ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A. LÝ THUYẾT:

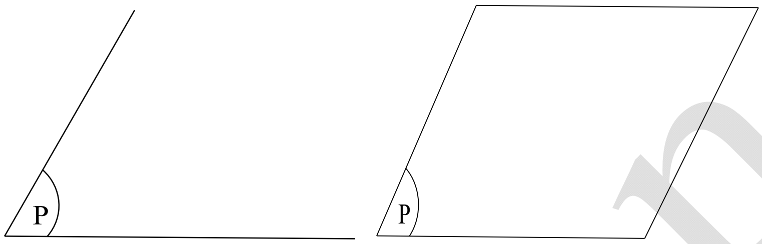
I. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1. Mặt phẳng

Mặt bảng, mặt bàn, mặt nước hồ yên lặng cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.

Để kí hiệu mặt phẳng, ta thường dùng các chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hy Lạp đặt trong dấu ngoặc (). Ví dụ như mặt phẳng $(P),(Q),(\alpha),(\beta)$ …

Để biểu diễn mặt phẳng, ta thường dùng hình bình hành hoặc một miền góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn.



Đường thẳng và mặt phẳng là tập hợp các điểm. Do đó,

- Nếu điểm A thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $A \in a$ và đôi khi còn nói rằng đường thẳng a đi qua điểm A.
- Nếu điểm A thuộc mặt phẳng (α), ta kí hiệu $A \in (\alpha)$ và đôi khi còn nói rằng mặt phẳng (α) đi qua điểm A.
- Nếu đường thẳng a chứ trong mặt phẳng (α), ta kí hiệu $a \subset (\alpha)$ và đôi khi còn nói rằng mặt phẳng (α) đi qua (hoặc chứa) đường thẳng a.

2. Quy tắc để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian

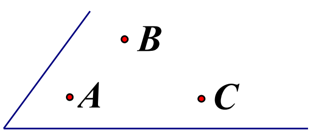
- Hình biểu diễn của một đường thẳng là một đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau. Hai đoạn thẳng song song và bằng nhau thì phải được vẽ song song và bằng nhau. Trung điểm của một đoạn thẳng phải được lấy ngay tại điểm chính giữa của đoạn thẳng đó.
- Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.
- Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy và nét đứt đoạn biểu diễn cho đường bị che khuất.

3. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

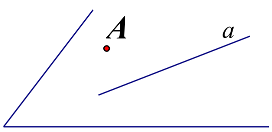
- Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.
- Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Như vậy, một mặt phẳng trong không gian có thể được xác định bởi một trong các cách thức sau:

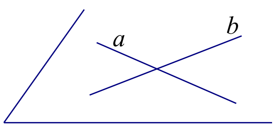
- Mặt phẳng đó đi qua 3 điểm không thẳng hàng A,B,C. Kí hiệu là mp(ABC).
- Mặt phẳng đó đi qua một đường thẳng a và một điểm A không thuộc đường thẳng a. Kí hiệu: ; mp(A,a).



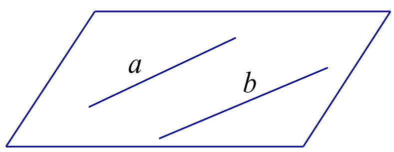
mp(ABC)



mp(A;a)



mp(a,b)

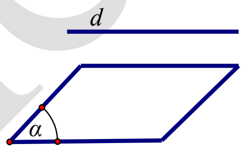


- Mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng cắt nhau a và b . Kí hiệu, mp(a,b).
- Mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng song song a ,b .
- Tính chất 3: Trong không gian có ít nhất bốn điểm không cùng thuộc bất cứ mặt phẳng nào.
- Tính chất 4: Trong không gian, hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.
- Tính chất 5: Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
- Tính chất 6: Trong mỗi mặt phẳng của không gian, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

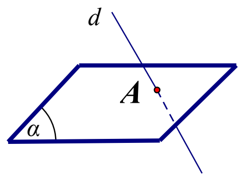
3.Vị trí tương đối của các đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

a) Vị trí tương đối của một đường thẳng và một mặt phẳng

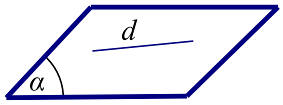
Cho đường thẳng d và một mặt phẳng (α). Có thể xãy ra các khả năng sau:



- Đường thẳng d và mặt phẳng (α) không có điểm chung. Trong trường hợp này ta nói đường thẳng d song song với mặt phẳng (α), kí hiệu $d\,//\,(\alpha)$.



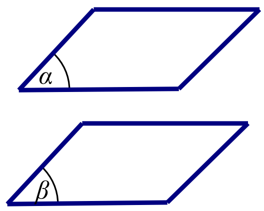
- Đường thẳng d và mặt phẳng (α)có đúng một điểm chung. Trong trường hợp này ta nói ta nói đường thẳng d cắt mặt phẳng(α) tại A, kí hiệu: $d\cap(\alpha)=\{A\}$



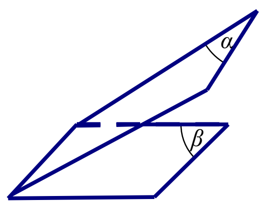
- Đường thẳng d và mặt phẳng(α) có nhiều hơn một điểm chung.Trường hợp này ta nói đường thẳng d nằm trong mặt phẳng(α)ta kí hiệu: $d\subset(\alpha)$ hay $(\alpha)\supset d$.

b) Vị trí tương đối của hai mặt phẳng:

Cho hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) . Có thể xảy ra một trong các khả năng sau:



- Hai mặt phẳng (α) và (β)không có điểm chung. Trong trường hợp này ta nói các mặt phẳng (α) và (β)song song với nhau, kí hiệu $(\alpha)//(\beta)$.



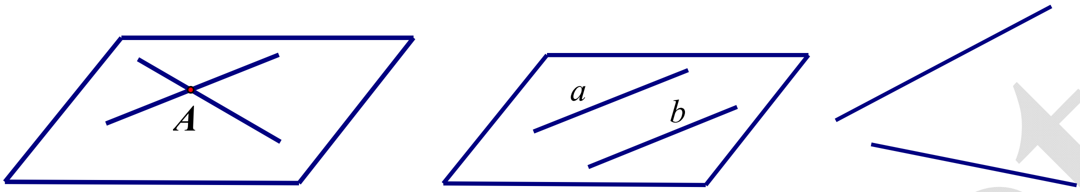
- Hai mặt phẳng (α) và (β)có ít nhất một điểm chung. Trong trường hợp này ta nói các mặt phẳng (α) và (β)có phần chung là một đường thẳng, giả sử đường thẳng đó là d , ta kí hiệu $(\alpha)\cap(\beta)=d$.

Đường thẳng d được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng. Như vậy, việc xác định giao tuyến của hai mặt phẳng tương ứng với việc xác định hai điểm cùng thuộc đồng thời hai mặt phẳng phân biệt đó. Ngoài ra, nếu biết được rằng ba điểm phân biệt cùng thuộc đồng thời hai mặt phẳng thì ba điểm đó phải nằm trên một được thẳng.

