VẤN ĐỀ 6: PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

Phương trình lôgarit là phương trình có chứa ẩn số dưới dấu lôgarit.

Chú ý: Khi giải phương trình lôgarit nhớ đặt điều kiện xác định.

Ví dụ: $\log_{f(x)} g(x) \overset{ĐK}{\rightarrow} \begin{cases} 0 < f(x) \neq 1 \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

DẠNG 1: PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT CƠ BẢN

1. Phương pháp

$$\log_a x = m, \left(0 < a \neq 1\right) \Leftrightarrow x = a^m.$$

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Phương trình $\log_3(3x-2) = 3$ có nghiệm là

A. $x = \frac{11}{3}$. **B.** $x = \frac{25}{3}$. **C.** $x = \frac{29}{3}$. **D.** $x = 87$.

Lời giải:

Điều kiện: $x > \frac{2}{3}$.

Ta có: $\log_3(3x-2) = 3 \Leftrightarrow 3x - 2 = 3^3 \Leftrightarrow x = \frac{29}{3}\ (tm) \Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 2. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x-2) + 1 = 0$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải:

Điều kiện: $x > 2$.

Ta có: $\log_3(x-2) + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_3(x-2) = -1 \Leftrightarrow x - 2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}\ (tm)$.

Phương trình đã cho có một nghiệm $\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 3. Nghiệm của phương trình $\log_2(\log_4 x)=1$ là

A. $x=16.$ **B.** $x=2.$ **C.** $x=4.$ **D.** $x=8.$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ \log_4 x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$

Ta có: $\log_2(\log_4 x)=1 \Leftrightarrow \log_4 x=2 \Leftrightarrow x=4^2=16 \Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 4. Tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}|x+1|=2$ là

A. $\{3\}.$ **B.** $\{-4;2\}.$ **C.** $\{-10;2\}.$ **D.** $\{-3;2\}.$

Lời giải:

Điều kiện: $|x+1|>0 \Leftrightarrow x\neq -1.$

Ta có: $\log_{\sqrt{3}}|x+1|=2 \Leftrightarrow |x+1|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=3 \\ x+1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \quad (tm) \\ x=-4 \quad (tm) \end{array}\right. \Rightarrow S=\{-4;2\}.$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 5. Gọi $x_1;\ x_2$ là nghiệm của phương trình $\log_3 x(x+2)=1$ với $x_1<x_2$. Khi đó $x_1;\ x_2$ thỏa mãn

A. $x_1.(x_2+2)=3.$ **B.** $x_1+x_2=-3.$ **C.** $x_1.x_2=-2.$ **D.** $x_1+3x_2=0.$

Lời giải:

Điều kiện: $x(x+2)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-2 \end{array}\right..$

Ta có: $\log_3 x(x+2)=1 \Leftrightarrow x(x+2)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2=1 \quad (tm) \\ x_1=-3 \quad (tm) \end{array}\right. \Rightarrow x_1+3x_2=0 \Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 6. Nghiệm của phương trình $\log_x(x+2)=2$ là

A. $x=-1.$ **B.** $x=2.$ **C.** $x=-2.$ **D.** $x=0.$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+2>0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}.$

Ta có: $\log_x(x+2)=2 \Leftrightarrow x+2=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-1 & (loại) \\ x=2 & (tm) \end{array}\right. \Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 7. Phương trình $\log_x(2x^2-5x+4)=2$ có nghiệm là

A. $x=4.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right..$ **C.** $x=1.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right..$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2-5x+4>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}.$

Ta có: $\log_x(2x^2-5x+4)=2 \Leftrightarrow 2x^2-5x+4=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=4 & (tm) \\ x=1 & (loại) \end{array}\right. \Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 8. Nghiệm của phương trình $\log_{x-3}(x-1)=2$ là

A. $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=5 \end{array}\right..$ **B.** $x=5.$ **C.** $x=2.$ **D.** $x=1.$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x-1>0 \\ x-3>0 \\ x-3\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>3 \\ x\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x\neq 4 \end{cases}.$

Ta có: $\log_{x-3}(x-1)=2 \Leftrightarrow x-1=(x-3)^2 \Leftrightarrow x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=5 & (tm) \\ x=2 & (loại) \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 9. Phương trình $\log_{x^2}(3-2x)=1$ có nghiệm là

A. $x=\frac{3}{2}$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=-1$.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases}3-2x>0\\x^2>0\\x^2\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<\frac{3}{2}\\x\neq 0\\x\neq \pm 1\end{cases}$.

