

BÀI 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

PHIẾU 2. MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT LIÊN QUAN HÀM SỐ CHỨA CĂN THỨC

Ví dụ Tìm GTLN và GTNN của hàm số sau:

$$1. y = (x + 3)\sqrt{-x^2 - 2x + 3}$$

Lời giải.

$$1. \text{Hàm số xác định } \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$$

Vậy, hàm số xác định trên $D = [-3; 1]$

$$y' = \sqrt{-x^2 - 2x + 3} + (x + 3) \frac{-x - 1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}} = \frac{-x^2 - 2x + 3 - (x^2 + 4x + 3)}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}}$$

$$y' = \frac{-2x^2 - 6x}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3; 1) \\ -2x^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3; 1) \\ x = 0, x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

$$* y(-3) = 0, y(1) = 0, y(0) = 3\sqrt{3}.$$

* f liên tục trên $[-3; 1]$ và có đạo hàm trên $(-3; 1)$

Suy ra $\max_{x \in D} y = 3\sqrt{3}$ khi $x = 0$ $\min_{x \in D} y = 0$ khi $x = -3$ hoặc $x = 1$

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT LIÊN QUAN HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Phương pháp .

Chú ý: $t = \sin x, |t| \leq 1, t = \cos x, |t| \leq 1$

Các ví dụ

Ví dụ 1 : Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Đặt $t = \sin x, |t| \leq 1$, ta có: $y = \frac{t+1}{t^2+t+1}$ với $t \in [-1; 1]$

Ta có: $y' = \frac{-t^2 - 2t}{(t^2 + t + 1)^2}$ và $y' = 0 \Leftrightarrow -t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 0$ hoặc $t = -2 \notin [-1; 1]$

$$y(0) = 1; y(-1) = 0; y(1) = \frac{2}{3}.$$

Vậy, $\max_{t \in [-1;1]} y = 1$ khi $x = 0$ và $\min_{x \in [-1;1]} y = 0$ khi $x = -1$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2;4]$

- A. $\min_{[2;4]} y = 6$ B. $\min_{[2;4]} y = -2$ C. $\min_{[2;4]} y = -3$ D. $\min_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$

Câu 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ là:

- A. 3. B. 1. C. $\frac{1}{3}$. D. -1

Câu 3. Trên khoảng $(0; +\infty)$ thì hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ có:

- A. giá trị nhỏ nhất là -1 . B. giá trị lớn nhất là 3.
C. giá trị nhỏ nhất là 3. D. giá trị lớn nhất là -1 .

Câu 4. Cho hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. $\sqrt{3}$.

Câu 5. Hàm số $y = -x + \sqrt{2x^2 + 3}$ có giá trị nhỏ nhất trên tập xác định của nó bằng:

- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $-2\sqrt{6}$. D. $-\sqrt{6}$.

Câu 6. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x| + 3$ trên $[-1;1]$ là:

- A. -4 và 4. B. -1 và 1. C. -3 và 4. D. 3 và 4.

Câu 7. Hàm số $y = \frac{x - m}{mx + 1}$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ bằng 2 khi giá trị của m bằng:

- A. 2. B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. -2 .

Câu 8. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m^2 - 2$ trên $[0;2]$ bằng 7 khi m bằng:

- A. ± 3 . B. ± 1 . C. $\pm \sqrt{7}$. D. $\pm \sqrt{2}$.

Câu 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x - \frac{4}{x}$ trên đoạn $[-1;2]$ là:

- A. $4\sqrt{2}$. B. 4. C. không tồn tại. D. 2

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} + 1$ trên đoạn $[1;3]$ là:

- A. 3. B. $\frac{15}{6}$. C. $\frac{5}{2}$. D. 2.

Câu 11. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -4\sqrt{3-x}$ là:

- A. 0. B. $-4\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{2}$ D. -4.

Câu 12. Trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ có giá trị nhỏ nhất là:

- A. 3. B. 0. C. 1. D. -1.

Câu 13. Trên đoạn $[0;1]$ hàm số $y = 2x + 1 - \frac{2}{x+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng:

- A. -1. B. 2. C. -2. D. 1.

Câu 14. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có giá trị nhỏ nhất trên từng khoảng xác định:

- A. $y = x^3 - 3x^2 - 6$. B. $y = x^4 - 3x^2 - 1$. C. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.
D. $y = \frac{x+1}{x-2}$

Câu 15. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - \ln x + 3$ bằng:

- A. 4. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 16. Gọi M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$. Khi đó $M - m$ bằng:

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

Câu 17. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x.e^x$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng:

- A. e. B. $2e$. C. $\frac{1}{e}$. D. $-\frac{1}{e}$.

Câu 18. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[1; e^5]$ bằng:

- A. $-e$. B. $\frac{5}{e^5}$. C. $\frac{1}{e}$. D. 0.

Câu 19: Các giá trị của m để phương trình: $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} - \cos x + \frac{1}{4} \sin^2 x + m - 1 = 0$ có nghiệm là:

- A. $m \geq -1$ B. $m \leq 1$ C. $-1 \leq m \leq 0$ D. $-1 \leq m \leq 1$

Câu 20: Gọi M, m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $f(x) = \sin^3 x - 3\sin x + 1$

trên $[0; \pi]$. Khi đó giá trị M và m lần lượt là:

- A. 3; -1 B. 1; -1 C. 3; 1 D. 1; -3

Câu 21: Gọi m giá trị nhỏ nhất, M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4x^3 - 17x^2 + 10x + 5$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tính $m + 3M$?

- A. $\frac{-56}{9}$ B. $\frac{-1928}{27}$ C. $\frac{178}{27}$ D. $\frac{178}{9}$

Câu 22: Gọi m giá trị nhỏ nhất, M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = 126x^4 - 398x^3 + 27x^2 + 96x + 52$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$. Tính $m + 3M$?

- A. $\frac{-5351}{9}$ B. $\frac{1993}{27}$ C. $\frac{4659}{128}$ D. $-\frac{64103}{27}$

Câu 23. Khẳng định nào sau đây là sai:

- A. Hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có giá trị nhỏ nhất trên bằng 0
B. Hàm số $y = -x^2 + 2x$ không có giá trị nhỏ nhất
C. Hàm số $y = -x^2 + 2x$ có giá trị lớn nhất khi $x = 1$
D. Hàm số $y = \sqrt{100 - x^2}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[-8; 6]$ bằng 6

Câu 24: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x+5} + \sqrt{3-x}$ trên $[-5; 3]$ là

- A. 4 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. 5

Câu 25: Giá trị nhỏ nhất của hàm $y = \frac{2 \sin x + 3}{\sin x + 1}$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là

- A. $\frac{5}{2}$ B. 3 C. 0 D. $\frac{1}{2}\pi$

Câu 26: Với giá trị nào của m thì trên $[0; 2]$ hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + m$ có giá trị lớn nhất bằng -4:

- A. $m = -8$ B. $m = -4$ C. $m = 0$ D. $m = 4$

Câu 27 : Tất cả giá trị của m để trên $[-1; 2]$ hàm số $y = \frac{(m-2)x + m^2}{x+2}$ có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{4}$ là:

- A. $m = -3; m = 1$ B. $m = -1; m = 2$ C. $m = 2$ D. $m = -3$

Câu 28. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -4\sqrt{3-x}$ là:

- A. 3 B. -3 C. 0 D. -4

Câu 29. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -3\sqrt{1-x}$ là:

A. 0 B. -3 C. 1 D. -1

Câu 30. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \sin 2x - 4 \cos 2x$ là:

A. 3 B. -5 C. -4 D. -3

Câu 31. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \cos 2x - 4 \sin x$ là:

A. $\frac{11}{3}$ B. -5 C. 1 D. -7

Câu 32. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$ là:

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 0 D. 3

Câu 33 : Giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = (3-x)\sqrt{x^2+1}$ trên $[0; 2]$ là:

A. $M = 3, m = \sqrt{5}$ B. $M = 2\sqrt{5}, m = \frac{5\sqrt{5}}{4}$ C. $M = 5, m = \sqrt{3}$ D. $M = 10, m = \sqrt{3}$

Câu 34 : Giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = |x^2 - 3x + 2|$ trên $[-3; 3]$ là:

A. $M = 20, m = \frac{-1}{4}$ B. $M = 20, m = 0$ C. $M = 20, m = \frac{1}{4}$ D. $M = 21, m = \frac{1}{4}$

Câu 35: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x(2 - \ln x)$ trên $[2; 3]$ là :

A. 1 B. $4 - 2 \ln 2$ C. e D. $-2 + 2 \ln 2$

Câu 36 : Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + e^2})$ trên $[0; e]$ là :

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $1 + \ln(1 + \sqrt{2})$ D. $1 - \ln(1 + \sqrt{2})$

Câu 37: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ là:

- A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{2}$ tại $x = \pm 1$; không có giá trị lớn nhất.
- B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0 tại $x = \pm 1$; giá trị lớn nhất là $\sqrt{2}$ tại $x = 0$.
- C. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.
- D. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0 tại $x = 0$; giá trị lớn nhất là $\sqrt{2}$ tại $x = \pm 1$.

Câu 46. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$ là:

- A. 0 B. 4 C. -2 D. 2

Câu 47. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x^2 + x}$ là:

- A. 0 và $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và 1 C. 0 và $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. 1 và $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 48. GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ lần lượt là :

- A. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ và 2 B. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ và -2 C. 2 và -2 D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ và -2

Câu 49. GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{2} \cos x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ lần lượt là :

- A. $\frac{\pi}{4} - 1$ và $\sqrt{2}$ B. $\frac{\pi}{4} + 1$ và $\sqrt{2}$ C. $\frac{\pi}{4}$ và $\sqrt{2}$ D. $-\frac{\pi}{4}$ và $\sqrt{2} + 1$

Câu 50. GTLN và GTNN của hàm số: $y = 2\sin^2 x - \cos x + 1$ là:

- A. $\text{Maxy} = \frac{25}{8}$, $\text{miny} = 0$ B. $\text{Maxy} = \frac{23}{8}$, $\text{miny} = 0$
C. $\text{Maxy} = \frac{25}{8}$, $\text{miny} = -1$ D. $\text{Maxy} = \frac{27}{8}$, $\text{miny} = 0$

Câu 51. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = (3 - x)\sqrt{x^2 + 1}$ trên đoạn $[0; 2]$ là:

- A. $\text{Maxy} = 3$, $\text{miny} = \sqrt{5}$ B. $\text{Maxy} = 2\sqrt{5}$, $\text{miny} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$
C. $\text{Maxy} = 5$, $\text{miny} = \sqrt{3}$ D. $\text{Maxy} = 2\sqrt{3}$, $\text{miny} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

Câu 52: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x + 1 + \frac{1}{2x + 1}$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng:

- A. $\frac{26}{5}$ B. $\frac{10}{3}$ C. $\frac{14}{3}$ D. $\frac{24}{5}$

Câu 53. Hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0; 2]$ là:

- A. 0 B. -2 C. 2 D. 4

Câu 54. Cho hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0 và giá trị lớn nhất là $\frac{5}{2}$
- B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0 và không có giá trị lớn nhất
- C. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất
- D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và có giá trị lớn nhất là $\frac{5}{2}$

Câu 55. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = -\frac{x^4}{4} + x^2 + 1$ trên $[0;3]$.

- A. $\max_{[0;3]} y = 2$
- B. $\max_{[0;3]} y = 5$
- C. $\max_{[0;3]} y = -3$
- D. $\max_{[0;3]} y = \frac{41}{4}$

Câu 56. Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

- A. $y_{CD} = 0$
- B. $y_{CD} = 1$
- C. $y_{CD} = -4$
- D. $y_{CD} = -24$

Câu 58. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x}{x+2}$ trên nửa khoảng $(-2;4]$.

- A. $\max_{(-2;4]} y = \frac{2}{3}$
- B. $\max_{(-2;4]} y = \frac{1}{3}$
- C. $\max_{(-2;4]} y = \frac{1}{5}$
- D. $\max_{(-2;4]} y = \frac{4}{3}$

Câu 59. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4;4]$.

- A. $\max_{[-4;4]} y = 40$
- B. $\max_{[-4;4]} y = 8$
- C. $\max_{[-4;4]} y = -41$
- D. $\max_{[-4;4]} y = 15$

Câu 60. Hàm số $f(x) = \sqrt{3-2x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ khi:

- A. $x = \frac{1}{2}$
- B. $x = 0$
- C. $x = \sqrt{3}$
- D. $x = \sqrt{2}$

Câu 61. Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

- A. $y_{CT} = -4$.
- B. $y_{CT} = 1$.
- C. $y_{CT} = -2$.
- D. $y_{CT} = 0$.

Câu 62. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$ trên \mathbb{R} .

- A. $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{5}{2}$.
- B. $\min_{\mathbb{R}} y = 7$.
- C. $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{2}{5}$.
- D. $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{1}{7}$.

Câu 63 : Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{25-x^2}$ trên đoạn $[-3;4]$ là:

A. 3 B. 0 C. 5 D. 4

Câu 64. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$ là

A. 0 B. 4 C. -2 D. 2

Câu 65: Cho hàm số $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ bằng

A. $\sqrt{2}$ B. 0 C. 2 D. 1

Câu 66 : Giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = (3-x)\sqrt{x^2+1}$ trên $[0; 2]$ là:

A. $M = 3, m = \sqrt{5}$ B. $M = 2\sqrt{5}, m = \frac{5\sqrt{5}}{4}$
C. $M = 5, m = \sqrt{3}$ D. $M = 10, m = \sqrt{3}$

Câu 67 : Giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = |x^2 - 3x + 2|$ trên $[-3; 3]$ là:

A. $M = 20, m = \frac{-1}{4}$ B. $M = 20, m = 0$
C. $M = 20, m = \frac{1}{4}$ D. $M = 21, m = \frac{1}{4}$

Câu 68: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x(2 - \ln x)$ trên $[2; 3]$ là :

A. 1 B. $4 - 2 \ln 2$ C. e D. $-2 + 2 \ln 2$

Câu 69 : Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + e^2})$ trên $[0; e]$ là :

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $1 + \ln(1 + \sqrt{2})$ D. $1 - \ln(1 + \sqrt{2})$

Câu 70: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ là:

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{2}$ tại $x = \pm 1$; không có giá trị lớn nhất.
B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0 tại $x = \pm 1$; giá trị lớn nhất là $\sqrt{2}$ tại $x = 0$.
C. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.
D. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0 tại $x = 0$; giá trị lớn nhất là $\sqrt{2}$ tại $x = \pm 1$.

Câu 71: Cho hàm số $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng: