PHÉP VỊ TỰ

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa.

Cho điểm O cố định và số k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k.

Kí hiệu: $V_{(O,k)}$ (O là tâm vị tự, k là tỉ số vị tự)

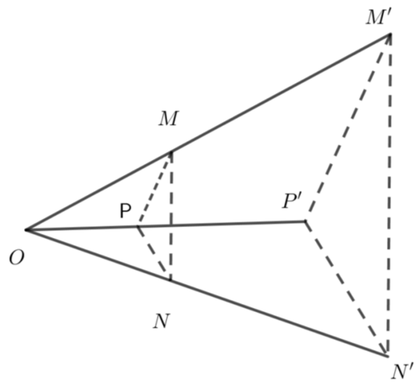
$V_{(o,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

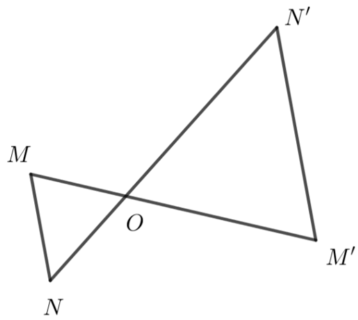
Nhận xét:

- Khi $k > 0$, M và M' nằm cùng phía đối với điểm O
- Khi $k < 0$, M và M' nằm khác phía đối với điểm O

Khi $k = -1$, M và M' đối xứng nhau qua tâm O nên $V_{(O,-1)} \to Đ_O$

- Khi $k = 1 \Rightarrow M \equiv M'$ phép vị tự $V_{(O,1)}$ trở thành phép đồng nhất





2. Tính chất.

Tính chất 1: Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N tùy ý theo thứ tự thành M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$.

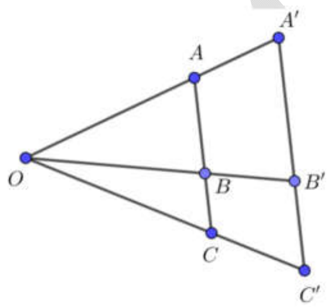
Tính chất 2: Phép vị tự tỉ số k:

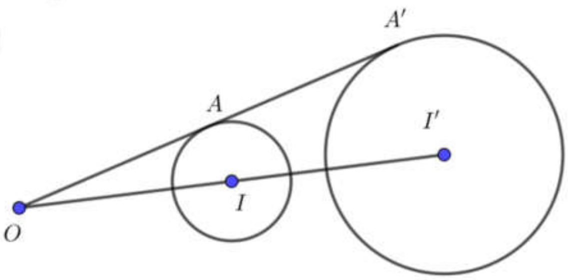
a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa chúng.

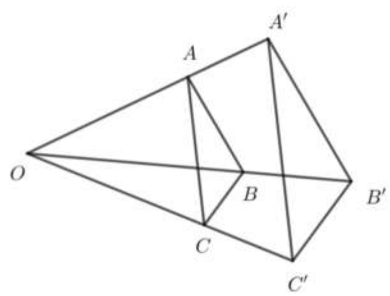
b) Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.

d) Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|.R$







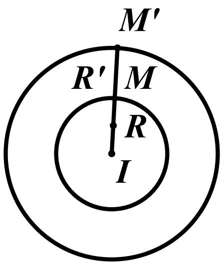
3. Biểu thức tọa độ của phép vị tự.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự $V_{(I,k)}; I(x_0; y_0)$

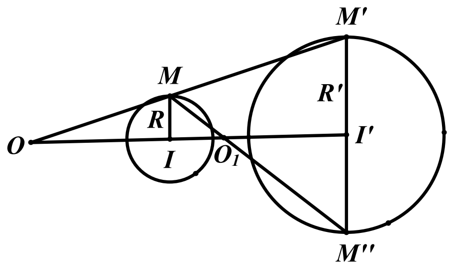
$$V_{(I,k)}: M(x;y) \to M'(x';y') \to \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases} \quad (1)$$

✍Đọc thêm: Tâm vị tự của hai đường tròn

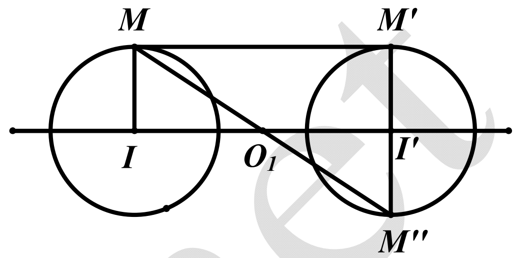
Định lý: Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia. Tâm của phép vị tự như thế được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn.



Hình a



Hình b



Hình c

Cho hai đường tròn $(I;R)$ và $(I';R')$ các trường hợp:

• TH1: Nếu $I \equiv I'$ thì phép vị tự tâm I tỉ số $-\frac{R'}{R}$ biến đường tròn $(I;R)$ thành đường tròn $(I';R')$ (Hình a).

• TH2: Nếu $I \neq I'$ và $R \neq R'$ thì phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k_1 = -\frac{R'}{R}$ sẽ biến $(I;R)$ thành $(I';R')$ (Hình b) .

Ta gọi O là tâm vị tự ngoài, O_1 là tâm vị tự trong của hai đường tròn.

• TH3: Nếu $I \neq I'$ và $R = R'$ thì có một phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k = -\frac{R'}{R} = -1$ biến đường tròn $(I;R)$ thành $(I';R')$ hay phép đối xứng tâm (Hình c).

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHÉP VỊ TỰ

DẠNG 1. KHAI THÁC ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ ỨNG DỤNG CỦA PHÉP VỊ TỰ

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của phép vị tự.
- Xác định ảnh của một điểm, một hình qua phép vị tự.
- Tìm quỹ tích điểm thông qua phép vị tự.
- Các yếu tố liên quan phép vị tự là thẳng hàng, tỉ số không đổi…từ đó ứng dụng phép vị tự để giải các bài toán hình học khác…

Ví dụ 1: Cho điểm O và $k \neq 0$. Gọi M' là ảnh của M qua phép vị tự tâm O tỉ số k. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó. **B.** $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

C. Khi $k = 1$ phép vị tự là phép đối xứng tâm. **D.** $M' = V_{(O,k)} \Leftrightarrow M = V_{\left(c,\frac{1}{k}\right)}(M')$.

Lời giải::

Đáp án C.

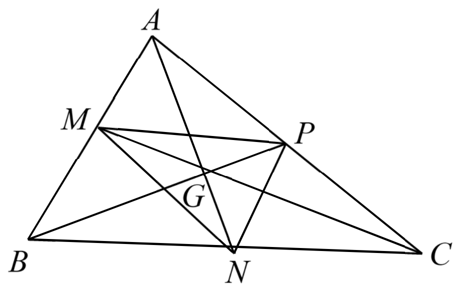
Khi $k = 1$: phép vị tự $V_{(O,1)}(M) = M' \Leftrightarrow M \equiv M'$

Ví dụ 2: Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Phép vị tự nào sau đây biến ΔABC thành ΔNPM ?

A. $V_{\left(A,-\frac{1}{2}\right)}$. **B.** $V_{\left(M,\frac{1}{2}\right)}$. **C.** $V_{(G,-2)}$. **D.** $V_{\left(G,-\frac{1}{2}\right)}$.

Lời giải::

Đáp án D.



Ta có $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA} \Rightarrow V_{\left(G,-\frac{1}{2}\right)}(\Delta ABC) = \Delta NPM$

Ví dụ 3: Cho hai điểm O, I. Xét phép vị tự V tâm I tỉ số $k \neq 1$ và phép tịnh tiến theo $\vec{u} = (1-k)\overrightarrow{IO}$. Lấy điểm M bất kì, $M_1 = V(M), M_2 = T(M_1)$. Phép biến hình F biến M thành M_2. Chọn mệnh đề đúng:

A. F là phép vị tự tâm O tỉ số $1-k$. **B.** F là phép vị tự tâm O tỉ số k.

C. F là phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{1}{k}$. **D.** F là phép vị tự tâm O tỉ số $-\frac{1}{k}$.

Lời giải::

Đáp án B.

$\overrightarrow{IM_1} = K.\overrightarrow{IM} \, (1)$

$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{u} = (1-k)\overrightarrow{IO} \Rightarrow \overrightarrow{IM_2} - \overrightarrow{IM_1} = (1-k)\overrightarrow{IO} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{IM_1} + (1-k)\overrightarrow{IO} \, (2)$

Thế (1) vào (2): $\overrightarrow{IM_2} = k\overrightarrow{IM} + (1-k)\overrightarrow{IO} \Rightarrow \overrightarrow{OM_2} = k\overrightarrow{OM}$

Vậy F là phép vị tự tâm O tỉ số k.

Ví dụ 4: Cho ΔABC có cạnh $3,5,7$. Phép đồng dạng tỉ số $k=2$ biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ có diện tích là:

A. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$. **B.** $15\sqrt{3}$. **C.** $\frac{15\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{15\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải::

Đáp án B.

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$

Tỉ số diện tích hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

$\Rightarrow \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = 4 \Leftrightarrow S_{\Delta A'B'C'} = 15\sqrt{3}$.

Ví dụ 5: Có bao nhiêu phép vị tự biến đường tròn (C) thành đường tròn (C')?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** không xác định.

Lời giải::

Đáp án D.

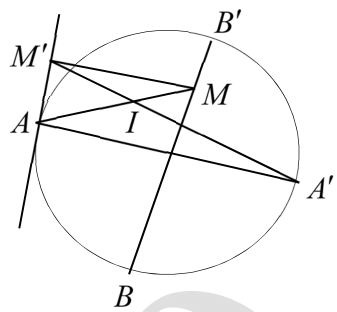
Không xác định vì thiếu giả thiết về phép vị tự.

Ví dụ 6: Cho đường tròn tâm O và hai đường kính AA' và BB' vuông góc với nhau. M là điểm bất kì trên đường kính BB', M' là hình chiếu vuông góc của M xuống tiếp tuyến với đường tròn tại A. I là giao điểm của AM và $A'M'$. Khi đó I là ảnh của M trong phép vị tự tâm A tỉ số bao nhiêu?

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải::

Đáp án A.



$$\frac{AI}{AM}=\frac{MM'}{AA'}=2\Rightarrow\frac{AI}{IM+AI}=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Vậy I là ảnh của M trong phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{2}{3}$.

DẠNG 2. TÌM ẢNH CỦA MỘT ĐIỂM HOẶC HÌNH QUA PHÉP VỊ TỰ BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

Phương pháp:

1. Xác định ảnh của một điểm qua phép vị tự.

- Sử dụng biểu thức tọa độ của phép vị tự.

2. Xác định ảnh Δ' của đường thẳng Δ qua phép vị tự.

Cách 1: Chọn hai điểm A,B phân biệt trên Δ, xác định ảnh A',B' tương ứng. Đường thẳng Δ' cần tìm là đường thẳng qua hai ảnh A',B'.

Cách 2: Áp dụng tính chất phép vị tự $V_{(O,k)}$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' song song hoặc trùng với nó.

Cách 3: Sử dụng quỹ tích

- Với mọi điểm $M(x;y)\in\Delta: V_{(O,k)}(M)=M'(x';y')$ thì $M'\in\Delta'$.

- Từ biểu thức tọa độ rút x,y thế vào phương trình đường thẳng Δ ta được phương trình ảnh Δ'.

3. Xác định ảnh của một hình H (đường tròn, elip, parabol…)

- Sử dụng quỹ tích: Với mọi điểm $M(x;y)$ thuộc hình H, $V_{(O,k)}(M)=M'(x';y')$ thì M' thuộc ảnh H' của hình H.

- Với đường tròn áp dụng tính chất phép vị tự biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|R$ hoặc sử dụng quỹ tích.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;2)$. Ảnh của A qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-1$ là:

A. $(3;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-2;-3)$. **D.** $(-3;-2)$.

Lời giải::

Đáp án D.

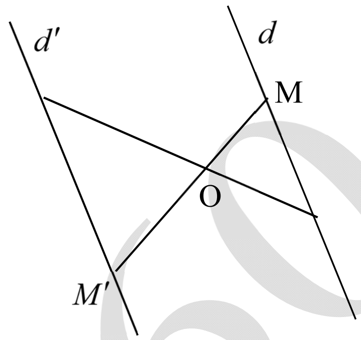
Áp dụng biểu thức tọa độ của phép vị tự: $V_{(O,-1)}(A)=A' \Rightarrow A':\begin{cases} x'=-3 \\ y'=-2 \end{cases}$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 5x+2y-7=0$. Tìm ảnh d' của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$.

A. $5x+2y+14=0$. **B.** $5x+4y+28=0$. **C.** $5x-2y-7=0$. **D.** $5x+2y-14=0$.

Lời giải::

Đáp án A.



Cách 1: Chọn hai điểm A,B phân biệt trên d, xác định ảnh A',B' tương ứng. Đường thẳng d' cần tìm là đường thẳng qua hai ảnh A',B' (học sinh tự làm).