Ta có: $\log_{x^2}(3-2x)=1 \Leftrightarrow 3-2x=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\ \ (loại)\\x=-3\ (tm)\end{array}\right. \Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 10. Phương trình $\log_{x^2+3x}(x+3)=1$ có nghiệm là

A. $x=1$. **B.** $x=-3$. **C.** $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=2\end{array}\right.$.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x+3>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\x^2+3x>0\\x^2+3x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-3\\\left[\begin{array}{l}x>0\\x<-3\end{array}\right.\\x\neq\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\x\neq\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\end{cases}$.

Ta có: $\log_{x^2+3x}(x+3)=1 \Leftrightarrow x+3=x^2+3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\ \ (tm)\\x=-3\ (loại)\end{array}\right. \Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 11. Gọi $x_1;\ x_2$ là nghiệm của phương trình $\log_{x+3}(x^2-x)=1$. Khi đó tích $x_1.x_2$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** -3. **D.** 0.

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ x+3>0 \\ x+3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<0 \end{array}\right. \\ x>-3 \\ x \neq -2 \end{cases} \begin{cases} x>1 \\ -3<x<0 \\ x \neq -2 \end{cases}.$

Ta có: $\log_{x+3}\left(x^2-x\right)=1 \Leftrightarrow x^2-x=x+3 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow x_1x_2=\frac{c}{a}=-3.$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 12. Nghiệm của phương trình $\log_{x+1}\left(2x^3+2x^2-3x+1\right)=3$ là

A. $x=1.$ **B.** $x=-2.$ **C.** $x=0.$ **D.** $x=3.$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 2x^3+2x^2-3x+1>0 \\ x+1>0 \\ x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3+2x^2-3x+1>0 \\ x>-1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x \neq 0 \end{cases}.$

Ta có: $\log_{x+1}\left(2x^3+2x^2-3x+1\right)=3 \Leftrightarrow 2x^3+2x^2-3x+1=(x+1)^3$

$\Leftrightarrow x^3-x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=3 & (tm) \\ x=-2 & (loại) \\ x=0 & (loại) \end{array}\right. \Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

DẠNG 2: ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

3. Phương pháp

Cho $0<a\neq 1$. Khi đó:

+ $\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \quad (hay \quad g(x)>0) \\ f(x)=g(x) \end{cases}.$

+ $\log_a f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)=a^{g(x)}$ (mũ hóa).

4. Bài tập trắc nghiệm

Câu 13. Phương trình $\log_2\left(x^2+x+4\right)=\log_2(3x+7)$ có nghiệm là

A. $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=3$. **D.** $x>-\frac{7}{3}$.

Câu 14. Phương trình $\log_2 x+\log_2(x+1)=1$ có tập nghiệm là

A. $S=\{1\}$. **B.** $S=\{1;-2\}$. **C.** $S=\left\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. **D.** $S=\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Câu 15. Số nghiệm của phương trình $\lg(x-3)+\lg(x-2)=1-\lg 5$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 16. Điều kiện xác định của phương trình $\lg(x-3)-\lg(9-x)=\lg(x-2)$ là

