Leftrightarrow \Delta \ge 0,\ S > 0,\ P > 0$.

• Để ý $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \Leftrightarrow x_1.x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 < 0$$

$$\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases} \qquad x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \end{cases}$$

$$\alpha < x_1 < x_2 < \beta \Leftrightarrow \Delta > 0,\ 2\alpha < x_1 + x_2 < 2\beta,\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0,\ \ (x_1 - \beta)(x_2 - \beta) > 0.$$

Ví dụ

Ví dụ .

Cho hàm số $y = \dfrac{(m+1)x^2 - 2mx + 6m}{x - 1}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

1. Đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó; **2.** Đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$

Lời giải.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

1. Xét hai trường hợp.

TH1: Khi $m = -1$, ta có hàm số $y = \dfrac{2x-6}{x-1}$ và $y' = \dfrac{4}{(x-1)^2} > 0$ với mọi $x \in D$

Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định .

Vậy, $m = -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

TH2: Khi $m \neq -1$, ta có $y' = \dfrac{(m+1)x^2 - 2(m+1)x - 4m}{(x-1)^2}$

Đặt $g(x) = (m+1)x^2 - 2(m+1)x - 4m$ và ta có y' cùng dấu với $g(x)$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow \forall x \in D, y' \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in D, g(x) \geq 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 + 4m(m+1) \leq 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(5m+1) \leq 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq -\frac{1}{5}.$$

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m thỏa yêu cầu của bài toán là $\left[-1; -\dfrac{1}{5}\right]$.

2. Theo câu trên $m = -1$ thỏa mãn đề bài.

Với $m \neq -1$ Khi đó hàm số đồng biến trên khoảng $(4; +\infty) \Leftrightarrow \forall x \in (4; +\infty), g(x) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \forall x \in (4; +\infty), \frac{2x - x^2}{x^2 - 2x - 4} \leq m \ \ (\text{do } x^2 - 2x - 4 > 0 \ \forall x \in (4; +\infty))$$

Xét hàm $h(x) = \dfrac{2x - x^2}{x^2 - 2x - 4}$, khi đó (1) $\Leftrightarrow \forall x \in (4; +\infty), h(x) \leq m$ ta lập bảng biến thiên của $h(x)$ trên $(4; +\infty)$.

$$h'(x) = \frac{8x - 8}{(x^2 - 2x - 4)^2} > 0 \ \forall x \in (4; +\infty).$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(\dfrac{2}{x} - 1\right)}{x^2\left(1 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2}{x} - 1}{1 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2}} = -1.$$

Dựa vào bảng biến thiên của $h(x)$ suy ra $\forall x \in (4; +\infty)$, $h(x) \leq m \Leftrightarrow -1 \leq m$.

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m thỏa yêu cầu của bài toán là $[-1; +\infty)$.

Bài toán 02: TÌM m ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN KHOẢNG XÁC ĐỊNH $(\alpha; \beta)$, $[\alpha; \beta]$.

Phương pháp .

Ví dụ

Ví dụ : Định m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 4m$ nghịch biến trong $(-1;1)$

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + m - 1$

Cách 1: Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-1;1) \Leftrightarrow y' \le 0$ và $x_1 < -1 < 1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1+1)(x_2+1) < 0 \\ (x_1-1)(x_2-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m < -8 \end{cases} \Rightarrow m < -8$$

Vậy, với $m < -8$ thì hàm số luôn nghịch biến trong khoảng $(-1;1)$

Cách 2: Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-1;1) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (-1;1)$ tức là phải có: $m \ge -3x^2 - 6x + 1$, $\forall x \in (-1;1)$

Xét hàm số $g(x) = -3x^2 - 6x + 1, \forall x \in (-1;1)$ và có $g'(x) = -6(x+1)$

Với $\forall x \in (-1;1) \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (-1;1)$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \ge g(x)$ với $\forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m < -8$

Vậy, với $m < -8$ thì hàm số luôn nghịch biến trong khoảng $(-1;1)$

Xác định tham số để hàm số y = f(x) đơn điệu trên khoảng có độ dài k cho trước.

Phương pháp .

+ Tìm TXĐ

+ Tính y'

+ Hàm số có khoảng đồng biến (hoặc nghịch biến) $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 đồng thời $|x_2 - x_1| = k$

Chú ý:

$ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$) thỏa $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Rightarrow x_2 - x_1 = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, trong đó $\Delta = b^2 - 4ac$ $|x_2 - x_1| = k \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1.x_2 = k^2$ $(a > 0)$

Các ví dụ

Ví dụ 1 : Định m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài nhỏ hơn 1.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + m$

Hàm số nghịch biến trên một khoảng có độ dài nhỏ hơn 1 $\Leftrightarrow y' \le 0$ và $|x_1 - x_2| < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3m > 0 \\ S^2 - 4P < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 3 \\ 4 - 4m < 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4} < m < 3$$

Vậy, với $\frac{3}{4} < m < 3$ thì hàm số nghịch biến trên một khoảng có độ dài nhỏ hơn 1

Ví dụ 2. Tìm m để hàm số: $y = x^3 - mx^2 + (m + 36)x - 5$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng $4\sqrt{2}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx + m + 36$ và $\Delta' = m^2 - 3m - 108$

Dễ thấy $a_{y'} = 3 > 0$, do đó hàm số đã cho không nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Nếu $m < -9$ hoặc $m > 12$ tức $\Delta' > 0$ thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1; x_2. Lập bảng xét dấu, ta thấy $y' < 0$ với $x \in (x_1; x_2)$ suy ra hàm số nghịch biến với $x \in [x_1; x_2]$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng $4\sqrt{2}$ khi $|x_1 - x_2| = 4\sqrt{2}$ tức $\left|2\frac{\sqrt{m^2 - 3m - 108}}{3}\right| = 4\sqrt{2}$, bình phương hai vế và rút gọn ta được phương trình: $m^2 - 3m - 180 = 0 \Leftrightarrow m = -12$ hoặc $m = 15$ (thỏa điều kiện) .

Vậy, với $m = -12$ hoặc $m = 15$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = -\frac{x^3}{3} + (m-1)x^2 + (m+3)x$ tăng trên khoảng $(0;3)$

A. $m \ge \frac{12}{7}$

B. $m > \frac{12}{7}$

C. $m \le \frac{12}{7}$

D. $m = \frac{12}{7}$