

## BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

NB-TH: 26 câu - VD: 21 câu - VDC: 8 câu

### A. LÝ THUYẾT

■ Định nghĩa: Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $K$ , với  $K$  là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạn.

✚ Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến (tăng) trên  $K$  nếu  $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

✚ Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến (giảm) trên  $K$  nếu  $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

■ Điều kiện cần để hàm số đơn điệu: Giả sử hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên khoảng  $K$ .

✚ Nếu hàm số đồng biến trên khoảng  $K$  thì  $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ .

✚ Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng  $K$  thì  $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ .

■ Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu: Giả sử hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên khoảng  $K$ .

✚ Nếu  $f'(x) > 0, \forall x \in K$  thì hàm số đồng biến trên khoảng  $K$ .

✚ Nếu  $f'(x) < 0, \forall x \in K$  thì hàm số nghịch biến trên khoảng  $K$ .

✚ Nếu  $f'(x) = 0, \forall x \in K$  thì hàm số không đổi trên khoảng  $K$ .

■ Chú ý.

✚ Nếu  $K$  là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết “Hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”. Chẳng hạn: Nếu hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  và có đạo hàm  $f'(x) > 0, \forall x \in K$  trên khoảng  $(a; b)$  thì hàm số đồng biến trên đoạn  $[a; b]$ .

✚ Nếu  $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$  (hoặc  $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ ) và  $f'(x) = 0$  chỉ tại một số điểm hữu hạn của  $K$  thì hàm số đồng biến trên khoảng  $K$  (hoặc nghịch biến trên khoảng  $K$ ).

### B. BÀI TẬP

#### 1.1.1 Chiều biến thiên của hàm số

**Câu 1.** [NB-TH] Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $K \subset \mathbb{R}$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Nếu  $f'(x) \geq 0, \forall x \in K, f'(x) = 0$  chỉ tại một số hữu hạn điểm của  $K$  thì hàm số tăng trên  $K$ .

B. Nếu  $f'(x) > 0$  thì hàm số đồng biến trên khoảng  $K$ .

C. Nếu  $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$  thì hàm số tăng trên  $K$ .

D. Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến (tăng) trên  $K$  nếu  $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

Hướng dẫn giải

Xem phần lý thuyết.

**Câu 2.** [NB-TH] Cho hàm số  $y = \frac{x+1}{1-x}$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$ .

B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ .

C. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$ .

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ .

Hướng dẫn giải

+) TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

+)  $y' = \frac{2}{(1-x)^2} > 0, \forall x \neq 1$

+) Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$

**Câu 3.** [NB-TH] Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

B. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$ .

C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$  và nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

D. Hàm số luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Hướng dẫn giải

+) TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

+)  $y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

**Câu 4.** [NB-TH] Cho hàm số  $y = -x^4 + 4x^2 + 10$  và các khoảng sau:

(I)  $(-\infty; -\sqrt{2})$ ; (II)  $(-\sqrt{2}; 0)$ ; (III)  $(0; \sqrt{2})$ . Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. (I) và (III).

B. (I) và (II).

C. (II) và (III).

D. Chỉ (I).

Hướng dẫn giải

+) TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

$$+) y' = -4x^3 + 8x = 4x(2 - x^2). \text{ Giải } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

+) Trên các khoảng  $(-\infty; -\sqrt{2})$  và  $(0; \sqrt{2})$ ,  $y' > 0$  nên hàm số đồng biến.

**Câu 5.** [NB-TH] Cho hàm số  $y = \frac{3x-1}{-4+2x}$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.

B. Hàm số luôn nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ .

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -2)$  và  $(-2; +\infty)$ .

Hướng dẫn giải

$$+) \text{ TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$+) \text{ Ta có } y' = -\frac{10}{(-4+2x)^2} < 0, \forall x \in D.$$

**Câu 6.** [NB-TH] Hỏi hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ ?

A.  $f(x) = -\frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - x$ .

B.  $g(x) = x^3 + 3x^2 + 10x + 1$ .

C.  $h(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ .

D.  $k(x) = x^3 + 10x - \cos^2 x$ .

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = -4x^4 + 4x^2 - 1 = -(2x^2 - 1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Câu 7.** [NB-TH] Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$ . Hỏi hàm số nghịch trên các khoảng nào?