A. $2<x<9$. **B.** $x<3$. **C.** $-9<x<3$. **D.** $3<x<9$.

Câu 17. Số nghiệm của phương trình $2\log_8(2x)+\log_8(x^2-2x+1)=\frac{4}{3}$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 18. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-6)=\log_3(x-2)+1$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 19. Phương trình $2\log_2(2x+2)+\log_{\frac{1}{2}}(9x-1)=1$ có tổng các nghiệm bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** 0. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 20. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2+4x)+\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)=0$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 21. Nghiệm của phương trình $\log_2(x^3+1)-\log_2(x^2-x+1)-2\log_2 x=0$ là

A. $x>-1$. **B.** $x\neq 0$. **C.** $x\in\mathbb{R}$. **D.** $x>0$.

Câu 22. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)^2=2\log_2(x^3+x+1)$ là

A. $x=9$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=0$.

Câu 23. Phương trình $\log_2|x-2|-\log_{\frac{1}{2}}|x+5|-\log_2 8=0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 24. Phương trình $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3)+\frac{1}{4}\log_4(x-1)^8=3\log_8(4x)$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 25. Nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2+3x+2\right)+\log_2\left(x^2+7x+12\right)=3+\log_2 3$ là

A. $x=0;x=-3.$ **B.** $x=-4;x=-3.$ **C.** $x=0;x=-5.$ **D.** $x=-5;x=-4.$

Câu 26. Số nghiệm của phương trình $2\log_2\sqrt{x+1}=2-\log_2\left(x-2\right)$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** đáp số khác.

Câu 27. Số nghiệm của phương trình $\log_2\left(9^x-4\right)=x\log_2 3+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** đáp số khác.

Câu 28. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2\left(9^{x-2}+7\right)-\log_2\left(3^{x-2}+1\right)=2$ bằng

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 29. Cho phương trình $\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}\left(x+2\right)^2-3=\log_{\frac{1}{4}}\left(4-x\right)^3+\log_{\frac{1}{4}}\left(x+6\right)^3 \quad (1).$

Trong các mệnh đề sau:

+ (I). Điều kiện phương trình: $-6<x<4$ và $x\neq -2.$
+ $(II).(1)\Leftrightarrow 3\log_{\frac{1}{4}}\left|x+2\right|-3=3\log_{\frac{1}{4}}\left(4-x\right)+3\log_{\frac{1}{4}}\left(x+6\right).$
+ $(III).(1)\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}\left(4\left|x+2\right|\right)=\log_{\frac{1}{4}}\left[\left(4-x\right)\left(x+6\right)\right].$

Mệnh đề nào đúng?

A. Cả (I), (II), (III). **B.** Chỉ (I), (III).

C. Chỉ (II), (III). **D.** Chỉ (I), (II).

Câu 30. Cho phương trình $\log_2\left(x+1\right)^2+\log_2\sqrt{x^2+2x+1}=9 \quad (1).$

Trong các mệnh đề sau:

+ $(I).(1)\Leftrightarrow 2\log_2\left|x+1\right|+\log_2\left|x+1\right|=9,$ với điều kiện $x\neq -1.$
+ $(II).(1)\Leftrightarrow \left|x+1\right|=8.$
+ $(III).(1)\Leftrightarrow x^2+2x-63=0.$

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I), (III). **B.** Cả (I), (II), (III).

C. Chỉ (II), (III). **D.** Chỉ (I), (II).

Câu 31. Cho phương trình $\log_{3+2\sqrt{2}}\left(x+m-1\right)+\log_{3-2\sqrt{2}}\left(mx+x^2\right)=0.$ Giá trị thích hợp của m để phương trình có nghiệm duy nhất là

A. $m=-3.$ **B.** $m=-1.$ **C.** $m=3.$ **D.** $m=1.$

Câu 32. Cho phương trình: $2\log_3(x-3)+\log_3(x-4)^2=0$. Một học sinh giải bài toán như sau:

+ **Bước 1**: Điều kiện: $\begin{cases} x-3>0 \\ (x-4)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x\neq 4 \end{cases}$.

+ **Bước 2**: Ta có: $2\log_3(x-3)+2\log_3(x-4)=0$

$$\Leftrightarrow \log_3(x-3)(x-4)=0$$

+ **Bước 3**: $\Leftrightarrow (x-3)(x-4)=1 \Leftrightarrow x^2-7x+11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{7-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}$.

Học sinh đó giải sai ở bước nào?

A. Tất cả các bước đều đúng. **B.** Bước 3.

C. Bước 2. **D.** Bước 1.

Câu 33. Phương trình $\log_{\sqrt{a}}\dfrac{\sqrt{2a-x}}{a}-\log_{\frac{1}{a}}x=0;\ (a>0, a\neq 1)$ có nghiệm là

A. $x=2a-1$. **B.** $x=a-1$. **C.** $x=2a$. **D.** $x=a$.

DẠNG 2: PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

1. Phương pháp

➢ **Loại 1: Phương trình có dạng** $P(\log_a f(x))=0$ **với** $(0<a\neq 1)$

$$\boxed{P(\log_a f(x))=0 \xrightarrow{\text{Đặt } t=\log_a f(x)} P(t)=0}.$$

Chú ý: Từ $t=\log_a f(x) \Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{a}} f(x)=-t \\ \log_a^2 f(x)=t^2 \\ \log_{a^2} f(x)=\frac{1}{2}t \\ \ldots \end{cases}$

- **Loại 2: Đặt ẩn phụ không hoàn toàn.**
- **Loại 3: Đặt ẩn phụ đưa về hệ.**
- **Loại 4: Đặt hai ẩn phụ đưa về phương trình có thể biến đổi đưa về phương trình tích.**

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 34. Số nghiệm của phương trình $\log_5^2(5x)-\log_{25}(5x)-3=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 35. Số nghiệm của phương trình $\ln^3 x-3\ln^2 x-4\ln x+12=0$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 36. Phương trình $\lg^2 x-\lg x^3+2=0$ có nghiệm là

A. 1000. **B.** 10. **C.** -2. **D.** 100.

Câu 37. Phương trình $\log_x 2-\log_{16} x=0$ có tích các nghiệm bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** -4.

Câu 38. Tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{2}}^2 x+4\log_2 x=0$ là

A. $S=\{1;16\}$. **B.** $S=\{1;4\}$. **C.** $S=\{1;2\}$. **D.** $S=\{4\}$.

Câu 39. Phương trình $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1$ có số nghiệm là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 40. Phương trình $\frac{1}{5-\log_2 x}+\frac{2}{1+\log_2 x}=1$ có tổng các nghiệm là

A. 5. **B.** $\frac{33}{64}$. **C.** 66. **D.** 12.

Câu 41. Phương trình $\log_2 4x-\log_{\frac{x}{2}} 2=3$ có

A. 2 nghiệm. **B.** 3 nghiệm. **C.** 1 nghiệm. **D.** 4 nghiệm.

Câu 42. Số nghiệm âm của phương trình $1+2\log_{x+2} 5=\log_5(x+2)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** đáp số khác.

Câu 43. Cho phương trình $\frac{\log_3 x}{\log_9(3x)} = \frac{\log_{27}(9x)}{\log_{81}(27x)}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Phương trình có hai nghiệm thực dương.

B. Phương trình có một nghiệm thực dương.

C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

D. Phương trình vô nghiệm.

Câu 44. Cho phương trình: $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$. Bình phương một tổng của các nghiệm của phương trình là bao nhiêu?

A. 90. **B.** 6570. **C.** 144. **D.** 7056.

Câu 45. Phương trình $\log_2^2(x+1) - 6\log_2\sqrt{x+1} + 2 = 0$ có tập nghiệm là

A. $\{3;15\}$. **B.** $\{1;2\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\{1;3\}$.

Câu 46. Tìm *m* để phương trình $\log_{\sqrt{3}}^2 x - m\log_{\sqrt{3}} x + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất nhỏ hơn 1.

A. $m = 2$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** không tồn tại *m*.

Câu 47. Phương trình $\log_2^2 x + \log_2 x + m = 0$ có nghiệm $x \in (0;1)$ khi

A. $m \le 1$. **B.** $m \ge \frac{1}{4}$. **C.** $m \le \frac{1}{4}$. **D.** $m \ge 1$.

Câu 48. Phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có nghiệm trên $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$ khi

A. $m \in \left[0;\frac{3}{2}\right]$. **B.** $m \in (-\infty;0] \cup \left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

C. $m \in [0;+\infty)$. **D.** $m \in \left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$.

Câu 49. Số nghiệm của phương trình $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2 x + 1} = 1$ là

A. 1 nghiệm. **B.** 2 nghiệm. **C.** 3 nghiệm. **D.** 4 nghiệm.

Câu 50. Số nghiệm nguyên của hương trình $(x+1)\log_3^2 x + 4x.\log_3 x - 16 = 0$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

DẠNG 3: BIẾN ĐỔI ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Câu 51. Số nghiệm của phương trình $\log_2 x.\log_3(2x-1) = 2\log_2 x$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 52. Nghiệm của phương trình $\lg^2 x - \lg x.\log_2(4x) + 2\log_2 x = 0$ là

A. $x=0;x=100.$ **B.** $x=1;x=100.$ **C.** $x=0;x=1000.$ **D.** $x=1;x=1000.$

DẠNG 4: SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Phương pháp

Bài toán 1: Phương trình dạng $\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha\left[g(x)-f(x)\right]$

+ **Bước 1:** Đặt ĐKXĐ (TXĐ: D)
+ **Bước 2:** Phương trình $\Leftrightarrow \log_a f(x) - \log_a g(x) = \alpha g(x) - \alpha f(x)$

$$\Leftrightarrow \log_a f(x) + \alpha f(x) = \log_a g(x) + \alpha g(x) \quad (1)$$

+ **Bước 3:** Xét hàm số $F(t) = \log_a t + \alpha t$ trên D.

  Chứng minh $F(t)$ đơn điệu trên D.

  Khi đó: $(1) \Leftrightarrow F(f(x)) = F(g(x)) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = ...$

Bài toán 2: Phương trình dạng $\log_a f(x) = \log_b g(x)$

+ Nếu $a=b$ thì phương trình $\Leftrightarrow f(x)=g(x)$.
+ Nếu $(a-1)(b-1)<0$ thì dùng phương pháp đoán nghiệm và chứng minh nghiệm đó là duy nhất.
+ Nếu $(a-1)(b-1)>0$ thì dùng phương pháp mũ hóa bằng ẩn phụ. Cụ thể ta làm theo các bước:
  - **Bước 1:** Đặt ĐKXĐ.
  - **Bước 2:** Đặt $\log_a f(x) = \log_b g(x) = t \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a^t \\ g(x) = b^t \end{cases}$.

    Biến đổi về dạng: $F(t) = A^t + B^t = 1 \quad (2)$
  - **Bước 3:** Giải phương trình (2) theo *t* bằng phương pháp đoán nghiệm và chứng minh nghiệm đó là duy nhất.
  - **Bước 4:** Tìm *x* khi có được *t*.

Chú ý: Bài toán $m\log_a f(x) = n\log_b g(x)$ có dạng ta cũng làm tương tự:

$$\xrightarrow[\alpha = \text{BCNN}(m,n)]{PP} \text{Đặt } m\log_a f(x) = n\log_b g(x) = \alpha t$$

Bài toán 3: Phương trình dạng $a^{\alpha x+\beta} = p\log_a(\lambda x+\mu) + qx + r$

Đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại II và sử dụng phương pháp hàm số để tìm được $x = y$.

2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 53. Phương trình $\log_2 x = -x + 6$ có tập nghiệm là

A. $\{4\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\{2\}$. **D.** $\{2;5\}$.

Câu 54. Phương trình $\log_3(x+1) + \log_5(2x+1) = 2$ có

A. 1 nghiệm. **B.** 2 nghiệm. **C.** 3 nghiệm. **D.** 4 nghiệm.

Câu 55. Phương trình $\log_5 x = \log_7(x+2)$ có nghiệm là

A. $x = 1$. **B.** $x = 5$. **C.** vô nghiệm. **D.** $x = 7$.

Câu 56. Phương trình $\log_3(x^2 - x - 5) = \log_3(2x+5)$ có tổng các nghiệm bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** -10.

Câu 57. Số nghiệm của phương trình $\log_3 \dfrac{x^2+x+1}{2x^2-2x+3} = x^2 - 3x + 2$ là

A. 1 nghiệm. **B.** 2 nghiệm. **C.** 3 nghiệm. **D.** 4 nghiệm.

DẠNG 6: MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH KHÁC

Câu 58. Nghiệm của phương trình $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$ là

A. $x = 2$. **B.** $x = 4$. **C.** $x = 8$. **D.** $x = 16$.

Câu 59. Biết phương trình $\log_2\left(\dfrac{5.2^x - 8}{2^x + 2}\right) = 3 - x$ có nghiệm duy nhất x_0. Khi đó giá trị của $P = x_0^{\log_2(4x_0)}$ là

A. $P = 4$. **B.** $P = 8$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = 1$.

Câu 60. Cho phương trình $\log_{(3x+7)}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{(2x+3)}(6x^2 + 23x + 21) = 4$. Chọn phát biểu **đúng**?

A. Tập xác định của phương trình là $D = \left(\dfrac{-3}{2}; +\infty\right)$.

B. Phương trình có duy nhất một nghiệm.

C. Phương trình có 2 nghiệm trái dấu.

D. Phương trình có một nghiệm là $x=\frac{1}{4}$.

Câu 61. Phương trình $\log_4(x+12).\log_2 x=4$ có nghiệm là

A. $x=-3$. **B.** $x=4$. **C.** $\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-3\end{array}\right.$. **D.** đáp án khác.

Câu 62. Cho phương trình $\log_3\left(\sqrt{x}+\left|\sqrt{x}-1\right|\right)=\log_9\left(4\sqrt{x}-3+4\left|\sqrt{x}-1\right|\right)$. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là **sai**?

A. Phương trình có nghiệm là $x=9$. **B.** Phương trình có nghiệm là $x=0$.

C. Phương trình có nghiệm là $x=4$. **D.** Phương trình có nghiệm là $x=1$.

Câu 63. Phương trình $\log_2\left(9-2^x\right)=3-x$ tương đương với phương trình nào dưới đây?

A. $9-2^x=3-x$. **B.** $x^2-3x=0$. **C.** $x^2+3x=0$. **D.** $9-2^x+3=2^{-x}$.

Câu 64. Phương trình $\log_2\left(4^x+2k^3\right)=x$ có 2 nghiệm phân biệt khi

A. $k<\frac{1}{2}$. **B.** $k=\frac{1}{2}$. **C.** $k>0$. **D.** $0<k<\frac{1}{2}$.

Câu 65. Phương trình $\log_2\left(\sqrt{x}+1\right)=2^x+x-\sqrt{x}-1$ có 2 nghiệm $x_1;x_2$. Tổng $x_1^2+x_2^2+x_1x_2$ có giá trị là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 66. Phương trình $(x-4)^2\log_4(x-1)-2\log_4(x-1)^2=(x-4)^2\log_{x-1}4.\log_{x-1}16$ có

A. 0 nghiệm. **B.** 1 nghiệm. **C.** 2 nghiệm. **D.** 3 nghiệm.

Câu 67. Nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{10}+1\right)^{\log_3 x^2}-\left(\sqrt{10}-1\right)^{\log_3 x^2}=\frac{2}{3}x^2$ là

A. $x=\pm\sqrt{3}$. **B.** vô nghiệm. **C.** $x=\sqrt{3}$. **D.** $x=-\sqrt{3}$.