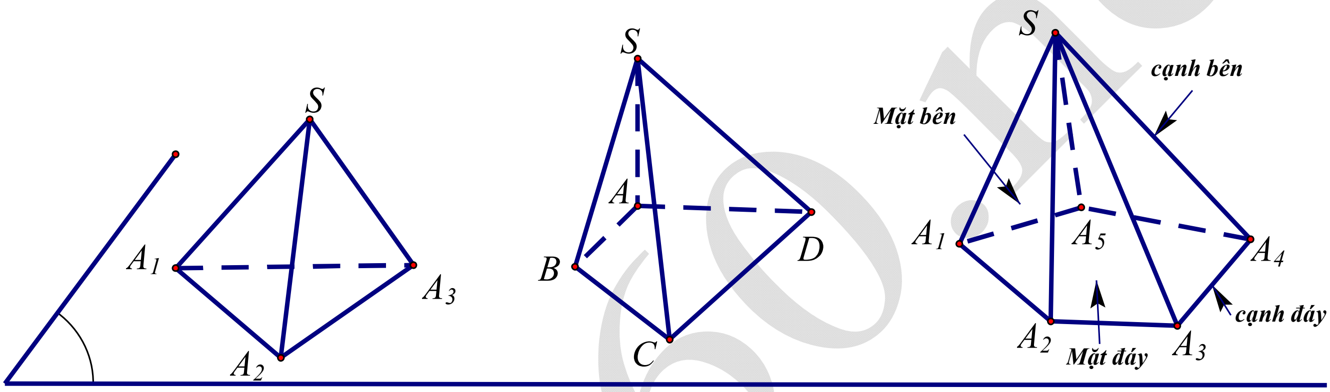
c) Vị trí tương đối của hai đương thẳng: Cho hai đường thẳng phân biệt a và b . Có thể xảy ra một trong các khả năng sau:

- Các đường thẳng a và b cùng thuộc một mặt phẳng. Khi đó a và b hoặc cắt nhau tại một điểm hoạc song song với nhau.

- Các đương thẳng a và b không cùng nằm trong bất kì một mặt phẳng nào. Trong trường hợp này ta nói các đường thẳng a và b chéo nhau.



4. Hình chóp và hình tứ diện



1. Hình chóp:

Trong mặt phẳng (α) , cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ .Lấy điểm S nằrm ngoài mặt phẳng(α) . Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2,..., A_n$ để được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3,..., SA_nA_1$ .Hình gồm đa giác $A_1, A_2,..., A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3,..., SA_nA_1$ và gọi là hình chóp và được kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$

Ta gọi S là đỉnh, đa giác $A_1, A_2,..., A_n$ là mặt đáy, tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3,..., SA_nA_1$ gọi là một mặt bên của hình chóp, Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2,..., SA_n$ gọi là các cạnh bên, các cạnh của đa giác $A_1A_2...A_n$ là các cạnh đáy của hình chóp.

-Cách gọi tên: Hình chóp + tên đa giác.

- Ví dụ: hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác….

Lưu ý: Hình chóp có đáy là đa giác đều, các cạnh bên bằng nhaulaf hình chóp đa giác đều.

b) tứ diện:

Tứ diện $ABCD$ là hình được thành lập từ bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D .Các điểm A, B, C, D là các đỉnh của tứ diện, các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC được gọi là các mặt của tứ diện đối diện với các đỉnh A, B, C, D và các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các cạnh của tứ diện . Trong đó các cặp cạnh AB và CD, AC và DB, AD và BC thường được gọi là các cặp cạnh đối của tứ diện.

B. CÁC DẠNG BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN GIŨA HAI MẶT PHẲNG

Phương pháp: Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) ta tiến hành đi tìm hai điểm thuộc cả hai mặt phẳng (α) và (β) .

Lưu ý:

Một điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) thường tìm được bằng cách: Chọn một mặt phẳng (γ) sao cho các giao tuyến Δ_1,Δ_2 của (α) và (β) với (γ) có thể dựng được ngay. Giao điểm I của Δ_1,Δ_2 (trong (γ)) là điểm chung cần tìm.

Ta thường chứng minh ba điểm thẳng hàng bằng cách chứng minh ba điểm đó thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng.

+ Ta cũng có thể chứng minh bà đường thẳng đồng quy bằng cách:

Cách 1: Hai trong ba đường thẳng ấy cắt nhau và lần lượt nằm trong hai mặt phẳng nhận đường thứ ba làm giao tuyến.

Cách 2: Tìm một đoạn thẳng AB trên một đường thẳng nào đó. Chứng minh hai đường thẳng còn lại chia đoạn AB theo cùng một tỉ số đại số.

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG Δ VÀ MẶT PHẲNG (α) .

Phương pháp:

+ Nếu phát hiện ra một đường thẳng d trong mặt phẳng (α) cắt Δ tại I thì I chính là giao điểm của Δ với mặt phẳng (α) .

+ Nếu chưa phát hiện ra đường thẳng d thì ta dựng d bằng cách: Chọn một mặt phẳng (γ) chứa Δ sao cho giao tuyến của (γ) và (α) có thể dựng được ngay, giao tuyến đó chính là đường thẳng d cần tìm.

Hai định lí quan trọng thường dùng:

Định lí Ceva: Cho tam giác ABC . Các điểm M,N,P khác A,B,C và theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC,CA,AB . Khi đó các đường thẳng AM,BN,CP hoặc đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=-1$

Định lí Menelaus : Cho tam giác ABC . Các điểm M,N,P khác A,B,C và theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC,CA,AB . Khi đó các điểm M,N,P thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$.

DẠNG 3: BÀI TOÁN DỰNG THIẾT DIỆN

Cho trước khối đa diện T và mặt phẳng (α) . Nếu (α) có điểm chung với T thì (α) sẽ cắt một số mặt của T theo các đoạn thẳng. Phần mặt phẳng (α) giới hạn bởi các đoạn đó thường là một đa giác, gọi là mặt cắt (còn gọi là thiết diện) giữa T và (α).

Chú ý:

+ Đỉnh của thiết diện là giao điểm của (α) với các cạnh của T . Cạnh của thiết diện là các đoạn giao tuyến của (α) với các mặt của T . Do đó thực chất của việc dựng thiết diện là bài toán dựng giao điểm giữa đường thẳng và mặt phẳng và dựng giao tuyến giữa hai mặt phẳng.

+ Do mỗi cạnh của thiết diện là đoạn giao tuyến của mặt phẳng (α) với một mặt của T . Do đó số cạnh nhiều nhất mà thiết diện có thể có chính là số mặt của T .
- Đối với hình chóp tam giác (hoặc tứ diện), thiết diện của nó cắt bởi mặt phẳng (α) chỉ có thể là tam giác hoặc tứ giác (ở đay ta quy ước không xét các trường hợp suy biến khi thiết diện là một mặt hoặc một cạnh của hình chóp).
-Đối với hình chóp tứ giác, thiết diện của nó chỉ có thể là tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác.

Các bài toán liên quan đến thiết diện gồm các dạng:

+ Dựng thiết diện.
+ Xác định hình dạng thiết diện.
+ tính diện tích thiết diện.
+ Tính tỉ số thể tích hai phần do thiết diện phân chia khối thể tích đã cho (sẽ được trình bày trong Công phá toán tập 3).

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC . Gọi (P) là mặt phẳng qua 3 điểm M,N,B .

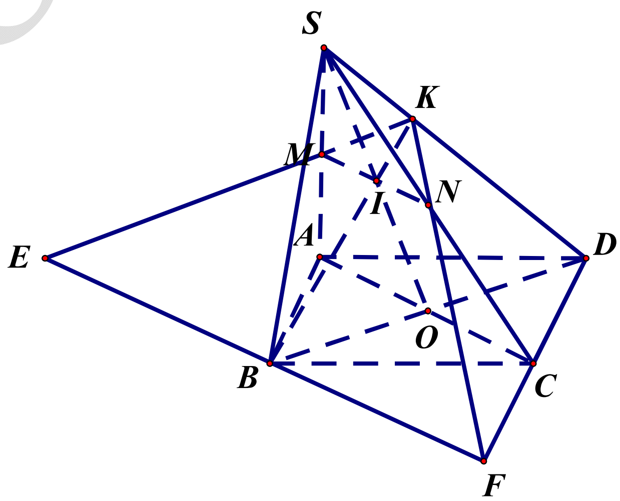
a) Tìm các giao tuyến của (P) và (SAB) ;(P) và (SBC).

b) Tìm giao điểm I của đường thẳng SO với mặt phẳng (P) và giao điểm K của đường thẳng SD với mặt phẳng (P) .

c) Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SCD) . Từn đó suy ra thiết diện của hình chóp cắt bởi (BMN) .

d) Xác định các giao điểm E,F của các đường thẳng DA , DC với (P) . Chứng minh rằng E,B,F thẳng hàng.

Lời giải::



a) Ta có:

$M \in SA, SA \subset (SAB) \Rightarrow M \in (SAB) (1)$

Lại có $M \in (BMN)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $M \in (SAB) \cap (BMN) (3)$

Ta có : $B \in (SAB) \cap (BMN) (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $BM = (SAB) \cap (BMN)$.

Tương tự ta cũng suy ra $BM = (SAB) \cap (BMN)$.

b) Trong mặt phẳng (SAC), gọi I là giao điểm của SO với MN

Ta có :

$I \in MN, MN \subset (BMN) \Rightarrow I \in (BMN) \Rightarrow I$ là giao điểm của SO với (BMN).

Trong mặt phẳng (SBD), gọi K là giao điểm của BI với SD. Ta có :

$K \in BI, BI \subset (BMN) \Rightarrow K \in (BMN)$. Suy ra K chính là giao điểm của SD với (BMN) .

c) Ta có : $\begin{cases} K \in (BMN) \\ K \in (SAD) \end{cases} \Rightarrow K \in (BMN) \cap (SAD)$.

Ta lại có : $M \in (BMN) \cap (SDC)$.

Như vậy tứ giác $BMKN$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (BMN) .

d) Trong mặt phẳng (SAD), gọi $\{E\} = MK \cap AD$. Ta có: $MK \subset (BMN)$ nên $E \in (BMN)$.

Vậy E chính là giao điểm của AD với (BMN) .

Trong mặt phẳng (SDC) gọi $\{F\} = NK \cap CD$.

Ta có $NK \subset (BMN)$ nên $F \in (BMN)$,

$\begin{cases} E \in (BMN) \\ E \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (BMN) \cap (ABCD)$, $\begin{cases} B \in (BMN) \\ B \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow B \in (BMN) \cap (ABCD)$

Suy ra ba điểm B, E, F cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (BMN) và $(ABCD)$. Do đó ba điểm B, E, F thẳng hàng.

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho MN không song song với AC . M, N, P, Q đồng phẳng khi :

A. $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ} = 1$ **B.** $\frac{BM}{AM}.\frac{CN}{BN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ} = 1$

C. $\frac{BM}{AM}.\frac{CN}{BN}.\frac{DP}{CP}.\frac{DQ}{AQ} = 1$ **D.** $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{DP}{CP}.\frac{AQ}{DQ} = 1$.

Đáp án A.

Lời giải:.

+ Giả sử M, N, P, Q cùng thuộc mặt phẳng (α) .

Nếu MN cắt AC tại K thì K là điểm chung của các mặt phẳng $(\alpha), (ABC)$,(ADC) nên PQ cũng đi qua K.

Áp dụng định lí *Menelaus* cho các tam giác ABC, ADC ta được :

$\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CK}{AK} = 1$; $\frac{AK}{CK}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ} = 1 \Rightarrow \frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ} = 1$

Nhận xét :

Trường hợp MN song song với AC thì ví dụ trên vẫn đúng.

+ Liệu trường hợp ngược lại, có $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ} = 1$ thì M, N, P, Q có đồng phẳng hay không ?

Câu trả lời là trường hợp ngược là ví dụ vẫn đúng. Ta sẽ cùng chứng minh nhé :

Trong mặt phẳng (ACD), KO cắt AD tại Q' thì các điểm M, N, P, Q' đồng phẳng.

Theo ví dụ 2 ta có: $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{DP}.\frac{AQ'}{DQ'} = 1 \Rightarrow \frac{DQ'}{AQ'} = \frac{DQ}{AQ} \Rightarrow Q \equiv Q'$. Ví dụ được chứng minh.

+ Ví dụ này có thể được mở rộng đối với các điểm M, N, P, Q bất kì trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA như sau :

M, N, P, Q' đồng phẳng khi và chỉ khi $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}.\frac{\overline{BN}}{\overline{CN}}.\frac{\overline{CP}}{\overline{DP}}.\frac{\overline{DQ}}{\overline{AQ}}=1$ (khẳng định này dôi khi còn được gọi là định lí Menelaus mở rộng trong không gian)

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ và E là điểm thuộc mặt bên (SCD) . E, F lần lượt là trung điểm của AB, AD . Thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG) là :

A. Tam giác. **B.** Tứ giác. **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

Đáp án C.

Lời giải: **:**

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I, H lần lượt là giao điểm của FG với BC, CD

Dễ thấy thiết diện là hình lập phương bị cắt bởi mặt phẳng (α) là ngũ giác $MNGFE$.

Vậy đáp án đúng là C.

b) Theo cách dựng ta có E là trung điểm của BB'. Do đó $B'F = BP = \frac{a}{2} = C'Q$

Suy ra : $PE = QF = \text{EF}=\frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow PQ = \frac{3a\sqrt{2}}{2}, \frac{MB}{NC} = \frac{PB}{PC} = \frac{1}{3} \Rightarrow CN = \frac{3}{4}CD = \frac{3}{4}a.$

Do $\begin{cases} (ABB'A')//(DCC'D') \\ KE = (\alpha)\cap(ABB'A') \\ NG = (\alpha)\cap(DCC'D') \end{cases} \Rightarrow KE//NG$

Tương tự ta có : $MN//FG$

Do đó : $\frac{S_{PME}}{S_{PQN}} = \left(\frac{PE}{PQ}\right)^2 = \frac{1}{9}, \frac{S_{QGF}}{S_{QNP}} = \left(\frac{QE}{PQ}\right)^2 = \frac{1}{9}$

Diện tích thiết diện là :

$S_{MNGFE} = S_{PNQ} - \left(S_{PEM} + S_{QFG}\right) = \frac{7}{9}S_{PNQ}.$

Do hai tam giác vuông NCP và NCQ bằng nhau (c.g.c) nên $NQ = NP$. Vậy tam giác NPQ cân tại N. Gọi I là trung điểm của PQ

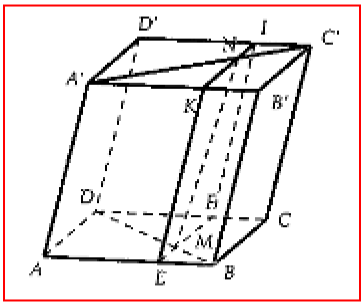
Ta có : $PN = \sqrt{PC^2 + CN^2} = \frac{5a\sqrt{5}}{4}, NI = \sqrt{PN^2 - PI^2} = \sqrt{\frac{45a^2}{16} - \frac{18a^2}{16}} = \frac{3a\sqrt{a}}{4}.$

Diện tích của NPQ bằng :

$S_{NPQ} = \frac{1}{2}NI.PQ = \frac{9a^2\sqrt{6}}{16} \Rightarrow S_{MNGFE} = \frac{7a^2\sqrt{6}}{16}.$

Vậy đáp án đúng là B.

Câu 23. **Đáp án D.**



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, dựng đường thẳng qua M , song song với BC cắt $A'B', C'D'$ theo thứ tự tại E, F .

Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$, dựng đường thẳng qua N song song với $B'C'$ cắt $A'B', C'D'$ theo thứ tự tại K, I. Ta có : $\frac{BM}{BD} = \frac{C'N}{C'A'} \Rightarrow \frac{BM}{BD} = \frac{C'N}{NA'}$.

Áp dụng định lý Thales ta có :

$\frac{B'K}{A'K} = \frac{C'N}{A'N} = \frac{MB}{MD} = \frac{BE}{EA} \Rightarrow KE // BB'$.

Từ đây sauy ra $KE // (BCC'B')$ (1).

Theo cách dựng ta suy ra : $EF // (BCC'B')$ (2).

Từ (1) và (2)$\Rightarrow \begin{cases} (EFIK) // (BCC'B') \\ MN // (EFIK) \end{cases} \Rightarrow MN // (BCC'B')$.

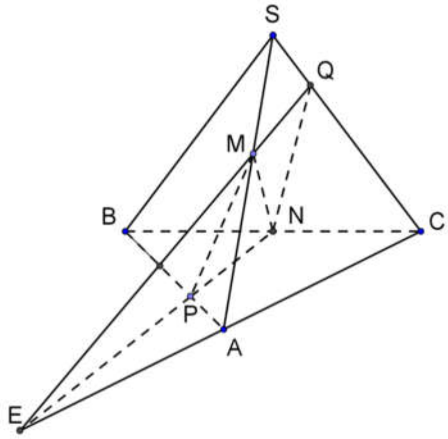
Vậy MN luôn song song với mặt phẳng cố định, mặt phẳng đó là (BCC'B')

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. P là điểm nằm trên cạnh AB sao cho $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$. Gọi Q là giao điểm của SC với mặt phẳng (MNP) . Tính $\frac{SQ}{SC}$

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải:

Đáp án A.



Trong mặt phẳng (ABC) , gọi $E = NP \cap AC$

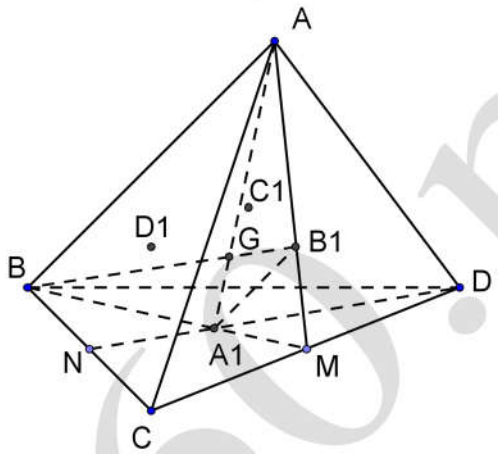
Khi đó Q chính là giao điểm của SC với EM.

Áp dụng địnhlý Menelaus vào tam giác ABC ta có: $\frac{AP}{PB}.\frac{BN}{NC}.\frac{CE}{EA}=1\Rightarrow\frac{CE}{EA}=2$

Áp dụng địnhlý Menelaus vào tam giác SAC ta có: $\frac{AM}{MS}.\frac{SQ}{QC}.\frac{CE}{EA}=1\Rightarrow\frac{SQ}{QC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{SQ}{SC}=\frac{1}{3}$

Ví dụ 5: Cho tứ diện ABCD. Gọi A_1,B_1,C_1,D_1 tương ứng là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD và ABC. Chứng minh rằng AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 đồng quy tại điểm G và ta có: $\frac{AG}{AA_1}=\frac{BG}{BB_1}=\frac{CG}{CC_1}=\frac{DG}{DD_1}=\frac{3}{4}$

Lời giải:



Lưu ý: Điểm G được gọi là trọng tâm tứ diện ABCD

Gọi M là trung điểm CD. Theo tính chất trọng tâm ta có: $\frac{MA_1}{MB}=\frac{MB_1}{MA}=\frac{1}{3}\Rightarrow A_1B_1//AB$ và $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{3}$

Trong mặt phẳng (AMB), gọi G là giao điểm của BB_1,AA_1

Theo định lý Thales ta có: $\frac{A_1G}{GA}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{AG}{AA_1}=\frac{3}{4}\quad(1)$

Tương tự ta có: $\begin{cases}G'=CC_1\cap AA_1,\frac{AG'}{AA_1}=\frac{3}{4}\\ G''=DD'\cap AA_1,\frac{AG''}{AA_1}=\frac{3}{4}\end{cases}\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra G, G', G" trùng nhau, tức là AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 đồng quy tại điểm G và ta có :

$\frac{AG}{AA_1}=\frac{BG}{BB_1}=\frac{CG}{CC_1}=\frac{DG}{DD_1}=\frac{3}{4}$

Bài tập tương tự: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J,E,F,K,H tương ứng là các trung điểm của AB,CD,AC,BD,AD,BC. Chứng minh rằng IJ,EF,KH đòng quy tại một điểm và điểm đồng quy chính là trọng tâm G của tứ diện $ABCD$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?