Cách 2: Do d' song song hoặc trùng với d. Nên d' có dạng $5x+2y+c=0$.

Lấy $M(1;1)\in d$. Khi đó: $V_{(O,-2)}(M)=M'(x';y') \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'}=-2\overrightarrow{OM} \Rightarrow M'(-2;-2)$

Thay vào $d' \Rightarrow c=14$. Vậy $d': 5x+2y+14=0$

Cách 3: Gọi $M(x;y)\in d: V_{(O,-2)}(M)=M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x'=-2x \\ y'=-2y \end{cases} \Leftrightarrow y=\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}x' \\ y=-\dfrac{1}{2}y' \end{cases}$

Thế vào phương trình đường thẳng $d: -\dfrac{5}{2}x'-y'-7=0 \Leftrightarrow 5x'+2y'+14=0$

Vậy $d': 5x+2y+14=0$.

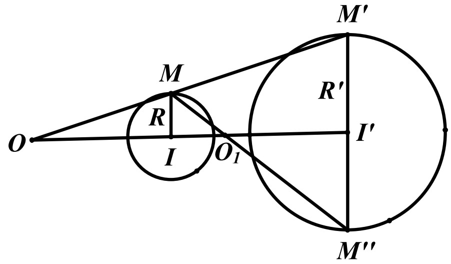
Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=4$. Tìm ảnh (C') của (C) qua phép vị tự tâm $I(-1;2)$ tỉ số $k=3$?

A. $x^2+y^2-14x+4y-1=0$. **B.** $x^2+y^2+4x-7y-5=0$.

C. $(x-5)^2+(y+1)^2=36$. **D.** $(x-7)^2+(y-2)^2=9$.

Lời giải::

Đáp án C.



Đường tròn (C) có tâm $J(1;1)$, bán kính $R=2$.

$$V_{(1,3)}(J)=J'(x';y')\Rightarrow\begin{cases}x'=-1+3(1+1)=5\\y'=2+3(1-2)=-1\end{cases}\Rightarrow J'(5;-1)$$

$$R'=3R=6\Rightarrow(C'):(x-5)^2+(y+1)^2=36$$

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phép vị tự tâm O tỉ số $k=\frac{1}{2}$. Tìm ảnh (S') của đường cong $(S): y=\frac{2x+1}{1-x}$ qua phép vị tự trên.

A. $y=\frac{4x+1}{2-4x}$. **B.** $y=\frac{4x+1}{1-4x}$. **C.** $y=\frac{2x+1}{1-2x}$. **D.** $y=\frac{2x-1}{1-4x}$.

Lời giải::

Đáp án A.

$$V_{\left(O;\frac{1}{2}\right)}: M(x;y)\to M'(x';y')$$

$$\forall M(x;y)\in(S)\Rightarrow M'(x';y')\in(S')$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x\\y'=\frac{1}{2}y\end{cases}\Leftrightarrow y=\begin{cases}x=2x'\\y=2y'\end{cases}$$ thế vào (S) $\Rightarrow 2y'=\frac{2.2x'+1}{1-2x'}\Leftrightarrow y'=\frac{2x'+\frac{1}{2}}{1-2x'}$

Vậy $(S'): y=\frac{4x+1}{2-4x}$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

DẠNG 1. KHAI THÁC ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ ỨNG DỤNG CỦA PHÉP VỊ TỰ

Câu 1: Mệnh đề nào sau đây sai về phép vị tự:

A. Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy.
B. Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
C. Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.
D. Biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

Câu 2: Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự đối với tỉ số $k=20$ biến đường thẳng d thành d'?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.
C. Chỉ có 2 phép. **D.** Có vô số phép.

Câu 3: Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự biến đường thẳng d thành d' ?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.
C. Chỉ có 2 phép. **D.** Có vô số phép.

Câu 4: Cho hai đường thẳng song song d và d', và một điểm O không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm O biến đường thẳng d thành d'?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 5: Cho hai đường tròn bằng nhau $(O;R)$ và $(O';R)$ với tâm O và tâm O' phân biệt. Có bao nhiêu phép vị tự biến $(O;R)$ thành $(O';R)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 6: Cho hai phép vị tự $V_{(O,k)}$ và $V_{(O',k')}$ với O và O' là hai điểm phân biệt và $k.k'=1$. Hợp của hai phép vị tự đó là phép nào sau đây?

A. Phép tịnh tiến. **B.** Phép đối xứng trục.
C. Phép đối xứng tâm. **D.** Phép quay.

Câu 7: Cho ΔABC vuông tại A, $AB=6, AC=8$. Phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{3}{2}$ biến B thành B', biến C thành C'. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $BB'C'C$ là hình thang. **B.** $B'C'=12$.
C. $S_{A'B'C'}=\frac{3}{4}$. **D.** Chu vi $\Delta ABC=\frac{2}{3}$chu vi $\Delta A'B'C'$.

Câu 8: Cho hình thang $ABCD$ $(AB//CD)$. Đáy lớn $AB=8$, đáy nhỏ $CD=4$. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo và J là giao điểm của hai cạnh bên. Phép biến hình $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{CD}$ là phép vị tự nào?

A. $V_{\left(I,\frac{1}{2}\right)}$. **B.** $V_{\left(J,\frac{1}{2}\right)}$. **C.** $V_{\left(I,-\frac{1}{2}\right)}$. **D.** $V_{\left(J,-\frac{1}{2}\right)}$.

Câu 9: Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm A cố định trên đường tròn. BC là dây cung di động và BC có độ dài không đổi bằng $2a$ $(a<R)$. Gọi M là trung điểm BC. Khi đó tập hợp trọng tâm G của ΔABC là:

A. $G=V_{\left(A,\frac{2}{3}\right)}(M)$, tập hợp là một đường tròn.

B. $G=V_{\left(O,\frac{1}{2}\right)}(M)$, tập hợp là một đường thẳng.

C. $G=V_{\left(A,\frac{1}{3}\right)}(M)$, tập hợp là một đường tròn.

D. $G=V_{\left(B,\frac{2}{3}\right)}(M)$, tập hợp là một đường thẳng.

Câu 10: Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Một đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) và đoạn AB lần lượt tại C và D. Đường thẳng CD cắt $(O;R)$ tại I. Tính độ dài đoạn AI.

A. $2R\sqrt{3}$. **B.** $R\sqrt{2}$. **C.** $R\sqrt{3}$. **D.** $2R\sqrt{2}$.

Câu 11: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc trong tại A $(R>R')$. Đường kính qua A cắt $(O;R)$ tại B và cắt $(O';R')$ tại C. Một đường thẳng di động qua A cắt $(O;R)$ tại M và cắt $(O';R')$ tại N. Gọi I là giao điểm của BN và CM. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Tập hợp điểm I là đường tròn: $(O'')=V_{\left(C,\frac{R'}{R+R'}\right)}((O,R))$.

B. Tập hợp điểm I là đường tròn: $(O'')=V_{\left(C,\frac{R}{R+R'}\right)}((O,R))$.

C. Tập hợp điểm I là đường tròn: $(O'')=V_{\left(\mathrm{M},\frac{R'}{R+R'}\right)}((O,R))$.

D. Tập hợp điểm I là đường tròn: $(O'')=V_{\left(\mathrm{M},\frac{R}{R+R'}\right)}((O,R))$.

DẠNG 2: TÌM ẢNH CỦA MỘT ĐIỂM HOẶC MỘT HÌNH QUA PHÉP VỊ TỰ BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm ảnh A' của điểm $A(1;-3)$ qua phép vị tự tâm O tỉ số -2

A. $A'(2;6)$. **B.** $A'(1;3)$. **C.** $A'(-2;6)$. **D.** $A'(-2;-6)$.

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(1;2)$. Tìm ảnh A' của A qua phép vị tự tâm $I(3;-1)$ tỉ số $k=2$.

A. $A'(3;4)$. **B.** $A'(1;5)$. **C.** $A'(-5;-1)$. **D.** $A'(-1;5)$.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $P(-3;2),Q(1;1),R(2;-4)$. Gọi P',Q',R' lần lượt là ảnh của P,Q,R qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-\frac{1}{3}$. Khi đó tọa độ trọng tâm của tam giác $P'Q'R'$ là:

A. $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{9}\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{9};0\right)$.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(0;3),B(2;-1),C(-1;5)$. Phép vị tự tâm A tỉ số k biến B thành C. Khi đó giá trị k là:

A. $k=-\frac{1}{2}$. **B.** $k=-1$. **C.** $k=\frac{1}{2}$. **D.** $k=2$.

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(0;3),B(2;-1),C(-1;5)$. Phép vị tự tâm A tỉ số k biến B thành C. Khi đó giá trị k là:

A. $k=2$. **B.** $k=-1$. **C.** $k=1$. **D.** $k\in\varnothing$.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:2x+y-4=0,I(-1;2)$. Tìm ảnh d' của d qua phép vị tự tâm I tỉ số $k=-2$

A. $2x-y+4=0$. **B.** $-2x+y+8=0$. **C.** $2x+y+8=0$. **D.** $x+\frac{1}{2}y+2=0$.

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:3x-y-5=0$. Tìm ảnh d' của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-\frac{2}{3}$

A. $-3x+y-9=0$. **B.** $3x-y-10=0$. **C.** $9x-3y+15=0$. **D.** $9x-3y+!0=0$.

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d:\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$ và $d':2x-y-6=0$. Phép vị tự $V_{(O,k)}(d)=d'$. Tìm k

A. $k=\frac{3}{2}$. **B.** $k=-\frac{2}{3}$. **C.** $k=\frac{1}{3}$. **D.** $k=-\frac{1}{3}$.

Câu 9: Trong mặt phẳng Oxy, tìm ảnh đường tròn (C') của đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=5$ qua phép vị tự tâm 0 tỉ số $k=-2$.

A. $(C'):(x+2)^2+(y+4)^2=10$. **B.** $(C'):(x-2)^2+(y-4)^2=10$.

C. $(C'):(x+2)^2+(y-4)^2=20$. **D.** $(C'):(x-2)^2+(y+4)^2=20$.

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=5$. Tìm ảnh đường tròn (C') của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm $I(1;2)$ và tỉ số $k=-2$

A. $x^2+y^2+6x-16y+4=0$. **B.** $x^2+y^2-6x+!6y-4=0$.

C. $(x+3)^2+(y-8)^2=20$. **D.** $(x-3)^2+(y+8)^2=20$.

Câu 11: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn $(C_1):(x-1)^2+(y-3)^2=1;(C_2):(x-4)^2+(y-3)^2=4$. Tìm tâm vị tự ngoài của hai đường tròn đó

A. $(-2;3)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(3;-2)$. **D.** $(1;-3)$.

Câu 12: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn $(C_1):(x-3)^2+(y-3)^2=9$ và đường tròn $(C_2):(x-10)^2+(y-7)^2=9$. Tìm tâm vị tự trong biến (C) thành (C').

A. $\left(\frac{36}{5};\frac{27}{5}\right)$. **B.** $\left(\frac{13}{2};5\right)$. **C.** $\left(\frac{32}{5};\frac{24}{5}\right)$. **D.** $\left(5;\frac{13}{2}\right)$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Dạng 1: Khai thác định nghĩa, tính chất và ứng dụng của phép vị tự.

Câu 1: Đáp án D.

Câu 2: Đáp án D.

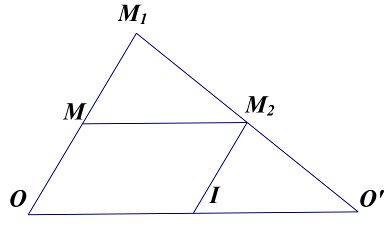
Câu 3: Đáp án A

Theo tính chất phépv ị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng nhay, không có trường hợp d cắt d'.

Câu 4: Đáp án B.

Câu 5: Đáp án B.

Câu 6: Đáp án A



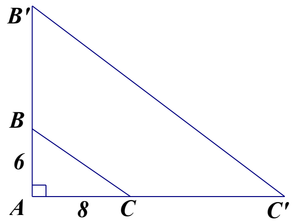
Lấy điểm M bất kỳ: $V_{(O;k)}(M)=M_1$ và $V_{(O';k')}(M_1)=M_2 \Rightarrow \overrightarrow{OM_1}=k\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{O'M_2}=k'\overrightarrow{O'M_1}$

Khi đó phép hợp thành $F(M)=M_2$. Gọi I là ảnh của O qua phép hợp $V_{(O';k)} \Rightarrow \overrightarrow{O'I}=k\overrightarrow{O'O}$

Khi đó $\overrightarrow{IM_2}=k'\overrightarrow{OM_1}=k.k'\overrightarrow{OM}$ nên: $\overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'I}=(1-k')\overrightarrow{OO'}$

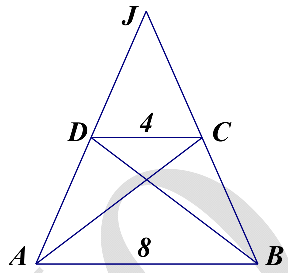
Vậy F là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (1-k')\overrightarrow{OO'}$.

Câu 7: Đáp án B



$V_{\left(A;\frac{3}{2}\right)}(B) = (B') \Rightarrow AB' = \frac{3}{2}AB = 9; V_{\left(A;\frac{3}{2}\right)}(C) = (C') \Rightarrow AC' = \frac{3}{2}AC = 12 \Rightarrow B'C' = \sqrt{9^2+12^2} = 15$.

Câu 8: Đáp án C

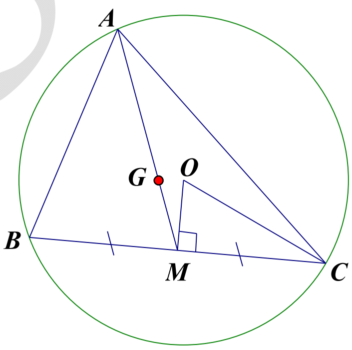


Ta có

$\frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}; V_{\left(I,\frac{1}{2}\right)}(A) = C \Leftrightarrow \overrightarrow{IC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}; V_{\left(I,\frac{1}{2}\right)}(B) = D \Leftrightarrow \overrightarrow{ID} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IB}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Câu 9: Đáp án A

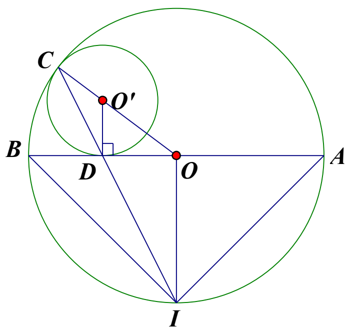


Ta có: $OM \perp BC \Rightarrow OM = \sqrt{R^2 - a^2} \Rightarrow M \in \left(O; \sqrt{R^2 - a^2}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow G = V_{\left(A,\frac{2}{3}\right)}(M)$

Khi M di động trên đường tròn $\left(O; \sqrt{R^2 - a^2}\right)$ thì G chạy trên đường tròn (O') là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự $V_{\left(A,\frac{2}{3}\right)}$.

Câu 10: Đáp án B

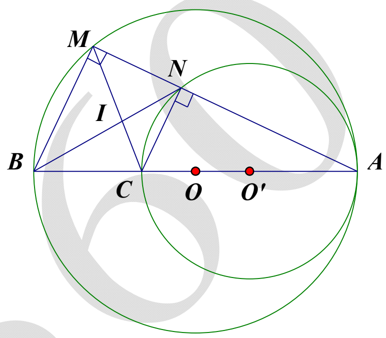


Ta có: $V_{\left(C,\frac{R'}{R}\right)}(O)=O' \Leftrightarrow CO'=\dfrac{R'}{R}CO \quad (1)$

$V_{\left(C,\frac{R'}{R}\right)}(I)=D \Leftrightarrow CD=\dfrac{R'}{R}CI \quad (2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \dfrac{CD'}{CD}=\dfrac{CO}{CI} \Rightarrow OI \parallel O'D \Rightarrow OI \perp AB \Rightarrow I$ là điểm chính giữa của cung AB.

Câu 11: Đáp án A



Ta dự đoán $V_{\left(C;\frac{CI}{CM}\right)}(M)=I$ mà M nằm trên đường tròn $(O) \Rightarrow I$ nằm trên đường tròn $(O_1)=V_{\left(C;\frac{CI}{CM}\right)}(O)$

Ta cần chứng minh $\dfrac{CI}{CM}$ theo R và R'

Ta có $\dfrac{CM}{CI}=\dfrac{CI+IM}{CI}=1+\dfrac{IM}{CI}$ mà $\dfrac{IM}{CI}=\dfrac{IB}{IN}=\dfrac{BM}{CN}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{R}{R'} \Rightarrow \dfrac{CI}{CM}=\dfrac{R'}{R+R'}$

$\Rightarrow V_{\left(C,\frac{R'}{R+R'}\right)}(M)=I$

DẠNG 2: TÌM ẢNH CỦA ĐIỂM, ĐƯỜNG QUA PHÉ VỊ TỰ BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ.

Câu 1: Đáp án C

$V_{(O;-2)}(A)=A' \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'}=-2\overrightarrow{OA} \Rightarrow A'(-2;6)$.

Câu 2: Đáp án D

$V_{(I,2)}(A)=A' \Leftrightarrow \overrightarrow{IA'}=2\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-3=4 \\ y'+1=6 \end{cases} \Rightarrow A(-1;5)$.

Câu 3: Đáp án B

$V_{\left(O,-\frac{1}{3}\right)}(P)=P';V_{\left(O,-\frac{1}{3}\right)}(Q)=Q';V_{\left(O,-\frac{1}{3}\right)}(R)=R' \Rightarrow$ tọa độ các điểm $P'\left(1;\frac{-2}{3}\right);Q'\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right);R'\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$. Nên tọa độ trọng tâm $\Delta P'Q'R'$ là $\left(0;\frac{1}{9}\right)$.

Câu 4: Đáp án A

Giả sử $V_{(A,k)}(B)=C \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases}-1=2k\\ 2=k(-4)\end{cases} \Rightarrow k=-\frac{1}{2}$.

Câu 5: Đáp án D

Giả sử $V_{(A,k)}(B)=C \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases}5=k.4\\ 1=-k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k=\frac{5}{4}\\ k=-1\end{cases} \Rightarrow$ không thỏa mãn $\Rightarrow k\in\varnothing$.

Câu 6: Đáp án C

$V_{(I,-2)}(d)=d' \Rightarrow d \parallel d'$ nên d' có dạng $2x+y+c=0$

Chọn điểm $M(2;0)\in d \Rightarrow V_{(I;-2)}(M)=M'(x;y)\in d' \Rightarrow \begin{cases}x'=5\\ y'=-2\end{cases}$ thế vào $d':10-2+c=0 \Rightarrow c=8$

Vậy $d':2x+y+8=0$.

Câu 7: Đáp án D

Tương tự câu 6 $\Rightarrow d':9x-3y+10=0$.

Câu 8: Đáp án A

$d:2x-y-4=0 \Rightarrow d \parallel d'$

Chọn $M(2;0)\in d \Rightarrow V_{(O,k)}(M)=M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases}x'=2k\\ y'=0\end{cases}$

Do $M'\in d' \Rightarrow 2.2k-0-6=0 \Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$.

Câu 9: Đáp án C

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$

$\Rightarrow V_{(O,-2)}(I)=I'(x';y') \Rightarrow \begin{cases}x'=-2\\ y'=4\end{cases} \Rightarrow I'(-2;4)$. Bán kính $R'=|k|.R=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ đường tròn $(C'):(x+2)^2+(y-4)^2=20$.

Câu 10: Đáp án C

Đường tròn (C) có tâm $I(8;1):V_{(I,-2)}(J)=J'(x';y') \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ'}=-2\overrightarrow{IJ} \Rightarrow \begin{cases}x'=-3\\ y'=8\end{cases} \Rightarrow J'(-3;8)$

Bán kính $R'=|k|R=2\sqrt{5} \Rightarrow$ phương trình $(C'):(x-3)^2+(y-8)^2=20$.

Câu 11: Đáp án A

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;3)$ và bán kính $R_1=1$

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(4;3)$ và bán kính $R_2=2$

Gọi I là tâm vị tự ngoài của phép vị tự $V_{(I,k)}((C_1))=(C_2) \Rightarrow V_{(I,k)}(I_1)=I_2, k=\frac{R_2}{R_1}=2 \Leftrightarrow \overrightarrow{II_2}=2\overrightarrow{II_1} \Rightarrow I(-2;3)$.

Câu 12: Đáp án A

Đường tròn (C) có tâm $I(3;3)$ và bán kính $R=3$

Đường tròn (C') có tâm $I'(10;7)$ và bán kính $R'=2$

$\Rightarrow I \neq I', R \neq R' \Rightarrow$ tỉ số vị tự $k=-\frac{2}{3}$

$V_{(O_1,k)}(I)=I' \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1I'}=k\overrightarrow{O_1I}$ với $O_1(x;y)$ là tâm vị tự trong $\Leftrightarrow \begin{cases} x-10=-\frac{2}{3}(x-3) \\ x-7=-\frac{2}{3}(y-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{36}{5} \\ y=\frac{27}{5} \end{cases}$

Vậy $O_1\left(\frac{36}{5};\frac{27}{5}\right)$