A.  $(-4; -1)$  và  $(-1; 2)$ .

B.  $(-4; 2)$ .

C.  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$ .

D.  $(-\infty; -4)$  và  $(2; +\infty)$ .

Hướng dẫn giải

$$+) \text{ TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$+) y' = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2}.$$

+) Giải  $y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$

$y'$  không xác định khi  $x = -1$

+) BBT

$x$	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-11	$+\infty$	1	$+\infty$

+) Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-4; -1)$  và  $(-1; 2)$

**Câu 8.** [NB-TH] Cho hàm số  $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 2$ . Hỏi hàm số nghịch biến trên khoảng nào?

- A.  $(2; 3)$                       B.  $(1; 6)$                       C.  $(-\infty; 1)$                       D.  $(5; +\infty)$

Hướng dẫn giải

+) TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

+)  $y' = x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$

+) lập bảng biến thiên, suy ra hàm số nghịch biến trên  $(1; 5)$

**Câu 9.** [NB-TH] Cho hàm số  $y = \frac{3}{5}x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2$ . Hỏi hàm số đồng biến trên khoảng nào?

- A.  $\mathbb{R}$ .                      B.  $(-\infty; 0)$ .                      C.  $(0; 2)$ .                      D.  $(2; +\infty)$ .

Hướng dẫn giải

+) TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

+)  $y' = 3x^4 - 12x^3 + 12x^2 = 3x^2(x-2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

**Câu 10.** [NB-TH] Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Hỏi hàm số luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$  khi nào?

A.  $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} a = b = c = 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$$

**Câu 11.** [NB-TH] Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 15$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-3; 1)$ .

C. Hàm số đồng biến trên  $(-9; -5)$ .

D. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(5; +\infty)$ .

Hướng dẫn giải

+) TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

+) Do  $y' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x-1)(x+3)$  nên hàm số **không** đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Câu 12.** [NB-TH] Cho hàm số  $y = \sqrt{3x^2 - x^3}$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; 0)$  và  $(2; 3)$ .

B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ .

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 2); (2; 3)$ .

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(2; 3)$ .

Hướng dẫn giải

+) ĐK:  $3x^2 - x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$  suy ra  $D = (-\infty; 3]$

$$+) y' = \frac{6x - 3x^2}{2\sqrt{3x^2 - x^3}}$$

$$\text{Giải } y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$y' \text{ không xác định khi } \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

+) BBT

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$3$
$y'$		$- \parallel$	$+ \ 0$	$- \parallel$
$y$	$+\infty$			$2$
		$0$		$0$

Hàm số nghịch biến  $(-\infty; 0)$  và  $(2; 3)$

Hàm số đồng biến  $(0; 2)$

**Câu 13.** [NB-TH] Cho hàm số  $y = \frac{x}{2} + \sin^2 x, x \in [0; \pi]$ . Hỏi hàm số đồng biến trên khoảng nào?

A.  $\left(0; \frac{7\pi}{12}\right)$  và  $\left(\frac{11\pi}{12}; \pi\right)$ .

B.  $\left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right)$ .

C.  $\left(0; \frac{7\pi}{12}\right)$  và  $\left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right)$ .

D.  $\left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right)$  và  $\left(\frac{11\pi}{12}; \pi\right)$ .

Hướng dẫn giải

+) TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

+)  $y' = \frac{1}{2} + \sin 2x$ .

$$\text{Giải } y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

Vì  $x \in [0; \pi]$  nên có 2 giá trị  $x = \frac{7\pi}{12}$  và  $x = \frac{11\pi}{12}$  thỏa mãn điều kiện.

+) BBT

x	0	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\pi$			
y'		+	0	-	0	+	
y							

Hàm số đồng biến  $\left(0; \frac{7\pi}{12}\right)$  và  $\left(\frac{11\pi}{12}; \pi\right)$

**Câu 14.** [NB-TH] Cho hàm số  $y = x + \cos^2 x$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

B. Hàm số đồng biến trên  $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; +\infty\right)$  và nghịch biến trên khoảng  $\left(-\infty; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ .

C. Hàm số nghịch biến trên  $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; +\infty\right)$  và đồng biến trên khoảng  $\left(-\infty; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ .

D. Hàm số luôn nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

Hướng dẫn giải

+) TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ ;  $y' = 1 - \sin 2x \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

+) Hàm số luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$

**Câu 15.** [NB-TH] Cho các hàm số sau:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 4; y = \frac{x-1}{x+1}; y = \sqrt{x^2 + 4}; y = x^3 + 4x - \sin x \text{ và } y = x^4 + x^2 + 2.$$

Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên những khoảng mà nó xác định?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Hướng dẫn giải

+)  $y' = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$y' = \left( \frac{x-1}{x+1} \right)' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \quad \forall x \neq -1$$

$$y' = \left( \sqrt{x^2 + 4} \right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$y' = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1)$$

$$y' = 3x^2 + 4 - \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

**Câu 16.** [NB-TH] Hỏi hàm số nào sau đây nghịch biến trên toàn trục số ?

$$y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1(I)$$

$$y = \sin x - 2x(II)$$

$$y = -\sqrt{x^3 + 2}(III)$$

$$y = \frac{x-2}{1-x}(IV)$$

A. (I), (II).

B. (I), (II) và (III).

C. (I), (II) và (IV).

D. (II), (III).

Hướng dẫn giải

$$+) y' = (-x^3 + 3x^2 - 3x + 1)' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$+) y' = (\sin x - 2x)' = \cos x - 2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$+) y' = -\left( \sqrt{x^3 + 2} \right)' = -\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 2}} \leq 0 \quad \forall x \in \left( -\sqrt[3]{2}; +\infty \right);$$

$$+) y' = \left( \frac{x-2}{1-x} \right)' = \left( \frac{x-2}{-x+1} \right)' = -\frac{1}{(1-x)^2} < 0 \quad \forall x \neq 1$$

**Câu 17.** [NB-TH] Xét các mệnh đề sau.

(I). Hàm số  $y = -(x-1)^3$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

(II). Hàm số  $y = \ln(x-1) - \frac{x}{x-1}$  đồng biến trên tập xác định của nó.

(III). Hàm số  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.



Hướng dẫn giải

$$+) y' = \left( -(x-1)^3 \right)' = -3(x-1)^2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$+) y' = \left( \ln(x-1) - \frac{x}{x-1} \right)' = \frac{x}{(x-1)^2} > 0, \forall x > 1$$

$$+) y' = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \left( \sqrt{x^2+1} \right)'}{x^2+1} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Câu 18.** [NB-TH] Cho hàm số  $y = |x+1|(x-2)$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; \frac{1}{2})$ .

C. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(\frac{1}{2}; +\infty)$ .

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; \frac{1}{2})$  và đồng biến trên khoảng  $(\frac{1}{2}; +\infty)$ .

Hướng dẫn giải

$$+) y' = \begin{cases} 2x-1, & x > -1 \\ -2x+1, & x < -1 \end{cases}$$

$$+) y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$\parallel$	$-$	$0$	$+$
$y$					

--	--

**Câu 19.** [NB-TH] Cho hàm số  $y = x + 3 + 2\sqrt{2-x}$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$  và nghịch biến trên khoảng  $(1; 2)$ .
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$  và nghịch biến trên khoảng  $(-2; 2)$ .
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$  và đồng biến trên khoảng  $(-2; 2)$ .
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$  và đồng biến trên khoảng  $(1; 2)$ .

Hướng dẫn giải

+) TXĐ:  $D = (-\infty; 2]$

$$y' = \frac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{2-x}}. \text{ Giải } y' = 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$y'$  không xác định khi  $x = 2$

+) BBT

$x$	$-\infty$	<b>1</b>	<b>2</b>	
$y'$	+	0	-	
$y$		↗	↘	
	$-\infty$			5

**Câu 20.** [NB-TH] Cho hàm số  $y = \cos 2x + \sin 2x \cdot \tan x, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số không đổi trên  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

B. Hàm số luôn tăng trên  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .