BÀI 3: TRẮC NGHIỆM GTLN – GTNN (Mức độ vận dụng cao)

Câu 1: Tìm tất cả tham số thực m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3-2x^2-2x+1+m^2$ trên đoạn $\left[-1;\frac{5}{2}\right]$ bằng $\sqrt{2017}$?

A. $m=\pm\sqrt{\sqrt{2017}+1}$ **B.** $m=\pm\frac{\sqrt{4\sqrt{2017}-59}}{2}$ **C.** $\pm\sqrt{\sqrt{2017}-\frac{37}{27}}$ **D.** $m=\pm 1$

Giải:

$$y=2x^3-2x^2-2x+1+m^2\Rightarrow y'=6x^2-4x-2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Ta có $\Rightarrow y(-1)=y(1)=m^2-1;y\left(\frac{5}{2}\right)=m^2+\frac{59}{4};y\left(-\frac{1}{3}\right)=m^2+\frac{37}{27}$

Suy ra $\min\limits_{\left[-1;\frac{5}{2}\right]} y=m^2-1;\max\limits_{\left[-1;\frac{5}{2}\right]} y=m^2+\frac{59}{4}$

Câu 2: Một sợi dây kim loại dài 80 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất có độ dài $x,(0<x<80)$ được uốn thành tam giác đều, đoạn thứ hai uốn thành vòng tròn. Tìm x để tổng diện tích của hai hình là nhỏ nhất (làm tròn đến hàng phần ngàn)?

A. $49,857$ cm. **B.** $44,808$ cm. **C.** $36,212$ cm. **D.** $78,793$ cm.

Giải:

☑ $y=\frac{x^2}{9}\frac{\sqrt{3}}{4}+\pi\left(\frac{80-x}{2\pi}\right)^2=\frac{\left(3\sqrt{3}+\pi\right)x^2-480\sqrt{3}x+19200\sqrt{3}}{12\sqrt{3}\pi}$. Tìm x để y đạt GTNN với $0<x<80$.

Ta có y đạt GTNN tại hoành độ đỉnh của parabol $x_0=\frac{240\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+\pi}\approx 49,857$ cm.

Câu 3: Tìm tất cả tham số thực m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(2m^2-2m+3\right)x+1$ trên đoạn $[1;3]$ bằng $\frac{31}{3}$?

A. $m=\frac{3\pm\sqrt{57}}{4}$.

B. $m=\frac{15\pm\sqrt{17}}{12}$.cm.

C. $m=\frac{31}{3}$

D. Không có giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Giải:

☑ $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(2m^2-2m+3\right)x+1 \Rightarrow y'=x^2-2mx+2m^2-2m+3$.

Ta có $\Delta'=m^2-2m^2+2m-3=-m^2+2m-3=-\left(m-1\right)^2-2<0 \Rightarrow y'>0, \forall x\in[1;3]$

Vậy $1\le x\le 3 \Rightarrow y(1)\le y(x)\le y(3)$

Theo đề bài ta có: $\min\limits_{[1;3]} y=y(1)=2m^2-3m+\frac{13}{3}=\frac{31}{3} \Leftrightarrow 2m^2-3m-6=0 \Leftrightarrow m=\frac{3\pm\sqrt{57}}{4}$.

Câu 4. Một người thợ muốn làm một cái thùng hình hộp chữ nhật không nắp có chiều dài đáy gấp đôi chiều rộng và có thể tích $10\ m^3$. Giá tiền vật liệu làm đáy thùng là 10.000 đồng$/m^2$, vật liệu làm mặt bên thùng là 5.000 đồng$/m^2$. Hãy xác định kích thước thùng (rộng x dài x cao) để chi phí làm thùng là nhỏ nhất.

A. $\sqrt[3]{\frac{4}{15}}$ x $2\sqrt[3]{\frac{4}{15}}$ x $5\sqrt[3]{\frac{225}{16}}$ (m)

B. $\sqrt{\frac{15}{4}}$ x $2\sqrt{\frac{15}{4}}$ x $5\sqrt{\frac{16}{225}}$ (m)

C. $\sqrt{15}$ x $2\sqrt{15}$ x $\frac{5}{15}$ (m)

D. $\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$ x $2\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$ x $5\sqrt[3]{\frac{16}{225}}$ (m)

Giải:

+ Gọi *S*: chi phí làm thùng, *x* (*m*): chiều rộng đáy, 2*x* (*m*): chiều dài đáy, *y* (*m*): chiều cao (*x>0*)

+Chi phí làm thùng $S(x)=2x.x.10000+2(xy+2xy).5000=20000x^2+30000.xy$.

+ Mặt khác $V=2x.x.y=10 \Rightarrow y=\frac{5}{x^2}$ nên $S(x)=20000.x^2+\frac{150000}{x}$

+ $S'(x)=40.000x-\frac{150000}{x^2}$, $S'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{15}{4}} \Rightarrow y=5\sqrt[3]{\frac{16}{225}}$

+ Lập BBT

+ Vậy kích thước thùng là $\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$ x $2\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$ x $5\sqrt[3]{\frac{16}{225}}$ (m)

Câu 5: Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\sin^2 x-\cos x+1$. Khi đó giá trị của tích M.m là:

A. 0 **B.** $\frac{25}{4}$ **C.** $\frac{25}{8}$ **D.** 2

Giải:

Hàm số được viết lại $y=-2\cos^2 x-\cos x+3$

+ Đặt $t=\cos x$ với $t\in[-1;1]$.Khi đó GTLN –GTNN của hàm số đã cho trên R bằng GTLN-GTNN của hàm số $f(t)=-2t^2-t+3$ trên đoạn $[-1;1]$

+ Ta có $f'(t)=-4t-1$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{4}\in(-1;1)$

$+f(-1)=2;f(\dfrac{-1}{4})=\dfrac{25}{8};f(1)=0$

+ Vậy $M=\dfrac{25}{8};m=0$ do đó $M.m=0$

Câu 6: Với giá trị nào của m thì trên $[0;2]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng – 4

A. $m=-8$ **B.** $m=-4$ **C.** $m=0$ **D.** $m=4$

Giải:

+ Hàm số liên tục trên $[0;2]$

$+f'(x)=3x^2-12x+9$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in(0;2)\\x=3\notin(0;2)\end{array}\right.$

+ $f(0)=m;f(1)=m+4;f(2)=m+2$

Vì $m<m+2<m+4$ nên $\underset{[0;2]}{\text{Min}}\,f(x)=m=-4$

Câu 7: Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}$ m^3. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500.000 đồng/m^2. Khi đó, kích thước của hồ nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất là:

A. Chiều dài 20m chiều rộng 10m chiều cao $\dfrac{5}{6}$m

B. Chiều dài 30m chiều rộng 15m chiều cao $\dfrac{10}{27}$m

C. Chiều dài 10m chiều rộng 5m chiều cao $\dfrac{10}{3}$m

D. Một đáp án khác

Giải:

Gọi $x;y;z$ lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hồ nước

Theo đề bài ta có : $\begin{cases}x=2y\\V=xyz=\dfrac{500}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y\\V=\dfrac{250}{3y^2}\end{cases}(x;y;z>0)$

Diện tích xây dựng hồ nước là Chi phí thuê nhân công thấp nhất khi diện tích xây dựng hồ nước nhỏ nhất

$$S=2y^2+\frac{500}{y}=2y^2+\frac{250}{y}+\frac{250}{y}\geq 3\sqrt[3]{2y^2.\frac{250}{y}.\frac{250}{y}}=150$$

$\Rightarrow \min S = 150$ đạt được khi $2y^2 = \dfrac{250}{y} \Leftrightarrow y = 5$

Suy ra kích thước của hồ là $x = 10m; y = 5m; z = \dfrac{10}{3}m$

Câu 8: Biết giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x - m^2 + m}{x+1}$ bằng -2 trên đoạn [0; 1]. Giá trị của tham số *m* là:

A. $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$

C. $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$

D. Các kết quả trên đều sai

Giải:

$$y' = \frac{m^2 - m + 1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0;1], \forall m$$

Suy ra hàm số tăng trên đoạn [0; 1], suy ra y(0) là giá trị nhỏ nhất

Theo đề, ta có: y(0) = -2, do đó: m = - 1, m = 2.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m^2 - 1)x + m^3 - m$, *m* là tham số. Tìm *m* để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thoả nhỏ nhất.

A. $2\sqrt{2}$

B. $-2\sqrt{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

Giải:

$$y' = x^2 - 2mx + 2m^2 - 1$$

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi -1 < m < 1.

Ta có: Ta có $y' = x_1{}^3 + x_2{}^3 = -4m^3 + 6m$

Khảo sát y' trên (-1; 1), ta được GTNN của hàm số bằng $-2\sqrt{2}$ tại $x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

Câu 10: Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}$ m^3. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500.000 đồng/m^2. Khi đó, kích thước của hồ nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất là:

A. Chiều dài 20m chiều rộng 10m chiều cao $\frac{5}{6}$m

B. Chiều dài 30m chiều rộng 15m chiều cao $\frac{10}{27}$m

C. Chiều dài 10m chiều rộng 5m chiều cao $\frac{10}{3}$m

D. Một đáp án khác

Giải:

: Gọi $x;y;z$ lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hồ nước

Theo đề bài ta có : $\begin{cases} x=2y \\ V=xyz=\frac{500}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ V=\frac{250}{3y^2} \end{cases} (x;y;z>0)$

Chi phí thuê nhân công thấp nhất khi diện tích xây dựng hồ nước nhỏ nhất

$S=2y^2+\frac{500}{y}=2y^2+\frac{250}{y}+\frac{250}{y}\ge 3\sqrt[3]{2y^2.\frac{250}{y}.\frac{250}{y}}=150$

$\Rightarrow \min S=150$ đạt được khi $2y^2=\frac{250}{y}\Leftrightarrow y=5$

Suy ra kích thước của hồ là $x=10m;y=5m;z=\frac{10}{3}m$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 11. Thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều là $27dm^3$. Khi đó diện tích toàn phần nhỏ nhất của lăng trụ là:

A. $9dm^2$. **B.** $36dm^2$. **C.** $45dm^2$. **D.** $54dm^2$

Câu 12. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 48cm . Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau và gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp. Để thể tích khối hộp lớn nhất thì cạnh hình vuông bị cắt dài:

A. 8cm. **B.** $\frac{8}{92}$cm. **C.** 24cm. **D.** $\frac{48}{3}$cm.

Câu 13. Sản lượng hàng tháng S của một sản phẩm được tính sắp sỉ bởi công thức $S=74,5+43,75\sin\frac{\pi t}{6}$ với t là tháng, t = 1 ứng với tháng 1. Tháng có sản lượng cao nhất là:

A. t = 1. **B.** t = 12. **C.** t = 3. **D.** t = 3 và t = 9.

Câu 14. GTNN của hàm số $y=\frac{1+\sin^6 x+\cos^6 x}{1+\sin^4 x+\cos^4 x}$ bằng :

A. 1. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** 0. **D.** $-\frac{2}{9}$.

Câu 15. Cho parabol (P) y = x^2 và điểm A(-3; 0). Gọi M nằm trên (P) mà khoảng cách của AM ngắn nhất bằng **d.** Khi đó :

A. M(-1; 1) và d = 5.

B. M(-1; 1) và d = $\sqrt{5}$.

C. M(-1; 5) và d = 5.

D. M(-1; 5) và d = $\sqrt{5}$.

Câu 16. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s=\frac{1}{3}t^3-2t^2+7t-9$ (t tính theo giây). Vận tốc chuyển động của chất điểm đó đạt giá trị nhỏ nhất tại thời điểm t = ... (Giây).

A. 2. **B.** 4 . **C.** 6. **D.** 8.

Câu 17. Một hình chữ nhật có chu vi lá 16m, diện tích của hình chữ nhật đó lớn nhất khi có chiều rộng là ..... (m) và chiều dài là .... (m)

A. 4;4. **B.** 3;5. **C.** 2;6. **D.** 7;1.

Câu 18. Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cây bị chết thì hiện tượng quang hợp của nó cũng ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữ**a.** Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thành nitơ 14. Biết rằng nếu gọi *P(t)* là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ *t* năm trước đây thì *P(t)* được tính theo công thức:

$$P(t)=100.(0,5)^{\frac{t}{5750}} \quad (\%)$$

Phân tích một mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 65%. Niên đại của công trình kiến trúc đó gần với số nào sau đây nhất

A. 41776 năm. **B.** 6136 năm. **C.** 3574 năm. **D.** 4000 năm.

Câu 19. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ lần lượt là

A. 0 và 1. **B.** 0 và $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$ và 1. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và 1.

Câu 20. Một xưởng cơ khí nhận làm những chiếc thùng phi với thể tích theo yêu cầu là $2\pi\left(m^3\right)$ mỗi chiế**C.** Hỏi thùng phải có kích thước thể nào để tiết kiệm vật liệu nhất?
Với R là bán kính thùng phi ,h là chiều cao thùng phi.

A. $R=1;h=2.$ **B.** $R=2;h=1.$ C $R=1;h=\frac{1}{2}.$ **D.** $R=\frac{1}{2};h=2.$

Câu 21. Dầu được vận chuyển bằng cách đóng thùng hình trụ, với thể tích *V=50l.* Chúng ta cần chọn bán kính *r* và chiều cao *h* của hình trụ sao cho bề mặt diện tích của mỗi thùng dầu là nhỏ nhất . Diện tích mặt của mỗi thùng là nhỏ nhất thì bán kính cần xác định là