BÀI 2. CỰC TRỊ PHIẾU 3. VẬN DỤNG THƯỜNG

TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

Bài toán 01: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ HOẶC KHÔNG CÓ CỰC TRỊ.

Phương pháp .

Quy tắc 1: Áp dụng định lý 2

- Tìm $f'(x)$
- Tìm các điểm $x_i\ (i=1,2,3...)$ tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- Xét dấu của $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì hàm số có cực trị tại điểm x_0.

Quy tắc 2: Áp dụng định lý 3

- Tìm $f'(x)$
- Tìm các nghiệm $x_i\ (i=1,2,3...)$ của phương trình $f'(x)=0$.
- Với mỗi x_i tính $f''(x_i)$.

– Nếu $f''(x_i)<0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i.

– Nếu $f''(x_i)>0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i.

Các ví dụ

Ví dụ 1 :

1. Định m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+2}{x-1}$ không có cực trị.

2. Cho hàm số: $y=(m-2)x^3-mx-2$. Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số không có điểm cực đại và điểm cực tiểu.

Lời giải.

1. Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$

Ta có: $y'=\dfrac{x^2-2x-m-2}{(x-1)^2}$

Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép , tức phải có:
$\Delta'\le 0\Rightarrow 1+m+2\le 0\Rightarrow m\le -3$

Vậy, với $m\le -3$ thì hàm số không có cực trị.

2. Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3(m-2)x^2 - m$

Để hàm số không có cực trị thì phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta \le 0 \Leftrightarrow 0 + 4.3m(m-2) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2$

Ví dụ 2 :

1. Định m để hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có cực đại, cực tiểu.

2. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số: $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ chỉ có một điểm cực trị.

Lời giải.

1. Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3(m+2)x^2 + 6x + m$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt , tức phải có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ne -2 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne -2 \\ 9 - 3m(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne -2 \\ -3m^2 - 6m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne -2 \\ -3 < m < 1 \end{cases}$$

Vậy, với $\begin{cases} m \ne -2 \\ -3 < m < 1 \end{cases}$ thì hàm số có cực đại, cực tiểu.

2. Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 4mx^3 - 2(m-1)x$ và $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2mx^2 + m - 1 = 0 \quad (*) \end{array} \right.$

Hàm số chỉ có một cực trị khi phương trình $y' = 0$ có một nghiệm duy nhất và y' đổi dấu khi x đi qua nghiệm đó .Khi đó phương trình $2mx^2 + m - 1 = 0 \quad (*)$ vô nghiệm hay có nghiệm kép $x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ \begin{cases} m \ne 0 \\ \Delta' = -2m(m-1) \le 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m < 0 \ \vee \ m \ge 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array} \right.$$

Ví dụ 3: Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = -2x + 2 + m\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ có cực đại

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -2 + m\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$; $y'' = \dfrac{m}{\sqrt{(x^2 - 4x + 5)^3}}$.

$+$ Nếu $m = 0$ thì $y = -2 < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.

+ $m \neq 0$ vì dấu của y'' chỉ phụ thuộc vào m nên để hàm có cực đại thì trước hết $y'' < 0 \Leftrightarrow m < 0$. Khi đó hàm số có cực đại $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có nghiệm (1).

Cách 1:

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)^2 + 1} = m(x-2)$ (2).

Đặt $t = x - 2$ thì (2) trở thành :

$$mt = 2\sqrt{t^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 0 \\ (m^2-4)t^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 0 \\ t^2 = \dfrac{1}{m^2-4} \end{cases} \Rightarrow (1) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m < -2 \text{ (Do } m < 0\text{)}.$$

Vậy $m < -2$ thì hàm số có cực đại.

Cách 2: Với $m < 0$ hàm số đạt cực đại tại $x = x_0$

$$\Leftrightarrow y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{m(x_0-2)}{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}}{x_0 - 2} = \frac{m}{2} \quad (1)$$

Với $m < 0$ thì $(1) \Rightarrow x_0 < 2$. Xét hàm số : $f(x_0) = \dfrac{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}}{x_0 - 2}, x_0 < 2$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x_0) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}}{x_0 - 2} = -1, \ \lim_{x \to 2^-} f(x_0) = \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}}{x_0 - 2} = -\infty$$

Ta có $f'(x_0) = \dfrac{-2}{(x_0-2)^2\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 5}} < 0, \forall x_0 \in (-\infty; 2)$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		2
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình (1) có nghiệm $x_0 < 2 \Leftrightarrow \dfrac{m}{2} < -1 \Leftrightarrow m < -2$

Ví dụ 4: Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 2}{x - 1}$ có điểm cực tiểu nằm trên Parabol $(P): y = x^2 + x - 4$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x - m - 2}{(x-1)^2}, x \neq 1$. Đặt $g(x) = x^2 - 2x - m - 2$.

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm

phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - (-m-2) > 0 \\ g(1) = -m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 > 0 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3$

$A\left(1 + \sqrt{m+3}; m + 2 + 2\sqrt{m+3}\right)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số .

$A \in (P) \Leftrightarrow m + 2 + 2\sqrt{m+3} = \left(1 + \sqrt{m+3}\right)^2 + 1 + \sqrt{m+3} - 4 \Leftrightarrow m = -2$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ (1), m là tham số. Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu đồng thời thời khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị đến gốc tọa độ O bằng 3 lần khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị đến O.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = m - 1 \vee x = m + 1$

àm số có cực đại, cực tiểu $\forall m \in \mathbb{R}$.

Điểm cực đại của đồ thị là $A(m-1; 2-2m)$;

Điểm cực tiểu của đồ thị là $B(m+1; -2-2m)$.

$OB = 3OA \Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^2 + (-2-2m)^2} = 3\sqrt{(m-1)^2 + (2-2m)^2}$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 + (-2-2m)^2 = 9\left[(m-1)^2 + (2-2m)^2\right] \Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow m = 2$ hoặc $m = \dfrac{1}{2}$

Ví dụ 6: Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = \dfrac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x - 1}$ có cực trị đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3}{(x-1)^2} = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}, x \neq 1$, $g(x) = x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi phương trình $g(x)=0, x\neq 1$

có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1. $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ g(1)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow 1<m<2$

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2

là nghiệm của phương trình $g(x)=0, x\neq 1$.

Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1-\sqrt{-m^2+3m-2} \Rightarrow y_1=1-m+2\sqrt{-m^2+3m-2}\\ x_2=1+\sqrt{-m^2+3m-2} \Rightarrow y_2=1-m-2\sqrt{-m^2+3m-2}\end{array}\right.$

$y_1.y_2=(1-m)^2-4(-m^2+3m-2)$

$y_1.y_2=5m^2-14m+9=f(m)$ và $f(m)$ có đỉnh $S\left(\frac{7}{5};-\frac{4}{5}\right)$

Với $1<m<2$, xét $f(m)$ có $m=\frac{7}{5}\in(1;2) \Rightarrow \min\limits_{m\in(1;2)} f(m)=-\frac{4}{5}$ $\Rightarrow \min y_1.y_2=-\frac{4}{5}$ khi $m=\frac{7}{5}$

Câu 25. Đồ thị hàm số $y=mx^4+(m^2-9)x^2+10$ có 3 điểm cực trị thì tập giá trị của m là:

A. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ B. $(-3;0)\cup(3;+\infty)$ C. $(-\infty;-3)\cup(0;3)$ D. $(3;+\infty)$"

$y'=4mx^3+2(m^2-9)x=2x(2mx^2+m^2-9)$

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m(9-m^2)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-3\\ 0<m<3\end{array}\right.$

"Tìm m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2=3$

A. $m=\frac{3}{2}$ B. m = 1 C. m = – 2 D. $m=\frac{1}{2}$"

$y'=3x^2-6x+m$, hàm số có cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m<3$

Khi đó: $\begin{cases} x_1+x_2=2\\ x_1x_2=\frac{m}{3}\end{cases}$

$x_1^2+x_2^2=3 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3 \Leftrightarrow 4-\frac{2m}{3}=3 \Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$

Bài toán 02: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ TẠI ĐIỂM .

Phương pháp .

Trong dạng toán này ta chỉ xét trường hợp hàm số có đạo hàm tại x_0.

Khi đó để giải bài toán này ,ta tiến hành theo hai bước.

Bước 1. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị tại x_0 là $y'(x_0) = 0$, từ điều kiện này ta tìm được giá trị của tham số .

Bước 2. Kiểm lại bằng cách dùng một trong hai quy tắc tìm cực trị ,để xét xem giá trị của tham số vừa tìm được có thỏa mãn yêu cầu của bài toán hay không?

Chú ý:

Định lý 3: *Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.*

Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Trong trường hợp** $f'(x_0) = 0$ **không tồn tại hoặc** $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \end{cases}$ **thì định lý 3 không dùng được.

Các ví dụ

Ví dụ 1 : Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$. Với giá trị nào của m thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$, $y'' = 2x - 2m$

Điều kiện cần: $y'(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = 2$

Điều kiện đủ:

Với $m = 1$ thì $y''(1) = 0 \Rightarrow$ hàm số không thể có cực trị.

Với $m = 2$ thì $y''(1) = -2 < 0 \Rightarrow$ hàm số có cực đại tại $x = 1$.

Vậy, $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét: